§5　货郎担问题

§5.1　释义和由来

货郎担, 货郎挑的杂货担, 亦指货郎. 一般称货郎担, 主要指卖小百货之货郎. 货郎担就是挑着担子走街串巷、走村串户贩卖商品的小贩.

提起货郎担, 心里顿时涌起浓烈的怀旧情绪. 在许多人的童年记忆中, 至今存有货郎担走街串巷、走村串户的身影. 他们多半是中年汉子, 走到村头巷口, 放下货担, 无需叫卖, 手摇拨浪鼓. 男女老少, 听到鼓声后一齐围上来. 虽然仅是一副货担, 但商品往往非常丰富, 有妇女用的雪花膏、发卡、木梳、镜子、头绳、扣子、针头线脑; 有日常生活所需的火柴和剪子; 有小孩用的小挂件、木制小玩具、小气球、小泥人, 以及糖果等. 货郎不仅卖东西, 还收废品. 有的孩子就会拿鸡毛、鸭毛、鸡肫皮、牙膏皮、烂鞋、碎布头之类的废品换玩具或糖果. 当代著名连环画画家王弘力为货郎担赋诗作画“蕟鼓街头摇丁东，无须竭力叫卖声. 莫道双肩难负重, 乾坤尽在一担中”（见图 1）是货郎担的真实写照.

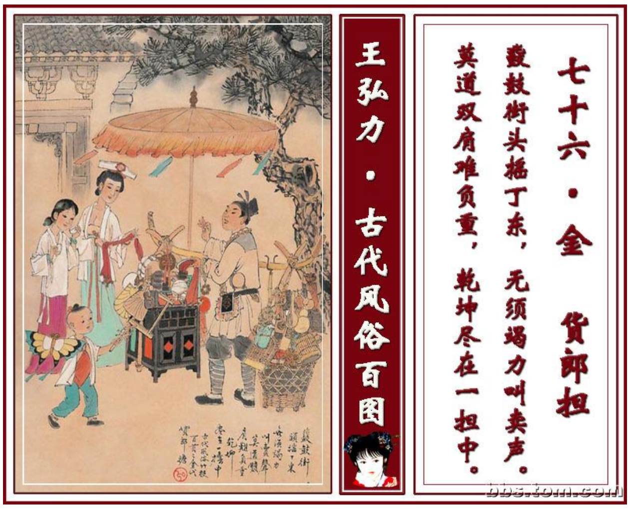

图 1: 王弘力的《货郎担》

货郎担无疑是一个“流动百货商店”, 在群众居住极其分散的社会里, 货郎担是商品流通的重要手段之一. 货郎们不辞辛苦, 活跃在城乡之间, 深入到穷乡僻壤, 从事着最底层的商业活动, 因而受到了下层人民最热烈的欢迎. 众多的关于货郎担的摄影作品给人们留下美好的记忆（见图 2）.

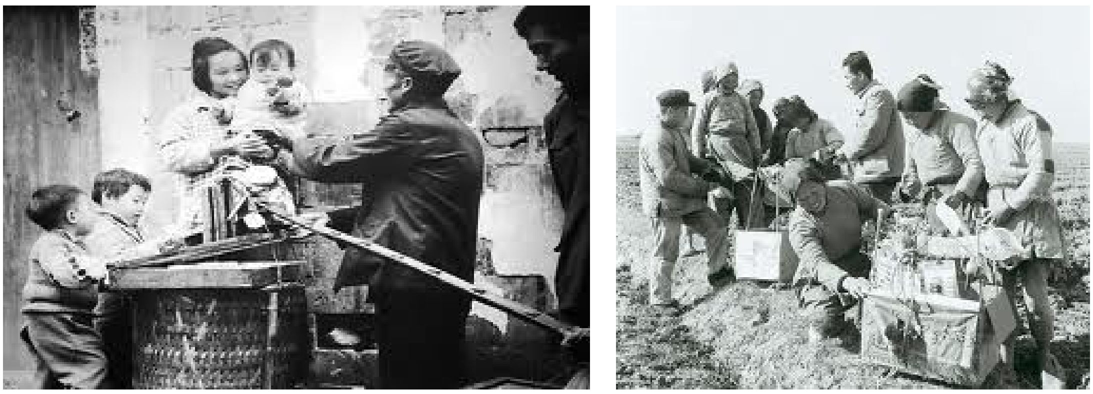

图 2　摄影:《货郎担》深入街头巷尾、田间地头

如今, 随着时代的变迁, 商业网点星罗密布, 货郎担早已消失在了历史的陈年光影中, 但怀旧之情人人有之. 不少城市在繁华的小商品商业区立有《货郎担》雕塑; 据说世界著名的小商品集散地浙江省义乌市还建了《货郎担》公园, 以纪念那些为义乌小商品市场的形成和发展做出不朽贡献的货郎们; 山东等一些旅游区设有《货郎担》景点（见图 3）.

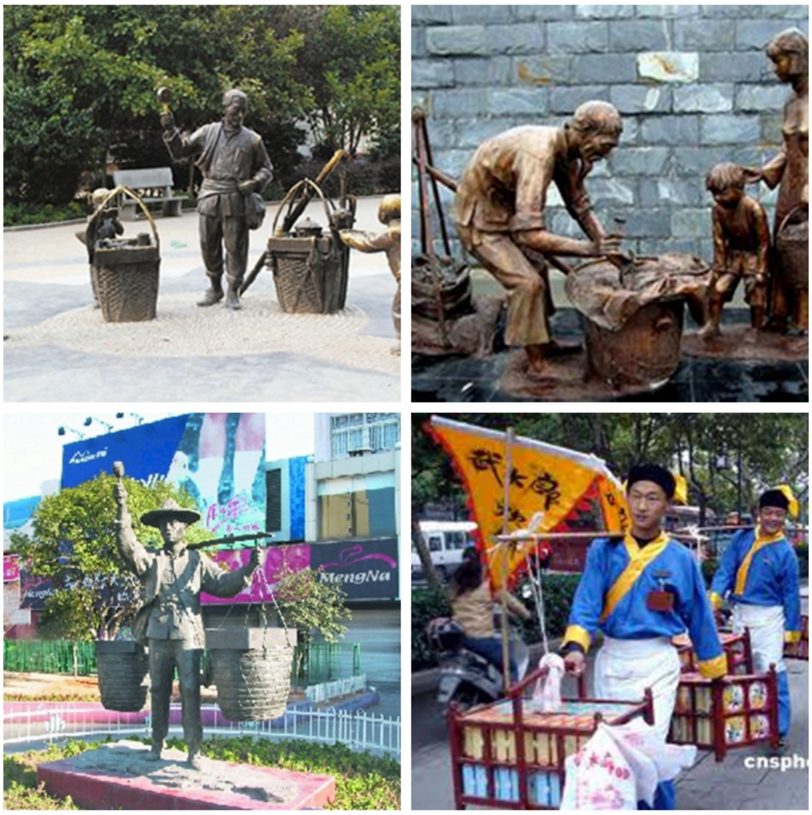

图 3 雕塑及旅游景点《货郎担》

在中国漫长历史的长河中,“货郎担”出现在历代许多文学和绘画作品中.[1]

“货郎担”一词最早出现在元朝(1271−1368年)王晔(生卒年未详)的《桃花女》楔子:“我待绣儿朵花儿, 可没针使, 急切里等不得货郎担儿来买.”后来,“货郎担”一词出现在许多著名的文学作品中. 如元末明初的文学家施耐庵(1296−1370年)和罗贯中(约1330−约1400年)合著的《水浒传》第七四回:“你既然装做货郎担儿, 你且唱个山东《货郎转调歌》与我众人听.”明朝刘若愚(1584年−?)《酌中志·内臣职掌纪略》:“又御用监武英殿画士, 所画锦盆堆则名花杂果,或货郎担则百物毕陈.”现代作家丁玲(1904–1986年)《太阳照在桑干河上》四:“这边树底下也常歇下来一两副货郎担, 或是卖西瓜的.”

“货郎担”绘画最早出现在北宋末期著名画家张择端(1085−1145年)绘制的《清明上河图》中, 其中有两副货郎担子(见图 4). 宋朝(1127−1279 年)绘画中有数幅《货郎担图》, 其中最为著名的是南宋画家李嵩(1166−1243) 的《货郎担图》(见图 5), 它生动描绘了货郎担挑着小百货走街串巷的场景. 金代 (1115−1234年) 有《乾坤一担图》, 明代(1368−1644年)也有《货郎担图》.

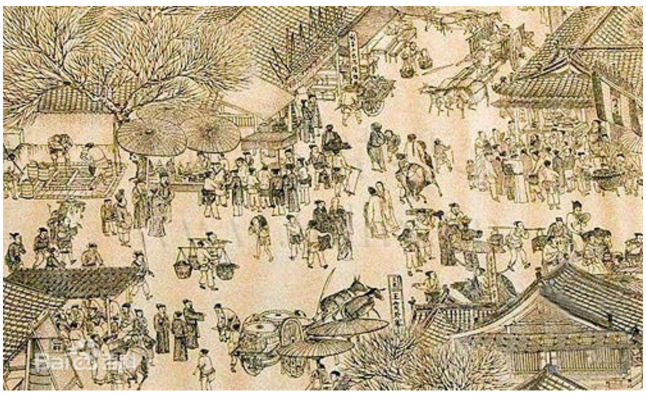

图 4: 北宋·张择端清明上河图(局部, 开封市中心街景)

[1]有关资料来自百度网页, 其真实性有待进一步考证.

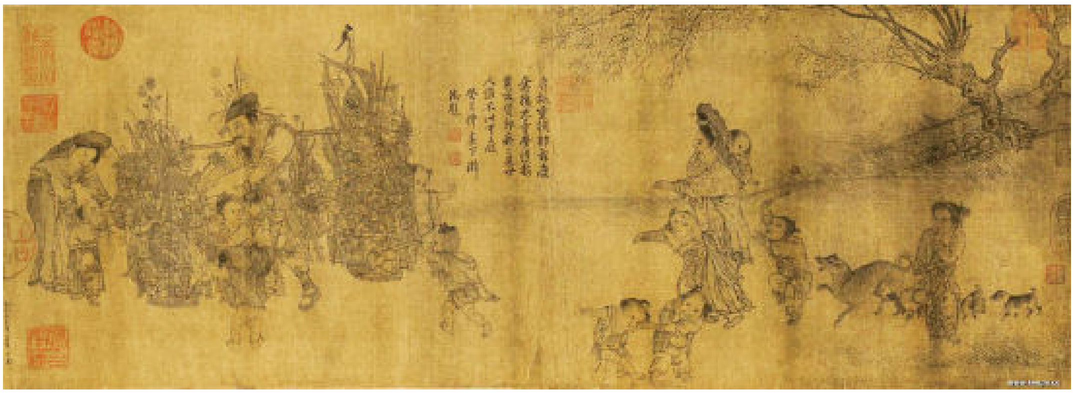

图 5　南宋画家李嵩的《货郎担图》

§5.2　货郎担问题

一位货郎担着商品去他所在的区域内所有村镇进行推销. 他应怎样选择一条总路程最短的行走路线使每个村镇至少去一次, 然后回到出发点? 这个问题称为**货郎担问题**.

经过 G 中每个顶点至少一次的闭链称为**货郎链**. 用图论语言, 货郎担问题就是在给定的连通加权图 $(G,\mathbf{w})$ 中 (其中 $\mathbf{w}$ 是距离函数) 寻找一条权和最小的货郎链, 称为**最优链**. 显然, 如果这条最优链经过每个村镇恰好一次, 那么这条链就是具有最小权和的 Homilton 圈.

旅行推销员问题 (traveling salesman problem)[2] 是: 给定 n 城市和它们之间的距离, 求一条经过每个城市恰好一次且路程最短的旅行路线. 用图论语言, 旅行推销员问题是在给定的完全加权图 $(K_n,\mathbf{w})$ 中 (其中 $\mathbf{w}$ 是距离函数) 寻找一条权和最小的 Hamilton 圈, 称这条圈为**最优圈**.

货郎担问题和旅行推销员问题的根本区别和关系是: 货郎担问题考虑的加权图是一般的连通图, 而旅行推销员问题考虑的加权图仅是完全图. 因此, 货郎担问题是旅行推销员问题的推广形式. 换句话说, 旅行推销员问题是货郎担问题的特殊情形. 旅行推销员问题的解是一条最优圈 (因为 G 是完全图), 而货郎担问题的解不一定有 Hamilton 圈 (因为 G 不一定是完全图). Karp[3] 证明了旅行推销员问题是 NP 完备的. 因而, 货郎担问题也是 NP 完备的. 存在许多多项式近似算法解决旅行推销员问题.

解决货郎担问题的关键是将货郎担问题转换成旅行推销员问题— 本节的重点.

基本方法: 对于连通加权图 $(G,\mathbf{w})$, 构造加权完全图 $(K_v,\mathbf{w}')$, 其中 $V(K_v)=V(G)$, K_v 中边 xy 的权 $\mathbf{w}'(xy)$ 定义为 G 中 x 和 y 的 (加权) 距离 $\mathbf{w}(x,y)$. $(K_v,\mathbf{w}')$ 满足三角不等式, 且 K_v 中边 xy 对应 G 中边 xy 使 $\mathbf{w}'(xy)=\mathbf{w}(xy)$ 或者 xy 路 P 使 $\mathbf{w}'(xy)=\mathbf{w}(P)$.

基本定理: 连通加权图 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链对应 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最优圈且权相等. 反之, $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最优圈对应 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链且权相等.

由基本定理知, 求一般加权图 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链可以归结为求满足三角不等式的加权图 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最优圈. 若 $(G,\mathbf{w})$ 满足三角不等式, 则 G 是 K_v 的支撑子图, $\mathbf{w}=\mathbf{w}'|E(G)$. 因此, 若 $(G,\mathbf{w})$ 满足三角不等式且有最优圈 C, 则 C 必是 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中 Hamilton 圈, 且 $\mathbf{w}(C)\geqslant\mathbf{w}'(C)=\mathbf{w}(C'')$, 其中 C'' 是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链. 反之, 设 C' 是 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最优圈. 若 $C'\subseteq G$, 则 C' 也是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优圈; 若 $C'\subseteq G$, 则与之对应的 C'' 是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链, 而且 $\mathbf{w}(C'')=\mathbf{w}'(C')$. 因此, 当 $(G,\mathbf{w})$

[2] A. Schrijver, On the history of combinatorial optimization (till 1960). Handbook of Discrete Optimization (K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel, eds.), Elsevier, Amsterdam, 2005, pp. 1–68.

[3] R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems. in R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, 1972, pp. 85-103.

满足三角不等式, 则与 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最优圈对应的可能是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链, 也可能是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优圈. 但是, 当 $(G,\mathbf{w})$ 不满足三角不等式, 则与 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最优圈对应的是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链, 而不是最优圈.

§5.3 解货郎担问题的算法

目前, 解货郎担问题的最好算法是 N. Christofides (1976)[4] 的 $\frac{3}{2}$ 近似算法.

Christofides 近似算法

1. 求 $(G,\mathbf{w})$ 的加权距离矩阵 $\mathbf{w}'$, 并构造 $(K_v,\mathbf{w}')$.
2. 求 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中最小树 T.
3. 找出 T 中奇度点集 V' 并求出 $G'=K_v[V']$ 中最小权完备匹配 M.
4. 在 $G^*=T\oplus M$ 中求 Euler 回 $C_0=(x,y,z,\cdots,x)$.
5. 从 x 开始, 沿 C_0 依次删去 C_0 中重复出现的顶点 (最后一个 x 除外) 后, 剩余的顶点 (不改变它们在 C_0 中的顺序) 形成 K_v 中 Hamilton 圈 C, C 即为所求的近似最优圈.

对算法的注释

该算法第 1 步利用 Moore-Dijkstra 算法 (见 2.7 节), 并将 $(G,\mathbf{w})$ 中的货郎担问题转化为 $(K_v,\mathbf{w}')$ 中的旅行推销员问题（以下几步事实上是解旅行推销员问题）.

第 2 步利用 Prim 算法求 $(K_v,\mathbf{w}')$ 最小树 (见 2.6 节).

第 3 步中的 $V'\neq\emptyset$, 而且由推论 1.3.2 知 $|V'|$ 为偶数. 由于 $G'=K_v[V']$ 是偶阶完全图, 利用 5.4 节中的 Kuhn-Munkres 算法(注意这个算法用到求 2 部图最大匹配的匈牙利算法) 求 G' 中的最小权完备匹配.

在第 4 步中, G^* 中顶点都是偶度点, 故为 Euler 图. 利用 Edmonds-Johnson 算法 (见 4.6 节, 用到网络流理论), 求出 G^* 的 Euler 回 C_0.

第 5 步构造出 K_v 中的 Hamilton 圈 C, 即为所求的近似解.

综上所述, Christofides 算法几乎用到前面学过的所有知识和算法, 说明了图论概念之间的相互联系. 同时也说明作者对选用材料的处理和安排，充分体现了图论作为数学一部分的系统性和科学性.

§5.4 对某专家评论的回答

该书的英文版《A First Course in Graph Theory》[5]出版时, 作者曾收到一位专家的评论:“货郎担问题放在第五章似乎与匹配与独立集关系不大”. 对于这样的评论, 作者无言以答, 甚至怀疑这位专家就根本不知晓解货郎担问题的 Christofides 算法.

事实上, 从上述对算法的注释不难发现, Christofides 近似解法与匹配理论有密切的关系, 而且在对 Christofides 解法为 $\frac{3}{2}$ 近似算法的证明中也用到匹配理论. 请问: 货郎担问题不放在这一章, 应该放在哪一章?

---

[4]N. Christofides, Worst case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. *Technical Report*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Melon University, Pittsburgh, PA 1976.

[5]Xu Junming, A First Course in Graph Theory (图论基础教程), 科学出版社, 北京, *2015* 年 *3* 月.