

国家自然科学基金资助项目
《计算机科学中的若干组合问题研究》
暨《2013-2019 年期间研究成果》
研究工作主要进展和成果总结报告

(2013.01-2016.12. 项目编号: 61272008)

项目负责人: 徐俊明

中国科技大学数学科学学院, 合肥, 230026

xujm@ustc.edu.cn

说 明

在 2013-2019 年期间, 笔者主持国家自然科学基金资助项目《计算机科学中的若干组合问题研究》(2013-2016)。在此项目结题之后, 作为成员, 笔者有幸参与由徐敏主持的国家自然科学基金资助项目《计算机通信网络容错诊断与可靠性分析研究》(11571044)。笔者承担的部分恰是前一个项目研究内容的继承和发展。

7 年来, 本课题组共完成学术论文 45 篇; 两篇学术专题综述文章《*The forwarding indices of graphs - a survey*》和《*On bondage numbers of graphs - a survey with some comments*》; 出版英文专著 2 部《*Combinatorial Theory in Networks*》和《*A First Course in Graph Theory*》, 修订图论教材《图论及其应用》(第 4 版)。

这个报告介绍本课题组在这 7 年期间取得的主要学术研究成果, 由两部分组成。第一部分是笔者主持的国家自然科学基金资助项目《计算机科学中的若干组合问题研究》和笔者参与的《计算机通信网络容错诊断与可靠性分析研究》(笔者承担部分)的结题报告中“研究工作主要进展和成果总结报告”的扩展版。第二部分是本课题组在 2013 年至 2019 年间完成的其它科学研究工作。

公布这份报告, 其目的有二: 一是接受同行对国家自然科学基金资助项目执行和完成情况的监督; 二是借此机会好好总结一下 7 年来的研究工作, 也使同行了解和分享我们课题组研究内容、进展和成果。同时也会发现可供进一步研究的问题。

目 录

第一部分 项目《计算机科学中的若干组合问题研究》研究成果	4
§1 给定超边连通度的点可迁图存在性	4
§1.1 已知结果、猜想和问题	5
§1.2 Cayley 图	7
§1.3 群的半直积	9
§1.4 图的替代乘积	10
§1.5 Cayley 图的替代乘积	13
§1.6 替代乘积图的边连通度	14
§1.7 替代乘积图的限制边连通度	15
§1.8 给定限制边连通度的点可迁图存在性	16
§2 网络的高容错性研究	17
§2.1 图的超 h 连通度和强 h 连通度	17
§2.2 星图和 (n, k) 星图的 h 超连通度	19
§2.3 (n, k) 排列图的紧超连通性	23
§2.4 立方体型网络的 h 超边连通度	24
§2.5 对偶立方和交换超立方体的 h 超连通度	26
§2.6 分层立方网络	27
§2.7 增广立方体网络的 2 强连通度	29
§2.8 由对换生成的 Cayley 图	30
§2.9 递归网络的嵌入连通度	32
§2.10 字典乘积和直积图的连通度	33
§2.11 有向图的 k 连通和超连通性	35
§3 网络故障诊断研究	36
§3.1 泡泡序列网络在 PMC 模型下的条件容错诊断度	36
§3.2 网络故障在比较模型下的条件诊断研究	37
§3.3 (n, k) 排列图的条件诊断度	38
§3.4 条件诊断度与强 2 连通度的关系	39
§3.5 主要结果的应用	40
§3.6 在 PMC 模型下 t/t 诊断度与强连通度的关系	42
§4 网络强边容错度的脆弱性研究	43
§4.1 图的强边连通的持久度	43
§4.2 一般图持久度的下界	44
§4.3 正则图的持久度	44
§4.4 置换图的持久度	46
§4.5 笛卡尔乘积图的持久度	47

§5 网络容错嵌入研究	49
§5.1 变型超立方体网络的边可迁性和路圈嵌入	49
§5.2 容错超立方体网络不交路	51
§6 网络直径与宽直径研究	53
§6.1 Kronecker 乘积图的直径与图的本源指数	53
§6.2 正则图的宽直径	54
§6.3 强超立方体的宽直径和容错直径	55
第二部分 2013-2019 年期间其它研究成果	57
§7 控制数与约束数研究	57
§7.1 正则图和平面图的控制数研究	57
§7.2 超环面网络的全控制数和成对控制数	58
§7.3 完全 t 部图的 p 控制数	59
§7.4 Roman 控制数及约束数的研究	60
§7.5 符号边控制色数与 Hadamard 矩阵	61
§7.6 广义控制数与独立数研究	63
§8 p 加强数的研究	64
§8.1 p 加强数的复杂性	64
§8.2 某些特殊图的 p 加强数	65
§9 Caccetta-Häggkvist 猜想研究	66
§9.1 有向图的边反圈数	66
§9.2 Caccetta-Häggkvist 猜想	67
§9.3 Seymour 第二邻域猜想	68
§10 图的 Pebbling 数	70
§10.1 路和圈的最优 t -pebbling 数	70
§10.2 笛卡尔乘积图的 pebbling 数	71
§11 附录: 发表的学术论文和著作	72

第一部分 项目《计算机科学中的若干组合问题研究》研究成果

摘 要

本项目研究出现在理论计算机科学中的若干图论问题. 图的各种各样条件连通度和直径是度量网络容错性和有效性的重要参数. 网络故障是不可避免的, 研究故障诊断, 和由网络故障引起的各种性质和度量参数变化是网络理论研究的重要课题. 本项目通过图的替代乘积和群的半直积构造 Cayley 图, 弄清了给定限制边连通度的点可迁图的存在性, 解决了困扰 10 多年的问题; 确定了许多著名网络 (如星网络、 (n, k) 星网络、超立方体型网络、对偶立方、交换超立方体网络和分层立方网络等) 的高阶超点和 (或者) 超边连通度; 弄清了在限制条件下的故障诊断数与 2 强点连通度之间的密切关系, 从而确定了许多著名网络在限制条件下的诊断数或者 2 强点连通度; 研究了具有递归结构网络的嵌入连通度, 确定了若干网络 (如超立方体、星图等) 嵌入点连通度和嵌入边连通度; 研究和确定了正则图、置换图、笛卡尔乘积图等 的 2 强边连通度的脆弱性 (即持久度); 证明了变形超立方体网络的点可迁性和圈、路容错嵌入; 利用图的本原指数, 确定了直积图的直径; 研究正则图宽直径并且确定了强超立方体网络的容错直径何宽直径. 本项目按照预期研究内容顺利进行, 完成预期研究任务, 并达到预期研究目标. 本项目共完成学术论文 25 篇, 发表 23 篇, 其中标注本项目编号 61272008 的 17 篇. 这些研究成果大大丰富和完善了组合网络理论, 为分析网络性能提供进一步的理论依据.

§1 给定超边连通度的点可迁图存在性

从所周知, 图论是研究网络的最有力的数学工具, 因为网络的拓扑结构可以用图来表示, 其中图的顶点表示网络中的处理器等元件, 图的边表示网络元件之间的连线. 网络的容错性是由对应图的点连通度 κ 或者边连通度 λ 来度量. 为了更深入研究网络的容错性, Boesch 等人^[1] 于 1981 年提出超连通图的概念. 如果图 G 的每个最小顶点割 (或边割) 都能分离一个顶点, 则称 G 为超 κ 连通的 (super- κ connected) (或超 λ 连通的 (super- λ connected)). 这些概念曾掀起上世纪 80 年代新一轮对图的连通度研究热潮.

与此同时, Harary^[2] 提出条件连通度 (conditional connectivity) 概念 (本文 §2.1 将做进一步讨论); Esfahanian 和 Hakimi^[3] 将条件具体化, 提出的限制连通度 (restricted connectivity) 概念. 但当时, 这两个连通度概念没有得到图论界的积极响应, 因而它的研究没有得到任何实质性进展. 直到上世纪末和本世纪初, 中国科学技术大学组合与图论课题组在李乔教授的带领下直接介入条件连通度研究. 从此以后, 国内外图论学者和网络理论工作者也加入研究, 不断将条件连通性研究推向高潮, 至今不衰, 这是一件值得荣耀和自豪的事情. 关于图的连通度研究有两篇综述文献可以参考, 早期研究结果见 Mader^[4] 和近期研究结果见 Hellwig 和 Volkmann^[5].

¹Bauer, D., Boesch, F., Suffel, C. and Tindell, R., Connectivity extremal problems and the design of reliable probabilistic networks. The theory and application of graphs. Y. Alavi and G. Chartrand (Editors), Wiley, New York (1981), 89-98.

²Harary, F., Conditional connectivity. Networks, 13 (3) (1983), 346-357.

³Esfahanian, A. H., and Hakimi, S. L., On computing a conditional edge-connectivity of a graph. *Information processing Letters*, 27 (1988), 195-199.

⁴Mader W. Connectivity and edge connectivity in finite graphs. *London mathematical Lecture. Note Series*, 38(1979), 66-95

⁵Hellwig, A. and Volkmann, L., Maximally edge-connected and vertex-connected graphs and digraphs-A survey. *Discrete Mathematics*, 308 (15) (2008), 3265-3296.

由图的超连通性概念,很自然地提出一个问题:从超 κ 连通(或超 λ 连通)图 G 中移去多少个顶点(或多少条边)才会使 G 不连通并且每个连通分支都不是孤立点.在此背景下,图的超连通度和超边连通度的概念被提了出来.

设 $G = (V, E)$ 是连通图, $F \subset V(G)$ (或者 $F \subset E(G)$).如果 $G - F$ 不连通且 $\delta(G - F) \geq 1$,那么称 F 为 G 的超点割(或者超边割). G 的超点连通度(super connectivity) $\kappa_s(G)$ (或者超边连通度(super edge-connectivity) $\lambda_s(G)$)定义为最小超点割中的点数(或者最小超边割中的边数).

图的超连通度概念是在文献^[6]中被正式提出来,它与Esfahanian和Hakimi^[3]提出的限制连通度(restricted connectivity)有点区别.在限制连通度 $\kappa_r(G)$ (或者限制边连通度 $\lambda_r(G)$)的概念中,它限制每个顶点的邻点集都不包含在任何限制点割中(或者限制与某个顶点关联的边集不包含在任何限制边割中).

从定义可知,超边割与限制边割这两个概念没有什么区别,即对任何连通图 G ,超边连通度 $\lambda_s(G)$ 与限制边连通度 $\lambda_r(G)$ 是一样的,即 $\lambda_s(G) = \lambda_r(G)$.因此,许多文献中只提限制边连通度,很少提及超边连通度.事实上,许多有关限制边连通度结果的证明中,无形中采用了超边连通度定义.

然而,超点割与限制点割这两个概念却有很大区别.例如,考虑图1所示的图 G ,它有唯一的超点割 $F = \{x_2, x_5, x_7\}$ (但它不是限制点割,因为 x_7 的邻点集 $\{x_2, x_5\} \subset F$).因此, $\kappa_s(G) = 3$.但 G 中没有限制点割.因此, $\kappa_r(G)$ 不存在.容易看到, G 的限制点割一定是超点割.所以,如果 $\kappa_r(G)$ 存在,那么 $\kappa_s(G)$ 必存在,而且 $\kappa_s(G) \leq \kappa_r(G)$.反之,如果 $\kappa_s(G)$ 不存在,那么 $\kappa_r(G)$ 也一定不存在.

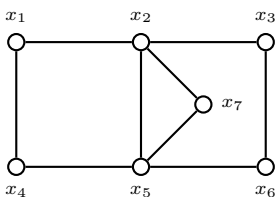


图1 $\kappa_s(G) = 3$, 而 $\kappa_r(G)$ 不存在

本节关心的是图的超(或者限制)边连通度,按照通常文献中的习惯,这里还是采用“限制边连通度”一词,并记为 $\lambda'(G)$.显然,星 $K_{1,n}$ 和完全图 K_3 的限制边连通度 λ' 不存在.设 G 是连通图,如果 G 既不是 $K_{1,n}$ 也不是 K_3 ,则称 G 为 λ' 连通图.因此,如果 G 是 λ' 连通图,那么它的阶至少是4,而且Esfahanian和Hakimi^[3]证明了 $\lambda'(G)$ 的存在性.

命题 1.1 对任何 λ' 连通图 G ,

$$\lambda(G) \leq \lambda'(G) \leq \xi(G),$$

其中 $\lambda(G)$ 是 G 的边连通度, $\xi(G)$ 是 G 的最小边度,即 $\xi(G) = \min\{d_G(x) + d_G(y) : xy \in E(G)\} - 2$.

图 G 称为 λ' 优的,如果 $\lambda'(G) = \xi(G)$;否则称为非 λ' 优的.

§1.1 已知结果、猜想和问题

这一节回顾一下与点可迁图的限制边连通度有关结果、猜想和问题.

对于点可迁连通图 G , $\lambda(G) = \delta(G)$,其中 $\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别是 G 的边连通度和最小度.

⁶徐俊明,吕敏,马美杰, Hellwig, A., Super Connectivity of Line Graphs. Information Processing Letters, 94 (4) (2005), 191-195.

循环图 $G(n; \pm S)$, 其中 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ 且 $0 < s_1 < \dots < s_k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 顶点集为 $\{0, 1, \dots, n-1\}$, 边集为 $\{ij : \text{存在某个 } t \text{ 使得 } |j - i| \equiv s_t \pmod{n}\}$.

循环图 (circulant graph) 最早出现在文献^[7]中, 其主要研究内容之一是: 对于给定的 $k \geq 1$, 怎样选取 S 使得 $G(n; \pm S)$ 有最小直径. 容易证明: 循环图是点可迁, 正则度为 $2k$ 如果 $a_k \neq \frac{n}{2}$, 否则为 $(2k-1)$ 正则的. 对于循环图的限制边连通度, 李乔良和李乔^[8] 获得如下结果.

命题 1.2 $\lambda'(G(n; \pm S)) = \xi(G(n; \pm S)) = 4k - 2$, 其中 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ 且 $1 \leq s_1 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$, $k \geq 2$.

对于一般点可迁图的限制边连通度, 2002 年, 徐等人^[9] 获得下述结果.

命题 1.3 设 G 是 $n (\geq 4)$ 阶点可迁连通图, 正则度 $d (\geq 2)$. 则

- (a) 如果 n 是奇数, 或者 G 不含三角形, 那么 $\lambda'(G) = \xi(G) = 2d - 2$; 或者
- (b) 存在整数 $m (\geq 2)$ 使得 $d \leq \lambda'(G) = \frac{n}{m} \leq 2d - 3$.

推论 1.4 (Esfahanian¹⁰, 1989) 对于超立方体 Q_n ($n \geq 2$), $\lambda'(Q_n) = \xi(Q_n) = 2n - 2$.

从命题 1.3 立即知: 对于 n 阶 d 度点可迁连通图 G , 如果它是非 λ' 优的, 那么

$$d \leq \lambda'(G) \leq \frac{n}{2} \leq 2d - 3.$$

网络文章《组合网络理论研究的回顾与思考》^[11] 曾猜想:

猜想 1.5 对于 n 阶 d 度点可迁连通图 G , 如果 $d < \lambda'(G) < \xi(G)$, 那么 $\lambda'(G) = \frac{1}{2}n$.

1997 级少年班李雷在做本科毕业论文时, 曾试图攻克猜想 1.5, 未成功, 但获得如下结果^[12]:

命题 1.6 对于给定的整数 d 和 s , $d \geq 3$ 且 $0 \leq s \leq d - 3$, 存在 d 度点可迁连通图 G 使得 $\lambda'(G) = d + s \Leftrightarrow d$ 是奇数或者 s 是偶数.

李雷还构造了一类点可迁连通图 G 使得 $\lambda'(G) = \frac{1}{2}|V(G)|$. 对给定的整数 s 和 $m (\geq 1)$, 令

$$G_0 = \begin{cases} G(k + s; \pm\{1, 2, \dots, m\}), & \text{若 } k = 2m + 1, \\ G(k + s; \pm\{1, 2, \dots, m - 1, m + \frac{1}{2}s\}), & \text{若 } k = 2m \text{ 且 } s \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

并令 G 是 G_0 和完全图 K_2 的笛卡尔乘积, 即 $G = G_0 \square K_2$ (在这篇文章中, 我们将用符号 \square 表示图的笛卡尔乘积). 那么 G 是点可迁的, 而且 $\lambda'(G) = v(G_0) = k + s = \frac{1}{2}|V(G)|$.

命题 1.3 (b) 中 $\lambda'(G) = \lambda(G)$ 的点可迁图 G 也是存在的. 事实上, 李雷获得如下结果:

⁷Wong, C. K., and Coppersmith, D., A combinatorial problem related to multimodule memory organization. *Journal of Association for Computing Machinery*, 21 (3) (1974), 392-401.

⁸Li, Q. L. and Li, Q., Reliability analysis of circulant graphs. *Networks*, 31 (2) (1998), 61-65.

⁹Xu, J.-M. and Xu, K.-L., On restricted edge-connectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, 243 (1-3) (2002), 291-298.

¹⁰Esfahanian, A. H., Generalized measures of fault tolerance with application to n -cube networks. *IEEE Transactions on Computers*, 38 (11) (1989), 1586-1591.

¹¹<http://staff.ustc.edu.cn/~xujm/essay2003b.pdf>, 2003.

¹²Li, L. and Xu, J.-M., On restricted edge-connectivity of vertex-transitive graphs. *中国科学技术大学学报*, 33 (3) (2004), 266-272.

命题 1.7 设 G 是非 λ'_s 优的点可迁连通图, 正则度 $d (\geq 3)$. 则

$$\lambda'(G) = d \Leftrightarrow G \text{ 包含 } d \text{ 阶完全子图 } K_d.$$

例如, $G = K_n \square K_2$, 就有 $\lambda_s(G) = \lambda(G) = n = \frac{1}{2}|V(G)|$.

解决任何猜想都可以从两个方面来进行. 一方面是直接证明猜想; 另一方面是构造例子否定猜想.

构造点可迁图有两种常用方法, 一是利用 Cayley 图, 二是利用图的运算. Cayley 图是点可迁的, 有一些关于 Cayley 连通度的结果^[13], 但目前还没有关于 Cayley 的限制边连通度更进一步的结果. 因为点可迁图 (Cayley 图) 的笛卡尔乘积仍为点可迁图 (Cayley 图), 因此研究笛卡尔乘积图的限制边连通度引起人们的极大兴趣.

吕敏 (2002 级博士生) 在读博和博士后期间, 以及徐喜荣 (2003 级博士后) 也曾试图证明猜想 1.5, 也未成功; 也试图否定猜想 1.5, 即寻找点可迁图 G 使得 $\lambda(G) < \lambda'_s(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$, 但没有找到例子. 在此研究过程中, 吕敏获等人得笛卡尔乘积图和广义笛卡尔乘积图超连通度的若干结果^[14,15,16]. 可以相信还有其他学者也研究过猜想 1.5, 只是没有成功, 未见相关报道罢了, 但有许多文献在研究点可迁图和笛卡尔乘积图的限制边连通度.

10 年来, 猜想 1.5 一直是悬在我们课题组心中的问题, 先后投入大量研究力量, 均没有解决. 2012 年底, 我们在申请国家自然科学基金项目《计算机科学中的若干组合问题研究》时, 将它列为该项目第一个需要解决的问题, 由博士研究生洪振木主要承担这方面的研究.

在该项目执行过程中, 我们仔细研究先前工作后认为: 既然证明不了猜想 1.5, 是否可以怀疑猜想 1.5 的正确性. 由命题 1.6, 如果 $d = 3$, 那么 $s = 0$. 结合命题 1.3, 命题 1.6 和命题 1.7, 我们在该项目的研究中提出更一般的研究问题.

问题 1.8 给定奇数 $d (\geq 5)$ 和任意整数 $s (1 \leq s \leq d - 3)$, 是否存在 n 阶 d 度点可迁连通图 G 使得 $\lambda'(G) = d + s < \frac{1}{2}n$.

直接构造点可迁图是不容易的, 但由于 Cayley 图是点可迁的, 通过 Cayley 图来构造点可迁图是自然的. 构造 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 的关键是找到一个合适的群 Γ 和它的生成集 S . 已经知道: Cayley 图的笛卡尔乘积仍为 Cayley 图. 既然无法从笛卡尔乘积来构造出反例, 是否可以尝试利用其他图论运算来寻找反例. 什么样的图论运算才能保证它们的 Cayley 性质呢?

洪振木 (2011 级博士生) 在读博期间试图攻克问题 1.8. 通过不断的摸索和反复验证, 终于成功了! 以下介绍这个研究成果和解决这个问题整个思路和过程.

§1.2 Cayley 图

回顾一下 Cayley 图. 设 $\Gamma = (X, \circ)$ 是有限群, $S \subset X$ 且不含 Γ 的单位元. 群 Γ 关于集 S 的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 有顶点集 X 和边集 $\{(x, y) : x^{-1} \circ y \in S, x, y \in X\}$.

¹³Tindell, R., Connectivity of Cayley Graphs. In Combinatorial Network Theory (D.Z. Du and D.F. Hsu, eds.), pp. 41-64, Kluwer Academic Publishers, 1996.

¹⁴Lü, M., Chen, G.-L. and Xu, J.-M., On super edge-connectivity of Cartesian product graphs. Networks, 49 (2006), 135-157.

¹⁵Lü, M., Wu, C., Chen, G.-L. and Lü, C., On super connectivity of Cartesian product graphs. Networks, 52 (2008), 78-87.

¹⁶Lü, M., Chen, G.-L. and Xu, X.-R., On super edge-connectivity of product graphs. Applied Mathematics and Computation, 207 (2009), 300-306.

例子 1.9 循环图 $G(n; S)$ 是 Cayley 图.

考虑 $n (\geq 2)$ 阶循环群 \mathbb{Z}_n , 0 是单位元, $i^{-1} = n - i = -i$. 如果 $S = \{1\}$, 那么当 $n = 2$ 时, $S^{-1} = S$; 当 $n \neq 2$ 时, $S^{-1} \neq S$. 因此 Cayley 图 $C_{\mathbb{Z}_2}(\{1\}) = K_2$, $C_{\mathbb{Z}_n}(\{1\})$ 是长为 $n (\geq 3)$ 的有向圈 C_n , 而 $C_{\mathbb{Z}_n}(\{1, n-1\})$ 是长为 $n (\geq 3)$ 的无向圈 C_n .

一般地, 若 $S \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}, n \geq 3$, 则当 $S^{-1} \neq S$ 时, Cayley 图 $C_{\mathbb{Z}_n}(S)$ 是循环有向图 $G(n; S)$; 而当 $S^{-1} = S$ 时是循环无向图 $G(n; \pm S)$.

一般说来, Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是有向图. 如果 $S = S^{-1}$, 那么 $C_\Gamma(S)$ 是无向图. 下面的结论是众所周知的 (参见《组合网络理论》^[19] 中定理 4.4.1.).

命题 1.10 Cayley 图是点可迁图, 并且 Cayley 图的笛卡尔乘积仍是 Cayley 图. 更精确地讲, 设 $G_i = C_{\Gamma_i}(S_i)$ 是有限群 $\Gamma_i = (X_i, \circ_i)$ 关于集 S_i 的 Cayley 图, 那么 $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$ 是群 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n$ 关于集

$$S = \bigcup_{i=1}^n \{e_1 \dots e_{i-1}\} \times S_i \times \{e_{i+1} \dots e_n\},$$

的 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, 其中 e_i 是 Γ_i 的单位元, $i = 1, 2, \dots, n$.

例子 1.11 超立方体 Q_n 是 Cayley 图.

考虑群 $\Gamma = (\mathbb{Z}_2)^n = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$, 其运算定义为:

$$(x_1 \dots x_n) \circ (y_1 \dots y_n) = (x_1 + y_1)(\text{mod } 2) \dots (x_n + y_n)(\text{mod } 2),$$

其中 $x_i, y_i \in \{0, 1\}$, $e_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. 令

$$S = \bigcup_{i=1}^n \{e_1 \dots e_{i-1}\} \times S_i \times \{e_{i+1} \dots e_n\} \\ = \{100 \dots 00, 010 \dots 00, \dots, 000 \dots 01\},$$

其中 $S_i = \{1\}, i = 1, 2, \dots, n$. 不难看出 S 中所有元素都是自逆的, 即有 $S^{-1} = S$. 于是, Cayley 图 $C_\Gamma(S)$ 是无向图, 由命题 1.10 知, 这个图是 $K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$. 它就是超立方体 Q_n .

例子 1.12 n 维立方连通圈 CCC_n 是 Cayley 图.

n 维立方连通圈 (cube-connected cycle^[17]) CCC_n . 从直观上看, $CCC_1 = K_2 = Q_1$; $CCC_2 = C_8$, 它可以看作是由超立方体 Q_2 并将它的每个顶点替换成 K_2 而得到的图. 对于 $n \geq 3$, CCC_n 是由超立方体 Q_n 并将它的每个顶点替换成圈 C_n 而得到的图. 图 2 中所示的是 CCC_3 . 超立方体 Q_n 和圈 C_n 都是 Cayley 图, 做上述替代后得到立方连通圈 CCC_n 仍是 Cayley 图. 事实上, 设 $\Gamma = (\mathbb{Z}_2)^n \times \mathbb{Z}_n, S = \{(00 \dots 0; 1), (00 \dots 0; n-1), (10 \dots 0; 0)\}$, 那么 $CCC(n)$ 是 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$. 证明属于 Carlsson 等人^[18] (也可以参见《组合网络理论》^[19] 中的例子 3.5.3.), 方法有点独特, 没有用到图的替代结构.

¹⁷Preparata, F. P. and Vuillemin, J., The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation. Communications of the Association for Computing Machinery, 24 (5) (1981), 300-309.

¹⁸Carlsson, G. E., Cruthirds, J. E., Sexton, H. B., and Wright, C. G., Interconnection networks based on a generalization of cube-connected cycles. IEEE Transactions on Computers, 34 (8) (1985), 769-772.

¹⁹徐俊明, 组合网络理论. 北京: 科学出版社, 2007 年 5 月.

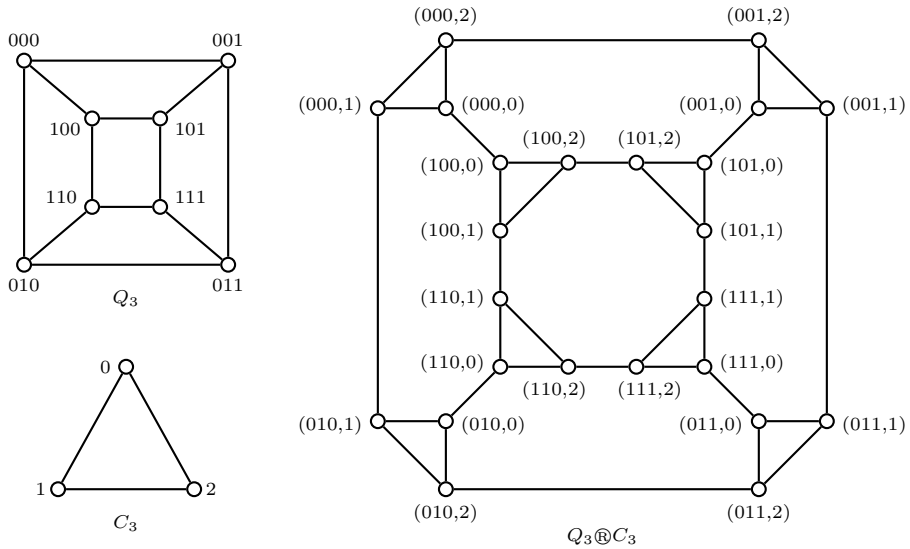


图 2 3 维立方连通圈网络 $CCC_3 = Q_3 \otimes C_3$.

替代乘积图的构图方法也以不同的名称出现在献中, 例如, Dunbar 和 Haynes^[20], Favaron^[21,22] 研究过膨胀图 (inflation or inflated graph). 图 G 的膨胀图是把 G 的每个顶点 x 替换成完全图 $K_{d_G(x)}$. Alon 等人^[23] 和 Hoory 等人^[24] 直接提到并研究过替代乘积 (replacement product) 图, 并断定两个 Cayley 图的替代乘积图仍是 Cayley 图. 他们在陈述这个结果时用到两个概念: 两个群的半直积和两个图的替代乘积.

§1.3 群的半直积

首先回顾群的半直积 (semidirect product) 和一些相关的群论概念.

设 $A = (A, \circ)$ 和 $B = (B, *)$ 是两个群. 从 A 到 B 的群同态 (group homomorphism) 是映射 $\phi: A \rightarrow B$ 满足 $\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b)$. 群 B 在群 A 上的作用 (action) 是群同态 $\phi: B \rightarrow \text{Aut}(A)$ 满足 $\phi(b) = \phi_b$ 且 $\phi(b_1 b_2) = \phi(b_1) \phi(b_2) = \phi_{b_1} \phi_{b_2}$, 其中 $\text{Aut}(A)$ 是 A 的自同构群.

群同态的两个重要性质对我们的主要结果的证明非常有用.

命题 1.13 设 A 和 B 是两个有限群, e_A 和 e_B 分别是 A 和 B 的单位元, ϕ 是从 A 到 B 的群同态. 则

- (a) $\phi(e_A) = e_B$;
- (b) $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$ 对每个 $a \in A$.

在 B 的作用 ϕ 下, $a \in A$ 的轨道 (orbit) 是集 $a^B = \{\phi_b(a) \in A : b \in B\}$.

²⁰Dunbar, J. E. and Haynes, T.W., Domination in inflated graphs, Congr. Numer. 118 (1996), 143-154.
²¹Favaron, O., Irredundance in inflated graphs. Journal of Graph Theory, 28(2)(1998), 97-104.
²²Favaron, O., Inflated graphs with equal independence number and upper irredundance number. Discrete Mathematics, 236(1-3) (2001), 81-94.
²³Alon, N., Lubotzky, A. and Wigderson, A., Semi-direct product in groups and zig-zag product in graphs: connections and applications (extended abstract). In 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (Las Vegas, NV, 2001), pp. 630-637. IEEE Computer Society, 2001.
²⁴Hoory, S., Linial, N. and Wigderson, A., Expander graphs and their applications. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 43 (4) (2006), 439-561.

例子 1.14 设 $A = (\mathbb{Z}_2)^n = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$, $B = \mathbb{Z}_n$ 是 n 阶循环群,

$$e_0 = \underbrace{0 \cdots 0}_n, \quad e_i = \underbrace{0 \cdots 0}_{i-1} 1 \underbrace{0 \cdots 0}_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.1)$$

其中 e_0 是 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 的单位元, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 可以看成是 n 空间的标准基.

B 在 A 上的作用 ϕ 定义如下: 对每个 $a = a_1 a_2 \dots a_n \in A$,

$$\phi_i(a) = a_{1-i} a_{2-i} \dots a_{n-i(\text{mod } n)}, \quad i = 0, \dots, n-1 \in B.$$

例如, 如果 $a = e_1$, 那么 $\phi_i(e_1) = e_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). 在 ϕ 下的轨道

$$e_1^B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

群 A 和 B 关于 ϕ 的半直积 (semidirect product) $A \rtimes_{\phi} B$ 是一个群, 它的点集为 $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ 和二元运算 “*”

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \phi_{b_1}(a_2), b_1 b_2), \quad a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B,$$

单位元是 (e_A, e_B) , 其中 e_A 和 e_B 分别是 A 和 B 的单位元, 元素 (a, b) 的逆元

$$(a, b)^{-1} = (\phi_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1}).$$

若取 ϕ 是 A 的恒等自同构, 则 $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$, $A \rtimes_{\phi} B$ 就是直积 $A \times B$.

群的半乘积及其应用可参见 Alon 等人综述文章^[23]. 许多图的自同构群是通过两个群的半直积得到的. 例如, 利用半直积, 冯衍全^[25] 和 Ganesan^[26] 确定了由某些对换集生成的 Cayley 图的自同构群; 周进鑫等人^[27,28] 确定了交错群图和交错群网络的自同构群. 群的半直积也被用来证明某些网络是 Cayley 图. 例如, 周书明等人^[29] 证明了对偶立方体网络 DC_n 是 Cayley 图 $C_{(\Gamma \times \Gamma) \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_2}(S)$, 其中 $\Gamma = (\mathbb{Z}_2)^n$, $S = \{(e_0, e_1, 0), \dots, (e_0, e_n, 0), (e_0, e_0, 1)\}$, 作用 $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\Gamma \times \Gamma)$ 定义如下

$$\phi_i(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{若 } i = 0; \\ (\beta, \alpha) & \text{若 } i = 1. \end{cases}$$

Alon 和 Hoory 等人提到 Cayley 图 $C_A(S_A)$ 和 $C_B(S_B)$ 的替代图 $C_A(S_A) \textcircled{R} C_B(S_B)$ 是 Cayley 图 $C_{A \rtimes_{\phi} B}(S)$. 图的替代乘积是怎么定义的呢?

§1.4 图的替代乘积

图的替代乘积 (replacement product) 有许多不同的等价定义. 为了我们的需要, 这里采用由 Hoory 等人^[24] 提出的定义, 假定 G_1 和 G_2 都是正则图. 设 G_1 是 n 阶 δ_1 正则图, G_2 是 δ_1 阶 δ_2 正则图. 对每个顶点 $x \in V(G_1)$, G_1 中关联于 x 的所有边标号为 $e_x^1, e_x^2, \dots, e_x^{\delta_1}$.

²⁵Feng, Y.-Q., Automorphism groups of Cayley graphs on symmetric groups with generating transposition sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96 (2006), 67-72.

²⁶Ganesan, A., Automorphism groups of Cayley graphs generated by connected transposition sets, *Discrete Mathematics*, 313 (2013), 2482-2485.

²⁷Zhou, J.-X., The automorphism group of the alternating group graph. *Applied Mathematics Letters*, 24 (2011), 229-231.

²⁸Zhang, W.-J. and Zhou, J.-X., Automorphisms of the alternating group network. *Ars Combinatoria*, 128 (2016), 301-307.

²⁹Zhou, S.-M., Chen, L.-X. and Xu, J.-M., Conditional fault diagnosability of dual-cubes. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 23 (8) (2012), 1729-1749.

定义 1.15 设 G_1 是 n 阶 δ_1 正则图, G_2 是 δ_1 阶 δ_2 正则图. G_1 和 G_2 的替代乘积是图 $G_1 \circledast G_2$, 其中 $V(G_1 \circledast G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, 两不同顶点 (x, i) 和 (y, j) (其中 $x, y \in V(G_1), i, j \in V(G_2)$) 在 $G_1 \circledast G_2$ 中有边相连 \Leftrightarrow 或者 $x = y$ 且 $ij \in E(G_2)$, 或者 $xy \in E(G_1)$ 且 $e_x^i = xy = e_y^j$.

直观上看, 就是将 G_1 和 G_2 画在平面上 (此时将 G_1 中点画大些, G_2 画小些), 然后将 G_2 覆盖在 G_1 的每个顶点 x 上使得 G_2 的点 i 落在 G_1 中对应的边 e_x^i 上. 图 3 所示的图是 K_4 和 C_3 的替代乘积图 $K_4 \circledast C_3$ 以及 K_4 中边的标号. 对于这个图, 为什么它是点可迁的, 我们一直没有搞清楚.

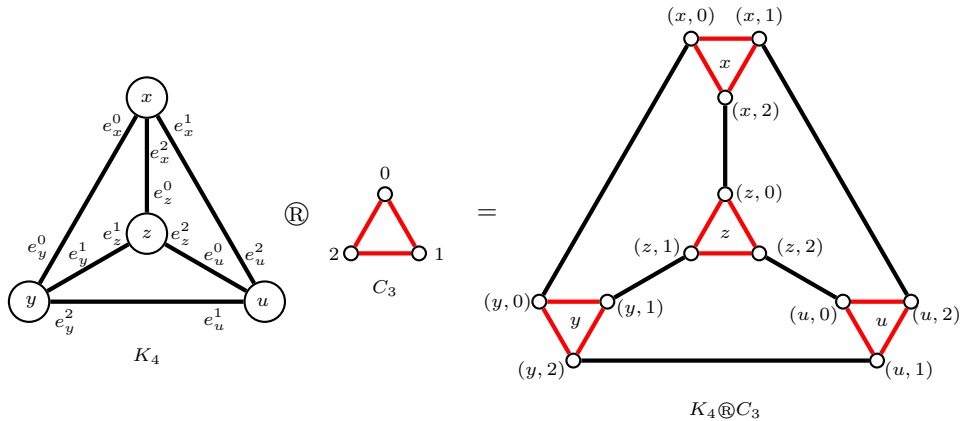


图 3 替代乘积图 $K_4 \circledast C_3$.

字典乘积图 (lexicographic product) $G_1[G_2]$: 顶点集为 $V(G_1) \times V(G_2)$, 两顶点 (x, i) 和 (y, j) 相连 \Leftrightarrow 或者 $x = y$ 且 $ij \in E(G_2)$ 或者 $xy \in E(G_1)$, 这里没有条件“ $e_x^i = xy = e_y^j$ ”. 因此, 替代图 $G_1 \circledast G_2$ 是字典乘积图 $G_1[G_2]$ 的子图.

字典乘积图 是由 Hausdorff^[30] 首先提出来的. Sabidussi^[31] 证明了: $G_1[G_2]$ 是点可迁的 $\Leftrightarrow G_1$ 和 G_2 都是点可迁的. 容易证明: 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是 Cayley 图 $C_{\Gamma_i}(S_i)$, e_i 是 Γ_i 的单元元. 那么字典乘积 $G_1[G_2]$ 是 Cayley 图 $C_{\Gamma}(S)$, 其中 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $S = (S_1 \times \Gamma_2) \cup (\{e_1\} \times S_2)$. 本文 ?? 将讨论它的连通度.

说到字典乘积图, 我们不得不提及一下孟吉翔^[32] 的漂亮结果: 点可迁且边可迁连通图^[33] G 是非超 κ 的 $\Leftrightarrow G \cong C_n[K_m^c]$ ($n \geq 6$) 或者 $L(Q_3)[K_m^c]$ ($n \geq 1$), 其中 $L(Q_3)$ 是立方体 Q_3 的线图, K_m^c 是 m 阶无边图, 即完全图 K_m 的补图.

前面提到过膨胀图 (inflation or inflated graph), 这里定义的替代乘积图是膨胀图的特殊情形. 刘娟等人^[34] 证明了: 超立方体 Q_n 的膨胀图 $Q_n \circledast K_n$ 是 Cayley 图^[35].

图的替代乘积是构图或网络的重要方法之一. 例如, 据前所知, 著名的立方连通圈 CCC_n 就是超立方体 Q_n 和圈 C_n 的替代乘积图 $Q_n \circledast C_n$ (见图 2 所示). 另外, Malluhi 和 Bayoumi^[36] 提出

³⁰Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.

³¹Sabidussi, G., The lexicographic product of graphs. Duke Math. J., 28(1961), 573-578.

³²Meng, J., Connectivity of vertex and edge transitive graphs. Discrete Applied Math., 127 (2003), 601-613.

³³注: 这里所说的“边可迁”是指“1 弧可迁”, 即有向图意义下的边可迁.

³⁴Liu, J., Zhang, X.-D., Cube-connected complete graphs. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 44(3)(2014), IJAM-44-3-03.

³⁵注: 其证明与 Carlesson 等人^[18] 的方法一样, 但作者却没有提及这篇文献. 专著 [J.-M. Xu, Topological structure and analysis of interconnection networks, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.] 中第 90 页例 3 也介绍了 Carlesson 等人的方法. 作者引用了该书, 却没有提及此证明.

³⁶Malluhi, Q. M. and Bayoumi, M. A., The hierarchical hypercube: A new interconnection topology for massively parallel systems. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 5(1) (1994), 17-30.

的 n 维分层超立方体 (hierarchical hypercube) 网络 HHC_n 是 Q_{2^m} 和 Q_m 替代图 $Q_{2^m} \otimes Q_m$, 其中 $n = 2^m + m$. 图 4 所示的是分层超立方体网络 HHC_6 , 其中 $m = 2$ 且 $n = 6$.

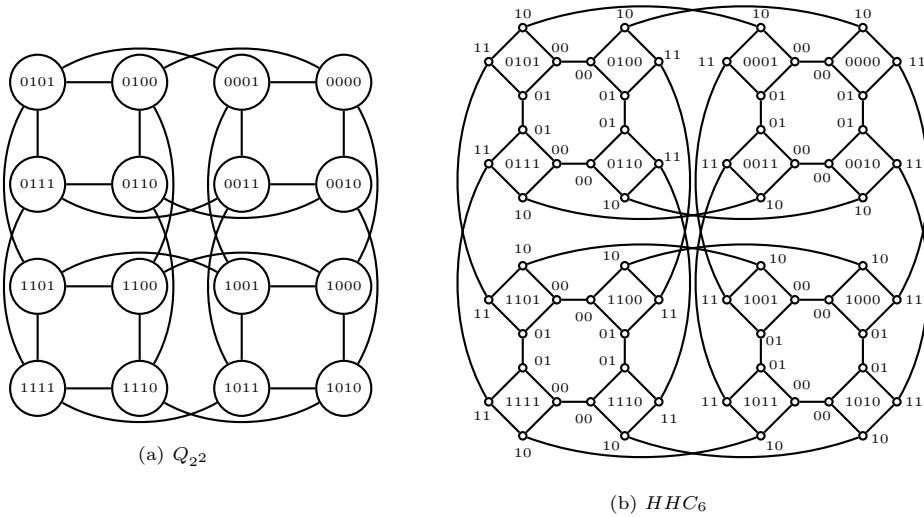


图 4 分层超立方体网络 HHC_6

这些事实提醒我们, 为了达到我们的目的, 选择超立方体 Q_n 和循环图 $G(n, \pm S)$ 做替代乘积比较靠谱, 因为它们都是 Cayley 图.

另外提及一点的是: 图的点替代方法是重要的构图方法. 例如, 不少作者在构造 3 正则 3 连通非 Hamilton 平面图时就采用这种方法. 这些内容与该项目的研究无关, 仅供读者参阅.

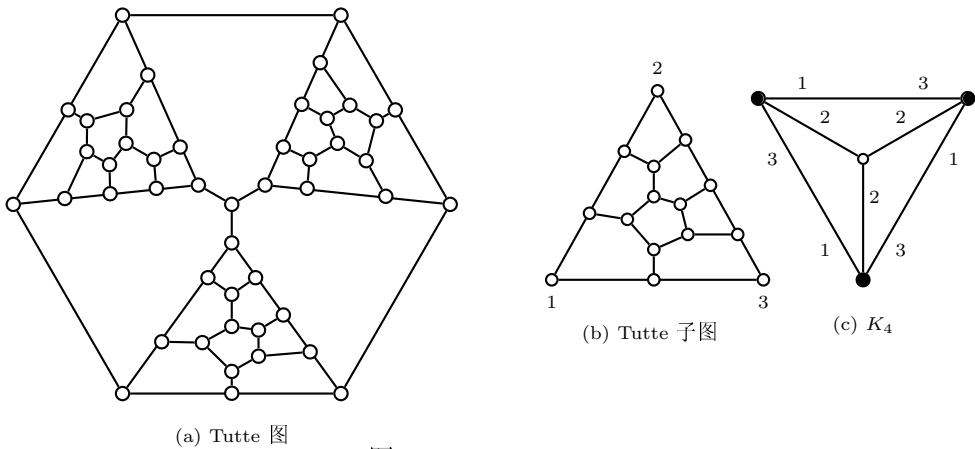


图 5 Tutte 图及其构造

1880 年, Tait^[37] 在“每个 3 正则 3 连通平面图都是 Hamilton 图”的假设下给出了色猜想的“证明”. 六十多年后, Tutte^[38] (1946) 构造了一个 3 正则 3 连通非 Hamilton 平面图 (图 5 (a)), 从而否定了 Tait 的证明. Tutte 图就是将完全图 K_4 中 3 个顶点 (图 5 (c) 中黑点) 用 Tutte 子图 (图 5 (b)) 来替代后得到的图. 最小反例是 38 个顶点, 它们是将 6 个 5 轮柱 (图 6 (b)) 中两个顶点 (图 6 (b) 中黑点) 用 Tutte 子图替代后得到的图. 有兴趣的读者可以参阅 Holton & McKay^[39] (1988).

³⁷Tait, P. G., On the colouring of maps. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **10** (1878-1880), 501-503

³⁸Tutte, W. T., On Hamiltonian circuits. *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 98-101

³⁹Holton, D. A. and McKay, B. D., The smallest non-Hamiltonian 3-connected cubic planar graphs have 38 vertices. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 45 (3) (1988), 305 - 319

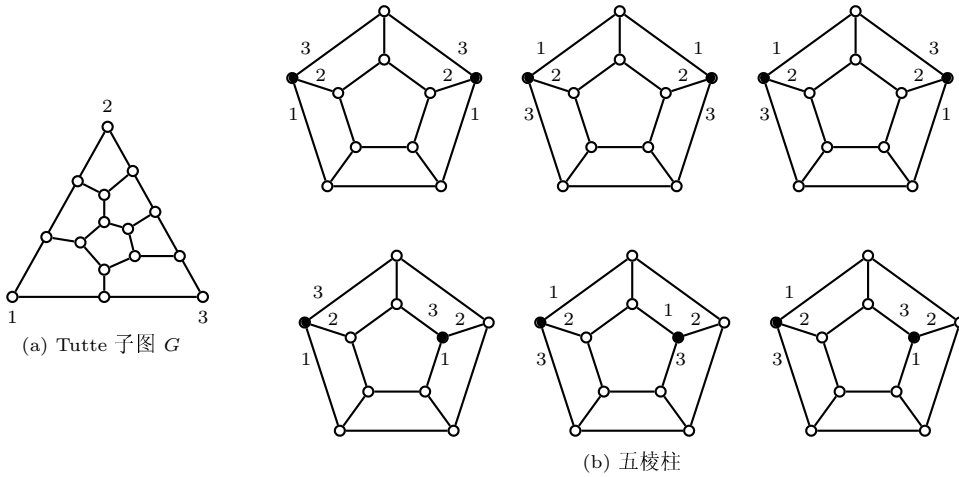


图 6 Tait 假设最小反例的构造

§1.5 Cayley 图的替代乘积

有了图的替代乘积和群的半乘积概念, 现在可以陈述一个关键结果, 它建立在下述假设基础上.

假定 1.16 设 A 和 B 是两个有限群, S_A 和 S_B 分别是 A 和 B 的生成集, $|S_A| = |B| \geq 2$, ϕ 是 B 在 A 上的作用满足 $S_A = x^B$ ($x \in S_A$), 且 $S = \{(e_A, b) : b \in S_B\} \cup \{(x, e_B)\}$.

定理 1.17 在假定 1.16 下, S 生成 $A \times_{\phi} B$. 而且, 如果 $S_B = S_B^{-1}$ 且 $x = x^{-1}$, 那么 $S = S^{-1}$ 且 $C_{A \times_{\phi} B}(S)$ 是 $C_A(S_A)$ 和 $C_B(S_B)$ 的替代乘积图.

现在说明一下定理 1.17 中所列条件的必要性. 因为所讨论的 Cayley 图是无向图, 由定义, 为了确保 3 个 Cayley 图 $C_A(S_A)$, $C_B(S_B)$ 和 $C_{A \times_{\phi} B}(S)$ 都是无向图, 条件“ $S_A = S_A^{-1}$, $S_B = S_B^{-1}$ 和 $S = S^{-1}$ ”都是必要的. 由命题 1.13 (b) 对 B 在 A 上的任何作用 ϕ ,

$$(x, e_B)^{-1} = (\phi_{e_B}(x^{-1}), e_B) = (x^{-1}, e_B).$$

因此, 条件“ $S = S^{-1}$ ”意味着

$$\begin{aligned} \{(e_A, b) : b \in S_B\} \cup \{(x, e_B)\} &= (\{(e_A, b) : b \in S_B\} \cup \{(x, e_B)\})^{-1} \\ &= \{(e_A, b^{-1}) : b \in S_B\} \cup \{(x^{-1}, e_B)\}. \end{aligned}$$

这意味着条件“ $S = S^{-1}$ ”与条件“ $S_B = S_B^{-1}$ 且 $x = x^{-1}$ ”是等价的.

因为在作用 ϕ 下 $S_A = x^B$, 所以对任何 $a \in S_A$, 存在某个 $b \in B$ 使得 $a = \phi_b(x)$. 由命题 1.13 (b), 对任何 $a \in S_A$ 有

$$x = x^{-1} \Leftrightarrow a = \phi_b(x) = \phi_b(x^{-1}) = (\phi_b(x))^{-1} = a^{-1}, \quad \text{即 } x = x^{-1} \Leftrightarrow S = S^{-1}.$$

作为图的锯齿 (zig-zag) 乘积^[40]的特殊情形, 定理 1.17 的原始形式被简单地陈述在 Alon 等人综述文章^[23]的定理 2.3 中, $C_{A \times_{\phi} B}(S) = C_A(S_A) \circledast C_B(S_B)$, 但没有证明. Hoory 等人在综述文章^[24]的定理 11.22 中给出比较完全的陈述, 但既没有条件“ $S = S^{-1}$ ”, 也没有条件“ $x = x^{-1}$ ”和“ $S_B = S_B^{-1}$ ”, 证明也不完整. 我们给出完整陈述和证明, 证明的主要方法是根据替代乘积图的定义 1.15 来证明: $C_{A \times_{\phi} B}(S)$ 是 $C_A(S_A)$ 和 $C_B(S_B)$ 的替代乘积图.

⁴⁰首先提出锯齿 (zig-zag) 乘积的是在文献 [O. Reingold, S. Vadhan and A. Wigderson, EntropyWaves, The zig-zag graph product, and new constant-degree expanders and extractors. Proc. of the 41st FOCS (2000), pp. 3-13] 中.

例子 1.18 令 $A = (\mathbb{Z}_2)^n, B = \mathbb{Z}_n$. 则 $e_A = e_0, e_B = 0$. 令 $S_A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 其中 e_i 如 (1.1.1) 所定义, $e_i^{-1} = e_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, 并令 $S_B = \pm\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. 那么, Cayley 图 $C_A(S_A)$ 是超立方体 Q_n (见例子 1.11), Cayley 图 $C_B(S_B)$ 是循环图 $G(n, \pm S)$ (见例子 1.9). 令 ϕ 是 B 在 A 上的作用 (定义在例子 1.14). 那么, S_A 是在 ϕ 下元素 $e_1 \in S_A$ 的轨道 e_1^B . 令 $S = \{(e_A, s) : s \in S_B\} \cup \{(e_1, e_B)\}$. 那么 $S = S^{-1}$. 由定理 1.17, S 生成 $A \rtimes_{\phi} B$, 且 $C_{A \rtimes_{\phi} B}(S)$ 是 $C_A(S_A)$ 和 $C_B(S_B)$ 的替代乘积.

特别地, 如果 $S_B = \{1, n-1\}$, 那么 $S = \{(e_0, 1), (e_0, n-1), (e_1, 0)\}$. Cayley 图 $C_{(\mathbb{Z}_2)^n \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_n}(S) = Q_n \circledast C_n = CCC_n$. 图 2 所示的立方连通圈 $CCC(3)$ 就是 Q_3 和 C_3 的替代乘积图, 而且是 Cayley 图 $C_{\mathbb{Z}_2^3 \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_3}(\{(000, 1), (000, 2), (100, 0)\})$.

令 $S_B = \{1, 2, \dots, n-1\}$, 则 $C_B(S_B)$ 是完全图 K_n . 令 $S = \{(e_0, 1), \dots, (e_0, n-1), (e_1, 0)\}$. 则 Cayley 图 $C_{(\mathbb{Z}_2)^n \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_n}(S) = Q_n \circledast K_n$. 这就是刘娟等人^[34]得到的结果.

令 $A = \mathbb{Z}_4, B = \mathbb{Z}_3, S_A = \{1, 2, 3\}, S_B = \{1, 2\}$. 则 S_A 是 \mathbb{Z}_4 的生成集, S_B 是 \mathbb{Z}_3 的生成集, 而且 Cayley 图 $C_{\mathbb{Z}_4}(S_A)$ 是完全图 K_4 , Cayley 图 $C_{\mathbb{Z}_3}(S_B)$ 是圈 C_3 . 设 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ 是 B 在 A 上的作用, 其中 $\phi_1 = (1234)$ 是 Ω_4 上一个轮换, $\phi_2 = \phi_1^2, \phi_3 = \phi_1^3$. 则对 $1 \in S_A$ 有 $S_A = 1^B$, 且 $S = \{(e_A, b) : b \in S_B\} \cup \{(1, e_B)\} = \{01, 02, 10\}$. 由定理 1.17 知, 替代乘积图 $K_4 \circledast C_3$ 是 Cayley 图 $C_{\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_3}(S)$, 其中 $S = \{01, 02, 10\}$. 因此, 图 3 所示的替代乘积图 $K_4 \circledast C_3$ 是 Cayley 图, 因而是点可迁的.

§1.6 替代乘积图的边连通度

为了达到我们的目的, 我们研究替代图的边连通度和限制边连通度. 首先考虑替代乘积图的边连通度. 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是连通图, λ_i 和 δ_i 分别表示 G_i 的边连通度和最小度. 下述定理给出替代乘积图的边连通度的界.

定理 1.19 设 G_1 和 G_2 是两个连通图. 则

$$\min\{\lambda_1, \lambda_2\} \leq \lambda(G_1 \circledast G_2) \leq \min\{\lambda_1, \delta_2 + 1\}. \tag{1.1.2}$$

而且, 如果 $\kappa_1 \geq 2$, 那么

$$\min\{\lambda_1, \lambda_2 + 1\} \leq \lambda(G_1 \circledast G_2). \tag{1.1.3}$$

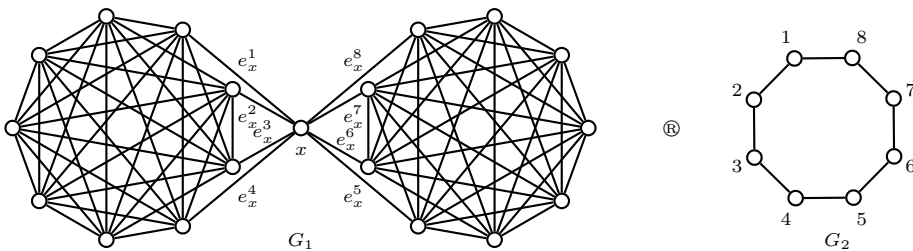


图 7 说明定理 1.19 中条件“ $\kappa_1 \geq 2$ ”不可少的两个图 G_1 和 G_2

定理 1.19 中条件“ $\kappa_1 \geq 2$ ”对不等式 (1.1.3) 成立是不能少的. 例如, 两个图 G_1 和 G_2 如图 7 所示. 容易看到 $\kappa_1 = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \delta_2 = 2, G_1 \circledast G_2$ 是 3 正则的, 且

$$\lambda(G_1 \circledast G_2) = 2 < \min\{4, 3\} = \min\{\lambda_1, \lambda_2 + 1\}.$$

结合 Whitney 不等式 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 和定理 1.19, 立即获得下述推论.

推论 1.20 设 G_1 和 G_2 是两个连通图. 则

- (a) $\lambda(G_1 \circledast G_2) = 1$ 如果 $\lambda_1 = 1$;
- (b) $\lambda(G_1 \circledast G_2) = \lambda_1$ 如果 $\lambda_2 \geq \lambda_1$;
- (c) $\lambda(G_1 \circledast G_2) = \lambda_1$ 如果 $\kappa_1 \geq 2$ 且 $\lambda_2 \geq \lambda_1 - 1$;
- (d) $\lambda(G_1 \circledast G_2) = \min\{\lambda_1, \delta_2 + 1\}$ 如果 $\kappa_1 \geq 2$ 且 $\lambda_2 = \delta_2$.

推论 1.21 对任何 n 正则连通图 G 均有 $\lambda(G \circledast K_n) = \lambda(G)$.

推论 1.22 对任何 n 正则 2 连通图 G 均有 $\lambda(G \circledast C_n) = \min\{\lambda(G), 3\}$.

§1.7 替代乘积图的限制边连通度

这一节考虑替代乘积图的限制边连通度, 首先给出替代乘积图的限制边连通度的界.

定理 1.23 设 G_1 和 G_2 是两个连通图, 而且 $\delta_1 \geq 4$. 则

$$\min\{\lambda_1, \kappa_1 + \lambda_2 - 1, 2\lambda_2, \lambda'_2 + 2\} \leq \lambda'(G_1 \circledast G_2) \leq \min\{\lambda_1, 2\delta_2\}. \quad (1.1.4)$$

特别地, 如果 $\kappa_1 \geq \lambda_1 - \lambda_2 + 1$ (或者 $\kappa_1 \geq \lambda_2 + 1$) 且 G_2 是 λ' 优的, 那么

$$\lambda'(G_1 \circledast G_2) = \min\{\lambda_1, 2\delta_2\}. \quad (1.1.5)$$

由定理 1.23, 立即得到下述推论.

推论 1.24 设 G_1 和 G_2 是两个连通图. 如果 $\kappa_1 = \lambda_1$ 且 G_2 是 λ' 优的. 则

$$\lambda'(G_1 \circledast G_2) = \min\{\lambda_1, 2\delta_2\}.$$

连通图 G 被称为超 λ 的 (super- λ) 如果每个 λ 边割分离 G 中某个顶点. 显然, G 是超 $\lambda \Leftrightarrow \lambda(G) > \lambda(G)$. 由定理 1.23, 立即得到下述结论.

定理 1.25 设 G_1 和 G_2 是连通图. 若 $\kappa_1 \geq \lambda_1 - \lambda_2 + 1 \geq 2$ (或 $\kappa_1 \geq \lambda_2 + 1$) 且 G_2 是 λ' 优的, 则

- (a) $G_1 \circledast G_2$ 是 λ' 优的 $\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 2\delta_2$;
- (b) $G_1 \circledast G_2$ 是超 λ 的 $\Leftrightarrow \lambda_1 > \delta_2 + 1$.

推论 1.26 设 G_1 和 G_2 是两个连通图, 且 $\delta_1 \geq 4$. 如果 $\kappa_1 = \lambda_1 \geq 2$ 且 G_2 是 λ' 优的, 那么

- (a) $G_1 \circledast G_2$ 是 λ' 优的 $\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 2\delta_2$;
- (b) $G_1 \circledast G_2$ 是超 λ 的 $\Leftrightarrow \lambda_1 > \delta_2 + 1$.

推论 1.26 在证明后面的结果中起了关键作用.

推论 1.27 如果 G 是 n 正则连通图, 且 $\kappa(G) \geq 3$, 那么 $\lambda'(G \circledast C_n) = \min\{\lambda(G), 4\}$.

§1.8 给定限制边连通度的点可迁图存在性

现在回答给定限制边连通度的点可迁图存在性.

图 G 被称为 κ 优的, 如果 $\kappa(G) = \delta(G)$. 若 $C_A(S_A)$ 是 κ 优的且 $C_B(S_B)$ 是 λ' 优的, 则下面的定理给出 Cayley 图 $C_{A \rtimes_{\phi} B}(S)$ 是 λ' 优的充分必要条件.

定理 1.28 在假定 1.16 下, 令 $S = \{(e_A, s) : s \in S_B\} \cup \{(x, e_B)\}$ 且 $S = S^{-1}$. 如果 Cayley 图 $C_A(S_A)$ 是 κ 优的且 Cayley 图 $C_B(S_B)$ 是 λ' 优的, 那么 Cayley 图 $C_{A \rtimes_{\phi} B}(S)$ 是 λ' 优的 $\Leftrightarrow |S_A| \geq 2|S_B|$.

例子 1.29 设 $A = (\mathbb{Z}_2)^n$, $B = \mathbb{Z}_n$. $S_A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $S_B = \pm\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ ($s_k < \frac{n}{2}$, $k \geq 2$). 设 ϕ 是由例子 1.14 中所定义的 B 在 A 的作用, $S = \{(e_1, 0), (e_0, s) : s \in S_B\}$. 那么, 由推论 1.4 知 $C_A(S_A) = Q_n$ 是 κ 优的, 由命题 1.3 知 $C_B(S_B) = G(n, \pm S)$ 是 λ' 优的. 令 $G = C_{A \rtimes_{\phi} B}(S)$. 由定理 1.28, G 是 λ' 优的 $\Leftrightarrow \|S_B\| \leq \frac{1}{2}\|S_A\| = \frac{1}{2}n$.

由例子 1.29 和由定理 1.28 立即导出下述结果.

定理 1.30 设 $A = (\mathbb{Z}_2)^n$, $B = \mathbb{Z}_n$, $S_A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 其中 e_i 如 (1.1.1) 所定义, $S_B = \pm\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, $k \geq 2$, $s_k < \frac{n}{2}$, ϕ 是 B 在 A 上的作用如例子 1.14 中所示. 令 $G = C_{A \rtimes_{\phi} B}(S)$, 其中 $S = \{(e_0, s) : s \in S_B\} \cup \{(e_1, 0)\}$. 如果 $\frac{n}{2} < |S_B| < n-1$, 那么 G 是非 λ' 优的且

$$\lambda(G) < \lambda'(G) = n < \frac{v(G)}{2}, \quad n \geq 3,$$

例子 1.31 对给定的奇数 $d (\geq 5)$ 和任意整数 s ($1 \leq s \leq d-3$), 令 $n = d+s$, $k = \frac{d-1}{2}$. 则在定理 1.30 中, 有 $|S_B| = d-1$ 且 $G = C_{\mathbb{Z}_2^{d+s} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_{d+s}}(S)$ 是 Cayley 图. 因为 $1 \leq s \leq d-3$, 所以 $\frac{d+s}{2} < |S_B| < d+s-1$. 由定理 1.30, G 是非 λ' 优的, 而且

$$\lambda(G) = d < \lambda'(G) = d+s < \frac{(d+s) \cdot 2^{d+s}}{2} = \frac{v(G)}{2}.$$

例子 1.31 可以陈述为下面的定理.

定理 1.32 对给定的奇数 $d (\geq 5)$ 和任意整数 s ($1 \leq s \leq d-3$), 存在正则度为 d 的 Cayley 图 G 使得 $\lambda'(G) = d+s < \frac{1}{2}v(G)$.

因为 Cayley 图是点可迁的, 所以定理 1.32 直接回答了问题 1.8. 这个结果不仅彻底解决了困扰我们 10 多年一直想解决的问题, 而且丰富和完善了点可迁图关于连通性理论, 更重要的是在证明这个结果的过程中提供的方法密切了图与代数的关系.

此成果主要由洪振木完成的, 发表在《洪振木, 徐俊明, On restricted edge-connectivity of replacement product graphs. SCIENCE CHINA Mathematics, (60) (4) (2017), 745-758》一文中.

本研究成果曾先后被应邀在北京交通大学、北京大学、南开大学组合中心、南京大学、南京师范大学、福州大学、厦门大学、福州师范大学、河南师范大学、天津师范大学、西北工业大学、湖南大学、中南大学、中北大学、山西大学、云南师范大学等 10 多所高校, 《北京大学和北京交通大学联合主办的第二届组合数学研讨会》、《长三角图论与组合研讨会》和《2016年第三届海峡两岸网络容错与故障诊断研讨会》报告过此研究成果和研究方法, 受到同行广泛认可, 指导与帮助. 在此向这些同行表示感谢.

§2 网络的高容错性研究

§2.1 图的超 h 连通度和强 h 连通度

众所周知, 网络的容错性是用对应图的连通度来度量. 但经典的连通度概念对度量网络容错性有明显的缺陷, 因为它不考虑每个连通分支的大小情况. 为了更准确地度量网络的容错性, Harary^[2] 提出条件连通度 (conditional connectivity) 概念. 对于连通图 G 的分离集 S , $G - S$ 中每个连通分支需要满足某个性质 \mathcal{P} . 根据性质 \mathcal{P} 的不同, Harary 提出 13 种条件连通度. 人们最关心的主要性质是每个连通分支必须满足给定的点数或者最小度 (即 Harary 提出的第 (C) 种和第 (E) 种条件连通度).

首先介绍 Harary 提出的第 (C) 种条件连通度, 其中的条件是要求每个连通分支的点数大于一个给定的整数 h . Harary 说是 Harvey Greenberg 问他是否有人在研究这种连通度. Fàbrega 和 Fiol^[41] 把这种连通度称为强 h 连通度 (extra h -connectivity).

设 $G = (V, E)$ 是连通图, $F \subset V(G)$ (或者 $F \subset E(G)$). 对于给定的整数 $h (\geq 0)$, 如果 $G - F$ 不连通而且每个连通分支中的点数大于 h , 那么称 F 为 G 的强 h 点割 (或者强 h 边割). 图 G 的强 h 点连通度 $\kappa_o^{(h)}(G)$ (或者强 h 边连通度 $\lambda_o^{(h)}(G)$) 定义为最小强 h 点割中点数 (或者最小强 h 边割中的边数). 对于 $h \geq 1$ 和一般的连通图 G , $\kappa_o^{(h)}(G)$ (或者 $\lambda_o^{(h)}(G)$) 不一定存在. 如果 $\kappa_o^{(h)}(G)$ (或者 $\lambda_o^{(h)}(G)$) 存在, 则称 G 为 $\kappa_o^{(h)}$ 连通图 (或者 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图). 显然, 对于 $h \geq 1$, 如果 G 是 $\kappa_o^{(h)}$ (或者 $\lambda_o^{(h)}$) 连通图, 那么 $\kappa_o^{(h-1)}(G) \leq \kappa_o^{(h)}(G)$ (或者 $\lambda_o^{(h-1)}(G) \leq \lambda_o^{(h)}(G)$).

注: 有些学者在研究强 h 连通度时, 将要求每个连通分支的点数大于 “ h ” 改为至少为 “ h ”, 比如, 孟吉翔, Volkman, 张昭等人^[42,43,44]. 这是在引用相关结果时应该注意的.

现在介绍 Harary 提出的第 (E) 种条件连通度, 其中的条件是要求每个连通分支的最小度不小于 h , 这种连通度被称为超 h 连通度 (super h -connectivity) (详细讨论参见《组合网络理论》^[19] 中第 §16.6 节).

设 $G = (V, E)$ 是连通图, $F \subset V(G)$ (或者 $F \subset E(G)$). 对于给定的整数 $h (\geq 0)$, 如果 $G - F$ 不连通而且最小度不小于 h , 那么称 F 为 G 的超 h 点割 (或者超 h 边割). 图 G 的超 h 连通度 $\kappa_s^{(h)}(G)$ (或者超 h 边连通度 $\lambda_s^{(h)}(G)$) 定义为最小超 h 点割中点数 (或者最小超 h 边割中的边数). 对于 $h \geq 1$ 和一般的连通图 G , $\kappa_s^{(h)}(G)$ (或者 $\lambda_s^{(h)}(G)$) 不一定存在. 如果 $\kappa_s^{(h)}(G)$ (或者 $\lambda_s^{(h)}(G)$) 存在, 则称 G 为 $\kappa_s^{(h)}$ 连通图 (或者 $\lambda_s^{(h)}$ 连通图). 显然, 对于 $h \geq 1$, 如果 G 是 $\kappa_s^{(h)}$ (或者 $\lambda_s^{(h)}$) 连通图, 那么 $\kappa_s^{(h-1)}(G) \leq \kappa_s^{(h)}(G)$ (或者 $\lambda_s^{(h-1)}(G) \leq \lambda_s^{(h)}(G)$).

观察到在超点连通度概念中, 如果 F 是超 h 点割, 那么 $\delta(G - F) \geq h$. 因此, $G - F$ 的每个连通分支至少有 $h + 1$ 个顶点. 换句话说, 对于 $\kappa_s^{(h)}$ 连通图 G , 超 h 点割必是强 h 点割. 因此, $\kappa_s^{(h)}$ 连通图 G 必是 $\kappa_o^{(h)}$ 连通的, 而且 $\kappa_o^{(h)}(G) \leq \kappa_s^{(h)}(G)$. 同样地, $\lambda_s^{(h)}$ 连通图 G 必是 $\lambda_o^{(h)}$ 连通的, 而且 $\lambda_o^{(h)}(G) \leq \lambda_s^{(h)}(G)$. 即对任何 $h (\geq 0)$,

$$\kappa_o^{(h)}(G) \leq \kappa_s^{(h)}(G), \quad \lambda_o^{(h)}(G) \leq \lambda_s^{(h)}(G). \quad (2.2.6)$$

因为 $\kappa_s^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(G)$ (或者 $\kappa_o^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_o^{(h)}(G)$) 比 $\kappa(G)$ 和 $\lambda(G)$ 更能准确度量网络 G 的容错性, 所以对于一些著名网络, 确定这 4 个参数值一直是组合网络理论工作者所关心的问题. 在

⁴¹Fàbrega, J. and Fiol, M. A., On the extraconnectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, 155 (1996) 49-57.

⁴²Meng, J.-X. and Ji, Y., On a kind of restricted edge connectivity of graphs. *Discrete Appl. Math.* 117 (1-3) (2002), 183-193.

⁴³Bonsma, P., Ueffing, N. and Volkman, L., Edge-cuts leaving components of order at least three. *Discrete Math.* 256 (1-2) (2002), 431-439.

⁴⁴Zhang, Z. and Yuan, J., A proof of an inequality concerning k -restricted edge-connectivity. *Discrete Math.* 304 (2005), 128-134.

过去的 10 多年里, 当 h 较小时, 如 $h \in \{0, 1, 2\}$, 人们确定了某些著名网络的这 4 个参数值. 对于一般的 h , 人们知道的结果却很少. 对于超立方体 Q_n , 当 $h \leq n - 2$ 时, Oh 等人 (1993) [45] 和 Wu 等人 (1998) [46] 独立地确定了 $\kappa_s^{(h)}(Q_n) = 2^h(n - h)$; 当 $h \leq n - 1$ 时, 徐 (2000) [47] 确定了 $\lambda_s^{(h)}(Q_n) = 2^h(n - h)$. 关于 Q_n 的 h 强点连通度 $\kappa_o^{(h)}$, 直到 2009 年才被杨伟华等人 [48] 确定:

$$\kappa_o^{(h)}(Q_n) = n(h + 1) - \frac{1}{2}h(h + 3) \quad (0 \leq h \leq n - 3, n \geq 4).$$

对于任意的图 G 和给定的非负整数 h , 确定 $\kappa_s^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(G)$ (或者 $\kappa_o^{(h)}(G)$ 和 $\lambda_o^{(h)}(G)$) 是相当困难的, 人们似乎束手无策. Latifi 等人 [49] 猜测它是 NP-hard 问题.

本项目主要研究超 h 连通度 $\kappa_s^{(h)}$ 和超 h 边连通度 $\lambda_s^{(h)}$. 我们找到若干有效方法, 利用这些方法确定了若干著名网络的参数值. 这部分的主要研究成果由李向军完成的.

先回顾一些必要的记号. 对于给定的整数 $n (\geq 2)$, 令 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $I'_n = \{2, \dots, n\}$. 为方便起见, 用全排列 $(p_1 p_2 \dots p_n)$ 表示置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$. 对每个整数 $k (1 \leq k \leq n - 1)$, 令 $P(n, k) = \{p_1 p_2 \dots p_k : p_i \in I_n, p_i \neq p_j, 1 \leq i \neq j \leq k\}$ 是 I_n 上的 k 排列集. 显然, $P(n)$ 是 I_n 上的全排列集, $|P(n)| = n!$ 且 $|P(n, k)| = \frac{n!}{(n-k)!}$.

交换两个元素而其余元素不变的置换称为对换 (transposition); 用 (i, j) 表示交换 i 和 j 的对换, 即, $(p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n)(ij) = (p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n)$. 对每个 $i \in I'_n$, 记 $p^i = p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n(1, i) = p_i p_2 \dots p_{i-1} p_1 p_{i+1} \dots p_n$. 众所周知, 每个对换改变置换的奇偶性.

用 Ω_n 表示 I_n 上的对称群 (symmetric group); Γ_n 表示 Ω_n 中的交错群 (alternating group) (偶置换之群). 基于交错群, 有两类著名的 Cayley 图.

例子 2.1 交错群网络 (alternating group networks)

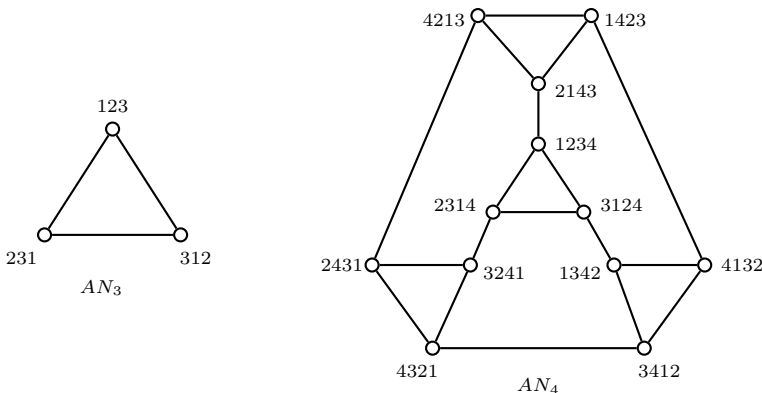


图 8 交错群网络 AN_3 和 AN_4

交错群网络 AN_n 是由冀有虎 [50] 提出来的, 它是 $(n - 1)$ 正则 $(n - 1)$ 连通的 Cayley 图 $C_{\Gamma_n}(S)$, 其中 $n \geq 3$, $S = \{(1, 2, 3), (1, 2)(3, i) : 4 \leq i \leq n\}$. 图 8 所示的是 AN_3 和 AN_4 .

⁴⁵Oh, A. D. and Choi, H., Generalized measures of fault tolerance in n -cube networks. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 4 (1993), 702-703.

⁴⁶Wu, J. and Guo, G., Fault tolerance measures for m -ary n -dimensional hypercubes based on forbidden faulty sets. IEEE Transactions on Computers, 47 (1998), 888-893.

⁴⁷Xu, J.-M., On conditional edge-connectivity of graphs, Acta Math. Appl. Sin. 16 (4) (2000), 414-419.

⁴⁸Yang, W.-H. and Meng, J.-X., Extraconnectivity of hypercubes. Applied Mathematics Letters, 22(6)(2009), 887-891.

⁴⁹S. Latifi, M. Hegde, M. Naraghi-Pour, Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems, IEEE Trans. Comput. 43 (2) (1994), 218-222.

⁵⁰冀有虎, 一类新的交错群 Cayley 网络. 高校应用数学学报, A14(2) (1999) 235-239.

例子 2.2 交错群图 (alternating group graphs)

交错群图 AG_n 是由 Jwo 等人^[51] 提出来的, 它是 Cayley 图 $C_{\Gamma_n}(S)$, 其中 $n \geq 3, S = \{(1, 2, i) : 3 \leq i \leq n\}$. 图 9 所示的是 AG_3 和 AG_4 . 交错群图 AG_n 是 $(2n - 4)$ 正则 $(4n - 4)$ 连通的.

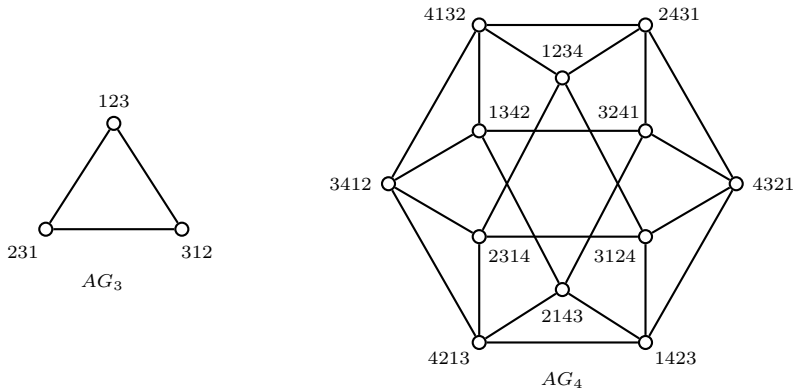


图 9 交错群图 AG_3 和 AG_4

周进鑫等人^[27,28] 确定了交错群网络和交错群图的自同构群.

§2.2 星图和 (n, k) 星图的 h 超连通度

n 维星图 (star graph) S_n 是由 Akers 和 Krishnamurthy^[52] 提出来的, 其中 $V(S_n) = P(n), E(S_n) = \{pp^i : p \in P(n), i \in I'_n\}$. 事实上, 星图 S_n 是 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$, 其中 $S = \{(1, i) : 2 \leq i \leq n\}$. 图 10 所示的是星图 S_2, S_3 和 S_4 . 星图 S_n 是 $(n - 1)$ 正则 $(n - 1)$ 连通的 2 部图且不含 C_4 .

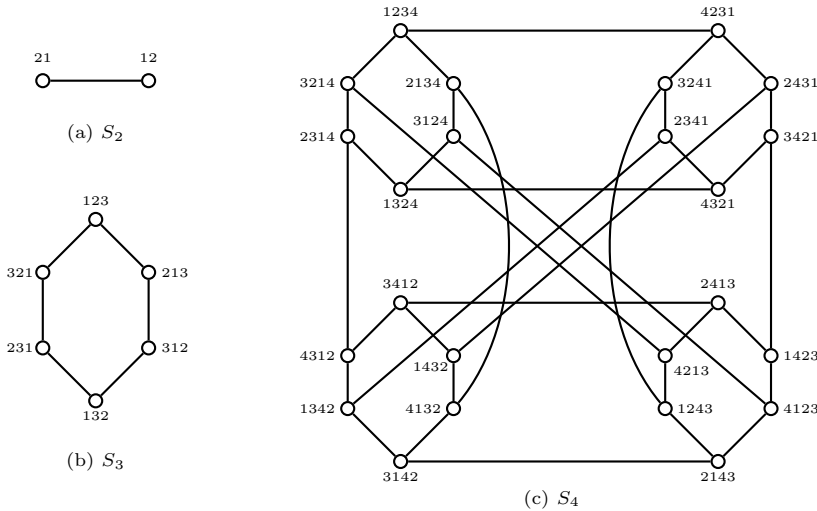


图 10 星图 S_2, S_3 和 S_4

广义星图- (n, k) 星图 $S_{n,k}$ 的顶点集为 $P(n, k)$, 顶点 $p = p_1p_2 \dots p_i \dots p_k$ 与下列顶点相邻:

(a) $p_i p_2 \dots p_{i-1} p_1 p_{i+1} \dots p_k$, 其中 $i \in I'_k = \{2, 3, \dots, k\}$.

⁵¹Jwo, J. S., Lakshmivarahan, S. and Dhall, S. K., A new class of interconnection networks based on the alternating group, Networks, 23(1993), 315-326.

⁵²Akers, S. B. and Krishnamurthy, B., A group theoretic model for symmetric interconnection networks. IEEE Transactions on Computers, 38(4)(1989), 555-566.

(b) $p'_1 p_2 p_3 \cdots p_k$, 其中 $p'_1 \in I_n \setminus \{p_i : i \in I_k\}$.

图 11 所示是两个 (n, k) 星图 $S_{4,3}$ 和 $S_{4,2}$.

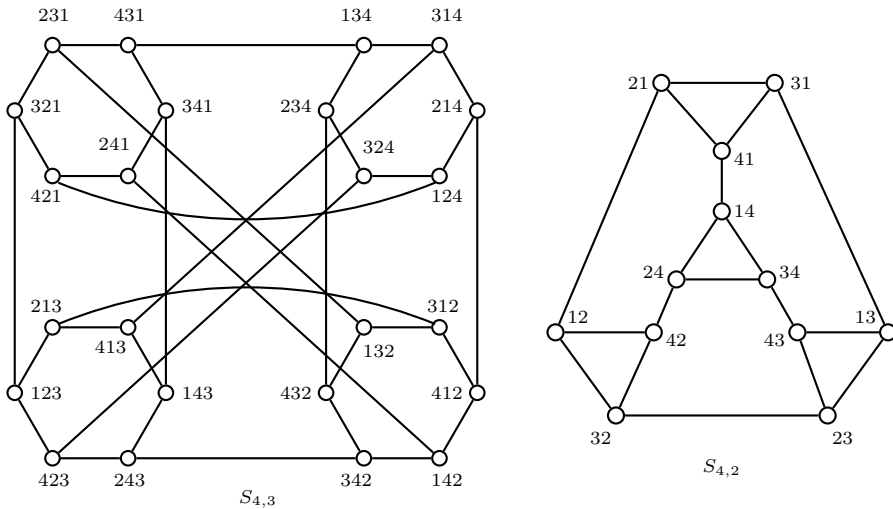


图 11 (n, k) 星图 $S_{4,3}$ 和 $S_{4,2}$

(n, k) 星图是由 Chiang 等人^[53] 提出来的, 它是 $(n - 1)$ 正则 $(n - 1)$ 连通的点可迁图. 显然, $S_{n,1} \cong K_n$, $S_{n,n-1} \cong S_n$. 而且, Cheng 等人^[54] 证明了 $S_{n,n-2} \cong AN_n$ (交错群网络, 见例子 2.1). 对一般的 k ($2 \leq k \leq n - 3$), $S_{n,k}$ 是否是 Cayley 图?

最近, Cheng 等人^[55] 考虑了这个问题, 指出 $S_{6,2}$ 不是 Cayley 图, 证明了 $S_{n,2}$ 是 Cayley 图 $\Leftrightarrow n$ 是素数幂; $S_{n,3}$ 是 Cayley 图如果 $n - 1$ 是素数幂, 并猜想这个条件也是必要的. 他们还指出 $S_{n,k}$ 对 Cayley 图分类的困难性, 并提出如下猜想.

猜想 2.3 对任何 $k (\geq 2)$, 如果 $S_{n,k}$ 是 Cayley 图, 那么 $S_{n-1,k-1}$ 也是 Cayley 图.

我们的兴趣是确定 $\kappa_s^{(h)}(S_{n,k})$ 和 $\lambda_s^{(h)}(S_{n,k})$. 2012 年, 我们^[56] 确定了 $\lambda_s^{(h)}(S_{n,k})$.

定理 2.4 如果 $2 \leq k \leq n - 1$ 且 $0 \leq h \leq n - k$, 那么

$$\lambda_s^{(h)}(S_{n,k}) = \begin{cases} (n - h - 1)(h + 1), & h \leq \min\{k - 2, \frac{n}{2} - 1\}, \\ (n - k + 1)(k - 1), & \text{其他情形.} \end{cases}$$

至于 $\kappa_s^{(h)}(S_{n,k})$, 杨卫华等人^[57] 证明了: 对于 $2 \leq k \leq n - 2$, $\kappa_s^{(1)}(S_{n,k}) = n + k - 3$ ($n \geq 3$), $\kappa_s^{(2)}(S_{n,k}) = n + 2k - 5$ ($n \geq 4$). 本项目完全确定了 $\kappa_s^{(h)}(S_{n,k})$.

⁵³Chiang, W.-K., Chen, R.-J., The (n, k) -star graphs: A generalized star graph, Inform. Process. Lett. 56 (1995) 259-264.

⁵⁴Cheng, E., Qiu, K. and Shen, Z., A note on the alternating group network. The Journal of Supercomputing, 59(1) (2012), 246-248.

⁵⁵Cheng, E., Li L., Lipták, L., Shim, S. and Steffy, D. E., On the Problem of Determining which (n, k) -Star Graphs are Cayley Graphs. Graphs and Combinatorics, 33 (1) (2017), 85-102

⁵⁶李向军, 徐俊明, Generalized measures of edge fault tolerance in (n, k) -star graphs. Mathematical Science Letters. 1 (2) (2012), 133-138.

⁵⁷Yang, W.-H., Li, H.-Z. and Guo, X.-F., A kind of conditional fault tolerance of (n, k) -star graphs, Inform. Process. Lett. 110 (2010) 1007-1011.

定理 2.5 如果 $2 \leq k \leq n-1$ 且 $0 \leq h \leq n-k$, 那么

$$\kappa_s^{(h)}(S_{n,k}) = n + h(k-2) - 1.$$

这个结果包含在《X.-J. Li and J.-M. Xu, Fault-tolerance of (n, k) -star networks. Applied Mathematics and Computation, 248 (2014), 525-530》一文. 魏云超等^[58]也得独立到这个结果.

正如我们所看到的, 当 $k = n-1$ 时, $S_{n,n-1} \cong S_n$. 在这种情况下, 定理 2.5 中的条件“ $0 \leq h \leq n-k$ ”意味着“ $0 \leq h \leq 1$ ”. Cheng 等人^[59], Hu 等人^[60], 聂晓冬等人^[61] 和 Rouskov 等人^[62] 独立确定了 $\kappa_s^{(1)}(S_n) = \lambda_s^{(1)}(S_n) = 2n-4$ ($n \geq 3$). 这些结果都包含在定理 2.5.

然而, 当 $h \geq 2$ 时, 定理 2.5 确定不了 $\kappa_s^{(h)}(S_n)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(S_n)$. 当 $h = 2$ 且 $n \geq 4$ 时, 杨卫华等人^[63] 确定了 $\lambda_s^{(2)}(S_n) = 6(n-3)$; 张昭等人^[64] 确定了 $\kappa_s^{(2)}(S_n) = 6(n-3)$ 并猜想 $\kappa_s^{(h)}(S_n) = (h+1)!(n-h-1)$. 但这些结果却不能包含在定理 2.5. 事实上, 我们获得下面更一般的结果.

定理 2.6 对任何整数 h , 如果 $0 \leq h \leq n-2$, 那么

$$\kappa_s^{(h)}(S_n) = \lambda_s^{(h)}(S_n) = (h+1)!(n-h-1).$$

定理的证明是固定 n , 对 $h \geq 0$ 采用归纳法. 在证明过程中, 充分利用 S_n 的结构性质, 下面的引理起了关键作用.

引理 2.7 设 H 是 S_n 的子图, $V(H) = X$, $U_j^X = \{p_j : p_1 \dots p_j \dots p_n \in X\}$, $j \in I_n$. 对于固定的 $h \in I_{n-1}$, 如果 $\delta(H) \geq h$, 那么存在 $j \in I'_n$ 使得 $|U_j^X| \geq h+1$.

这个结果包含在《Xiang-Jun Li and Jun-Ming Xu, Generalized connectivity of star graphs. Networks, 63 (3) (2014), 225-230.》一文中.

注意到定理 2.4 和定理 2.5 仅考虑情形 $0 \leq h \leq n-k$. 我们最近^[65] 考虑情形 $n-k \leq h \leq n-2$, 获得如下结果.

定理 2.8 如果 $2 \leq k \leq n-1$ 且 $n-k \leq h \leq n-2$, 那么

$$\kappa_s^{(h)}(S_{n,k}) = \lambda_s^{(h)}(S_{n,k}) = \frac{(h+1)!(n-h-1)}{(n-k)}.$$

对于交错群网络 AN_n ($n \geq 3$), 当 $h \in \{0, 1, 2\}$ 时, 由定理 2.4 和定理 2.5 能立即确定 $\lambda_s^{(h)}(AN_n)$ 和 $\kappa_s^{(h)}(AN_n)$:

$$\kappa_s^{(h)}(AN_n) = \begin{cases} n-1 & \text{如果 } h=0 \text{ 且 } n \geq 2, \\ 2n-5 & \text{如果 } h=1 \text{ 且 } n \geq 5, \\ 3n-9 & \text{如果 } h=2 \text{ 且 } n \geq 4; \end{cases}$$

⁵⁸Wei, Y. and Chen, F., Generalized connectivity of (n, k) -star graphs. International Journal of Foundations of Computer Science, 24 (8) (2013), 1235-1241.

⁵⁹Cheng, E. and Lipman, M. J., Increasing the connectivity of the star graphs. Networks, 40 (3) (2002), 165-169.

⁶⁰Hu, S.-C. and Yang, C.-B., Fault tolerance on star graphs. International Journal of Foundations of Computer Science, 8 (2) (1997), 127-142.

⁶¹聂晓冬, 刘红美, 徐俊明, Star 图互连网络的容错性分析. 《数学物理学报》, 24 (2) (2004), 168-176.

⁶²Rouskov, Y., Latifi, S. and Srimani, P. K., Conditional fault diameter of star graph networks. Journal of Parallel and Distributed Computing, 33 (1) (1996), 91-97.

⁶³Yang, W.-H., Li, H.-Z. and Meng, J.-X., Conditional connectivity of Cayley graphs generated by transposition trees. Information Processing Letters, 110 (23) (2010), 1027-1030.

⁶⁴Wan, M. and Zhang, Z., A kind of conditional vertex connectivity of star graphs. Applied Mathematics Letters, 22 (2009), 264-267.

⁶⁵Xiang-Jun Li, Yong-Ni Guan, Zheng Yan and Jun-Ming Xu, On fault tolerance of (n, k) -star networks. Theoretical Computer Science, 704 (2017), 82-86.

和

$$\lambda_s^{(h)}(AN_n) = \begin{cases} n-1 & \text{如果 } h=0 \text{ 且 } n \geq 2, \\ 2(n-2) & \text{如果 } h=1 \text{ 且 } n \geq 5, \\ 3(n-3) & \text{如果 } h=2 \text{ 且 } n \geq 4. \end{cases}$$

最近, 冯衍全等人^[66] 确定了 $\lambda_s^{(3)}(AN_n) = 12(n-4)$ ($n \geq 5$). 事实上, 当 $h \geq 2$ 时, 由定理 2.8 我们立即得到下面的推论.

推论 2.9 $\kappa_s^{(h)}(AN_n) = \lambda_s^{(h)}(AN_n) = \frac{1}{2}(h+1)!(n-h-1)$ for $2 \leq h \leq n-2$.

按通常方法一样, 通过适当选取一个 h 超点(边) 割而得到定理 2.8 中的上界:

$$\max\{\lambda_s^{(h)}(S_{n,k}), \kappa_s^{(h)}(S_{n,k})\} \leq \frac{(h+1)!(n-h-1)}{(n-k)!}. \tag{2.2.7}$$

定理 2.8 中下界的获得需要引进一个图运算.

设 G 是图, t 是正整数. G 的 t 分裂图 (t -split graph) G^t 是从 G 按下列方法得到的图: 对 G 中每个顶点 x 用 t 个顶点的独立集 V_x 来替代它; 对 G 中每条边 $e = xy$ 用 V_x 和 V_y 之间的完备匹配 E_e 来替代它. 图 12 所示的图是 $(4,2)$ 星图 $S_{4,2}$ 和它同构与星图 S_4 的 2 分裂图 $S_{4,2}^2$.

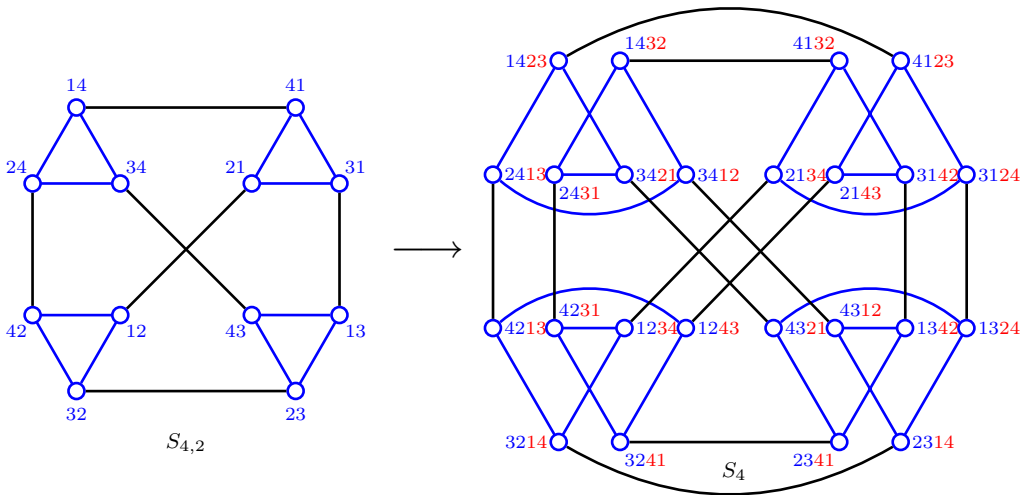


图 12 $(4,2)$ 星图 $S_{4,2}$ 和它同构与星图 S_4 的 2 分裂图 $S_{4,2}^2$.

下面两个引理在定理 2.8 中下界的证明中起了关键作用.

引理 2.10 设 G 是连通图, G^t 是 G 的 t 分裂图, 则 $\min\{\kappa_s^{(h)}(G^t), \lambda_s^{(h)}(G^t)\} \leq t \kappa_s^{(h)}(G)$.

引理 2.11 对任何 k ($2 \leq k \leq n-1$), $S_{n,k}$ 存在同构于星图 S_n 的 $(n-k)!$ 分裂图 $S_{n,k}^{(n-k)!}$.

由引理 2.10, 引理 2.11 和定理 2.6, 我们立即有

$$\begin{aligned} \kappa_s^{(h)}(S_{n,k})(n-k)! &\geq \kappa_s^{(h)}(S_{n,k}^{(n-k)!}) = \kappa_s^{(h)}(S_n) = (h+1)!(n-h-1) \\ \lambda_s^{(h)}(S_{n,k})(n-k)! &\geq \lambda_s^{(h)}(S_{n,k}^{(n-k)!}) = \lambda_s^{(h)}(S_n) = (h+1)!(n-h-1), \end{aligned}$$

即,

$$\min\{\lambda_s^{(h)}(S_{n,k}), \kappa_s^{(h)}(S_{n,k})\} \geq \frac{(h+1)!(n-h-1)}{(n-k)!}. \tag{2.2.8}$$

由 (2.2.7) 和 (2.2.8), 我们立即得到定理 2.8.

⁶⁶Feng, Yan-Quan, Hao, Rong-Xia and Zhou, Jin-Xin, On computing of a conditional edge connectivity of alternating group network. A manuscript submitted to Linear and Multilinear Algebra, 65(12)(2017) 2494 - 2507.

§2.3 (n, k) 排列图的紧超连通性

正如我们看到的, 星图 S_n 有 $n!$ 个顶点. 要想扩充 S_n 到 S_{n+1} , 顶点数目从 $n!$ 到 $(n+1)!$ 之间有很大的空隙. 为了克服这个缺点, Day 等人^[67] 提出 (n, k) 排列图 (arrangement graph) $A_{n,k}$, 其中 $V(A_{n,k}) = P_{n,k}$, $E(A_{n,k}) = \{pq : p \text{ 和 } q \text{ 仅一个坐标不同}\}$. 图 13 所示的是 $(4, 2)$ 排列图 $A_{4,2}$.

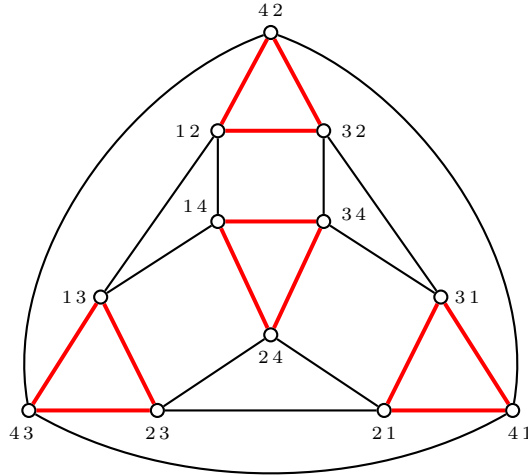


图 13 $(4, 2)$ 排列图 $A_{4,2}$

(n, k) 排列图 $A_{n,k}$ 是 $\frac{n!}{(n-k)!}$ 阶的 $k(n-k)$ 正则 $k(n-k)$ 连通的点、边可迁图. 显然, $A_{n,1} \cong K_n$, $A_{n,n-1} \cong S_n$. Chiang 等人^[68] 证明: $A_{n,n-2} \cong AG_n$, 其中 AG_n 是 n 维交错群图 (其定义见例子 2.2). 完全图 K_n , 星图 S_n 和交错群图 AG_n 都是 Cayley 图.

问题 2.12 对任何 k ($2 \leq k \leq n-3$), $A_{n,k}$ 是否是 Cayley 图.

对于交错群图 AG_n , Cheng 等人^[69] 证明: $\kappa_s^{(1)}(AG_4) = 4$, $\kappa_s^{(1)}(AG_n) = 4n - 11$ ($n \geq 5$). 张昭等人^[70] 证明: $\kappa_s^{(2)}(AG_4) = 4$, $\kappa_s^{(2)}(AG_n) = 6n - 18$ ($n \geq 5$). 周书明等人^[71] 推广这些结果到 $A_{n,k}$.

$$\kappa_s^{(1)}(A_{n,k}) = (2k-1)(n-k) - 1 \quad (k \geq 3, n \geq k+1).$$

$$\kappa_s^{(2)}(A_{n,k}) = (3k-2)(n-k) - 2 \quad (k \geq 4, n \geq k+2).$$

林丽美和周书明^[72] 确定了: 对任何 $0 \leq h \leq k-2$ 和 $n \geq k+h$,

$$\kappa_s^{(h)}(A_{n,k}) = ((h+1)k - h)(n-k) - h.$$

对一般的 $h \geq 3$, $\lambda_s^{(h)}(A_{n,k})$, $\kappa_o^{(h)}(A_{n,k})$ 和 $\lambda_o^{(h)}(A_{n,k})$ 还没有被确定.

设 G 是 κ 连通图. 如果每个最小点割都分离一个顶点, 则称 G 是超 κ 连通 (super κ -connected) 图. 如果每个最小点割都分离 G 为两个连通分支, 其中之一为一个孤立点, 则称 G 是紧超 κ 连通 (tightly super κ -connected) 图. 例如, 完全 2 部图 $K_{n,n}$ 是超 n 图, 但不是紧超 n 图.

⁶⁷Day, K. and Tripathi, A., Arrangement graphs: a class of generalized star graphs. Information Processing Letters, 42(5)(1992), 235-241.

⁶⁸Chiang, W. K. and Chen, R.J., On the arrangement graph. Information Processing Letters, 66(4)(1998), 215-219.

⁶⁹Cheng, E., Lipták, L. and Sala, F., Linearly many faults in 2-tree-generated networks. Networks, 55(2)(2010) 90-98.

⁷⁰Zhang, Z., Xiong, W. and Yang, W. H., A kind of conditional fault tolerance alternating group graphs. Information Processing Letters, 110(2010) 998-1002.

⁷¹周书明, 徐俊明, Conditional fault tolerance of arrangement graphs. Information Processing Letters, 111 (21-22) (2011), 1037-1043.

⁷²林丽美, 周书明, Conditional connectivity for (n, k) -arrangement graphs. 数学研究, 45(4)(2012), 350-364.

Cheng 等人^[73] 研究了星图 S_n 和交错群图 AG_n 等的紧超连通性: 当 $n \geq 4$ 时, S_n 是紧超 $(n-1)$ 连通的; 当 $n \geq 5$ 时, AG_n 是紧超 $(2n-4)$ 连通的. 我们推广这些结果到更一般的 (n, k) 排列图. 容易验证: $A_{4,2}$ 不是紧超连通的, 所以假定 $k \geq 3$.

定理 2.13 对任何 $n \geq 4, k \geq 3$, 排列图 $A_{n,k}$ 是紧超 $k(n-k)$ 连通的.

这些结果包含在《Shuming Zhou and Jun-Ming Xu, Fault diagnosability of arrangement graphs. Information Sciences, 246 (10) (2013), 177-190》一文中.

§2.4 立方体型网络的 h 超边连通度

设 $G_0 = (V_0, E_0)$ 和 $G_1 = (V_1, E_1)$ 是两个不交的图且 $|V_0| = |V_1|$, $\sigma : V_0 \rightarrow V_1$ 是双射, $M_\sigma = \{x\sigma(x) \mid x \in V_0, \sigma(x) \in V_1\}$. 用 $G_0 \oplus_\sigma G_1$ 表示图 $G = (V_0 \cup V_1, E_0 \cup E_1 \cup M_\sigma)$. 显然, M_σ 是 G 的完备匹配. 而且, 如果 σ 是 $V(G_0)$ 上的恒等置换, 那么 $G_0 \oplus_\sigma G_0 = G_0 \times K_2$.

根据 σ 的不同, 运算 \oplus_σ 可以不同的图. 递归地运用运算 \oplus_σ , 可以一类被称为 n 维超立方体型网络 (hypercube-like networks)^[74] HL_n , 亦称双射连接图 (bijective connection graphs, 简称 BC 图^[75]). HL_n 能递归定义如下:

- (1) $HL_0 = \{G_0\}$, 其中 $G_0 = K_1$;
- (2) $G_n \in HL_n \Leftrightarrow G_n = G_{n-1} \oplus_\sigma G'_{n-1}$, 其中 $G_{n-1}, G'_{n-1} \in HL_{n-1}$.

显然, 每个图 $G_n \in HL_n$ 是 2^n 阶的 n 正则 n 连通图.

由定义, 容易验证: 超立方体 (hypercube) $Q_n = Q_{n-1} \oplus_{\sigma_1} Q_{n-1}$, 变形超立方体 (varietal hypercube)^[76] $VQ_n = VQ_{n-1} \oplus_{\sigma_2} VQ_{n-1}$, 扭立方体 (twisted cube)^[77] $TQ_n = TQ_{n-1} \oplus_{\sigma_3} TQ_{n-1}$, 局部扭立方体 (locally twisted cube)^[78] $LTQ_n = LTQ_{n-1} \oplus_{\sigma_4} LTQ_{n-1}$, 交叉立方体 (crossed cube)^[79] $CQ_n = CQ_{n-1} \oplus_{\sigma_5} CQ_{n-1}$, Möbius 立方体^[80] $MQ_n = MQ_{n-1} \oplus_{\sigma_6} MQ_{n-1}$. 至于递归循环图 (recursive circulant) $G(2^n, 4)$, 当 $n \in \{2, 3, 4\}$ 时, $V(G(2^{n-1}, 4))$ 上存在一个置换 σ 使得 $G(2^n, 4) = G(2^{n-1}, 4) \oplus_\sigma G(2^{n-1}, 4)$. 一般地, $G(2^n, 4)$ 不能从两个递归循环通过运算 \oplus_σ 而得到. 然而, Kim^[81] 证明: $V(G(2^{n-2}, 4) \square K_2)$ 中存在置换 σ 使得 $G(2^n, 4) = [G(2^{n-2}, 4) \square K_2] \oplus_\sigma [G(2^{n-2}, 4) \square K_2]$. 因此, $\{Q_n, VQ_n, TQ_n, LTQ_n, CQ_n, MQ_n, G(2^n, 4), \dots\} \subseteq HL_n$.

⁷³Cheng, E., Lipman, M. J. and Park, H. A., Super connectivity of star graphs, alternating group graphs and split-stars. *Ars Combinatoria*, 59 (2001), 107-116.

⁷⁴Vaidya, A. S., Rao, P. S. N. and Shankar, S. R., A class of hypercube-like networks. In *Proceedings of the Fifth IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1993, pp. 800-803.

⁷⁵Fan, J.-X. and Jia, X.-H., Edge-pancyclicity and path-embeddability of bijective connection graphs. *Information Sciences*, 178(2)(2008), 340-351.

⁷⁶Cheng S.-Y. and Chuang J.-H., Varietal hypercube-a new interconnection networks topology for large scale multi-computer. *Proceedings of International Conference on Parallel and Distributed Systems*, 1994, 703-708.

⁷⁷Hilbers, P. A. J., Koopman, M. R. J. and van de Snepscheut, J. L. A., The twisted cubes. In *Parallel Architectures and Languages Europe*, Lecture Notes in Computer Science. June 1987, pp.152-159.

⁷⁸Yang, X. F., Evans, D. J. and Megson, G. M., The locally twisted cubes, *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (4) (2005), 401-413.

⁷⁹Efe, K., A variation on the hypercube with lower diameter. *IEEE Transactions on Computers*, 40 (11) (1991), 1312-1316.

⁸⁰Cull, P. and Larson, S. M., The Möbius cubes. *IEEE Transactions on Computers*, 44 (5) (1995), 647-659.

⁸¹Kim, S.-Y., Lee, J.-H. and Park, J.-H., Disjoint path covers in recursive circulants $G(2^m, 4)$ with faulty elements, *Theor. Comput. Sci.* 412 (35) (2011) 4636-4649.

对于 $h \in \{0, 1\}$, $\lambda_s^{(h)}(HL_n)$ 已被确定 (见 [82,83]). 本项目确定了 $G_n \in HL_n$ 的 h 超边连通度.

定理 2.14 对任何 $n (\geq 2)$, $G_n \in HL_n$ 和 $h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\lambda_s^{(h)}(G_n) = 2^h(n-h)$.

推论 2.15 对任何 $n (\geq 2)$ 和 $h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 如果 $G_n \in \{Q_n, VQ_n, CQ_n, MQ_n, TQ_n, LTQ_n, G(2^n, 4), \dots\}$, 那么 $\lambda_s^{(h)}(G_n) = 2^h(n-h)$.

这个研究结果包含在《Xiang-Jun Li and Jun-Ming Xu, Edge-fault tolerance of hypercube-like networks. Information Processing Letters, 113 (19-21) (2013), 760-763》一文中.

注: 对于 h 超点连通度 $\kappa_s^{(h)}(G_n)$, 当 $h \in \{0, 1\}$ 时, $\kappa_s^{(h)}(G_n)$ 已被确定, 但对一般的 h , $\kappa_s^{(h)}(G_n)$ 仍未确定. 对于特殊的网络, 比如超立方体 Q_n , 当 $0 \leq h \leq n-2$ 时, Oh 等人 [84] 和 Wu 等人 [85] 独立地确定了 $\kappa_s^{(h)}(Q_n) = 2^h(n-h)$. 对于局部扭立方体 (locally twisted cubes) 网络 LTQ_n , 最近, Wei 和 Hsieh [86] 确定了: 当 $0 \leq h \leq n-2$ 时, $\kappa_s^{(h)}(LTQ_n) = 2^h(n-h)$. 最近, Ye 和 Liang [87] 证明了对任何 $h \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ 有 $\kappa_s^{(h)}(G_n) \geq 2^h(n-h)$, 等号对 CQ_n, MQ_n, LTQ_n 成立.

猜想 2.16 对任何 $n (\geq 2)$, $G_n \in HL_n$ 和 $h \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $\kappa_s^{(h)}(G_n) = 2^h(n-h)$.

对于 h 强连通度 $\kappa_0^{(h)}(G_n)$ 和 $\lambda_o^{(h)}(G_n)$, 当 $h \in \{0, 1, 2\}$ 时, 它们已被确定, 但对一般的 h , $\kappa_o^{(h)}(G_n)$ 和 $\lambda_o^{(h)}(G_n)$ 仍未确定. 注意到, 若 G_n 中含有子图 $K_{1,h}$ 且不相邻两顶点最多有一个公共邻点, 则 $\kappa_o^{(h)}(G_n) \leq f_n(h)$, 其中

$$f_n(h) = n(h+1) - \frac{1}{2}h(h+3).$$

杨伟华等人 [88] 确定了超立方体 Q_n 的 $\kappa_o^{(h)}(Q_n) = f_n(h)$ ($0 \leq h \leq n-3$, $n \geq 4$); 杨伟华等 [89] 和周进鑫等 [90] 独立确定了折叠立方体 FQ_n 的 $\kappa_o^{(h)}(FQ_n) = f_{n+1}(h)$ ($0 \leq h \leq n-3$, $n \geq 6$). 最近, 周进鑫 [91] 确定了变型超立方体 VQ_n (该网络的详细讨论见本文 §5.1): 若 $n = 3k+t$, $k \geq 3$, $0 \leq t \leq 2$, 则 $\kappa_o^{(h)}(VQ_n) = f_n(h)$ ($0 \leq h \leq n-k$).

朱强等人 [92], 杨卫华等人 [93] 和周进鑫 [91] 证明: 对任何 $G_n \in HL_n$ 和 h , 若 $0 \leq h \leq n-3$, 则 $\kappa_o^{(h)}(G_n) \geq f_n(h)$. 周进鑫 [91] 证明: 若 G_n 含 $(h+1)$ 阶子图 H 且 $|N_{G_n}(H)| = f_n(h)$, 则

⁸²Chen, Y.-C., Tan, J. J. M., Hsu, L.-H. and Kao, S.-S., Super-connectivity and super-edge-connectivity for some interconnection networks. Applied Mathematics and Computation, 140 (2003), 245-254.

⁸³Xu, J.-M., Wang, J.-W., and Wang, W.-W., On super or restricted connectivity of some interconnection networks. Ars Combinatoria, 94 (2010), 25-32.

⁸⁴Oh, A. D. and Choi, H., Generalized measures of fault tolerance in n -cube networks. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 4 (1993), 702-703.

⁸⁵Wu, J. and Guo, G., Fault tolerance measures for m -ary n -dimensional hypercubes based on forbidden faulty sets. IEEE Transactions on Computers, 47 (1998), 888-893.

⁸⁶Chia-Chen Wei, Sun-Yuan Hsieh, h -restricted connectivity of locally twisted cubes. Discrete Applied Mathematics, 217 (2) (2017), 330-339. (注: 其中参考文献 [33] 中出处应该是“Discrete Math. 243 (2002), 291-298”.)

⁸⁷Ye, L. and Liang, J., On Conditional h -Vertex connectivity of some networks. Chinese Journal of Electronics, 25 (3) (2016), 556-560.

⁸⁸Yang, W.-H. and Meng, J.-X., Extraconnectivity of hypercubes. Applied Mathematics Letters, 22 (6) (2009), 887-891.

⁸⁹Yang, W.-H. and Meng, J.-X., Extraconnectivity of folded hypercubes. Ars Combinatoria, 116 (2014), 121-127.

⁹⁰Zhang, M.-M. and Zhou, J.-X., On g -extra connectivity of folded hypercubes. Theoretical Computer Science, 593 (2015), 146-153.

⁹¹周进鑫, On g -extra connectivity of hypercube-like networks. arXiv1609.08885v1, 2016.

⁹²Zhu, Q., Wang, X.-K. and Cheng, G.-L., Reliability evaluation of BC networks. IEEE Transaction on Computers, 62 (11) (2013), 2337-2340.

⁹³Yang, W. and Lin, H., Reliability evaluation of BC networks in terms of the extra vertex- and edge-connectivity. IEEE Transactions on Computers, 63(10)(2014), 2540-2548. (注: 其中参考文献 [31] 中“2012”应该是“2013”, 见本文参考文献 [92].)

$\kappa_o^{(h)}(G_n) = f_n(h)$; 而且构造了一类 $G_n \in HL_n$ 使得 $\kappa_o^{(h)}(G_n) > f_n(h)$. 注意到当 $h \in \{0, 1, 2\}$ 时, $\kappa_o^{(h)}(G_n) = f_n(h)$. 一个有趣的问题是: 对所有的 $G_n \in HL_n$, 确定最大 h 使得 $\kappa_o^{(h)}(G_n) = f_n(h)$.

§2.5 对偶立方和交换超立方体的 h 超连通度

对偶立方 (dual-cube) DC_n 是由 Li 等人^[94] 提出来的, 它有 2^{2n+1} 个顶点, 每个顶点是长为 $(2n + 1)$ 的 $\{0, 1\}$ 字串, 有 $(n + 1)$ 个邻点; 两顶点 $u = u_{2n}u_{2n-1} \dots u_0$ 和 $v = v_{2n}v_{2n-1} \dots v_0$ 有边相连 $\Leftrightarrow u$ 和 v 仅在第 i 坐标不同, 而且

- (a) 若 $0 \leq i \leq n - 1$, 则 $u_{2n} = v_{2n} = 0$;
- (b) 若 $n \leq i \leq 2n - 1$, 则 $u_{2n} = v_{2n} = 1$.

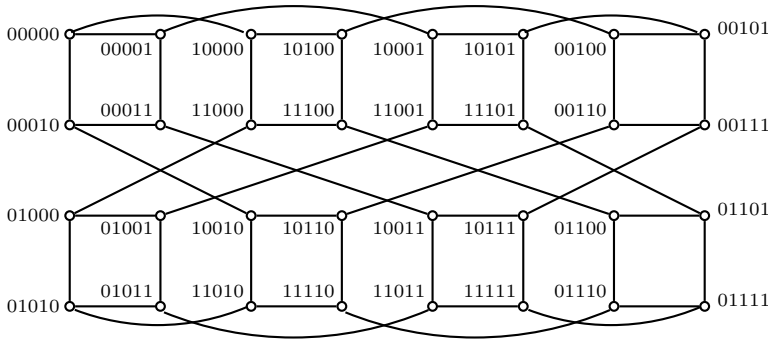


图 14 对偶立方网络 DC_2

图 14 所示的是对偶立方网络 DC_2 . 对偶立方网络 DC_n 是 $(n + 1)$ 正则 2 部图. 利用群的半直积, 周书明等人^[95] 证明 DC_n 是 Cayley 图 $C_{(\Gamma \times \Gamma) \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_2}(S)$, 其中 $\Gamma = (\mathbb{Z}_2)^n$, $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\Gamma \times \Gamma)$ 定义为

$$\phi_i(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{若 } i = 0; \\ (\beta, \alpha) & \text{若 } i = 1, \end{cases}$$

且 $S = \{(e_0, e_1, 0), \dots, (e_0, e_n, 0), (e_0, e_0, 1)\}$, 其中 e_i 如 (1.1.1) 所定义.

对每个 $h \in \{0, 1, 2\}$, 周书明等人^[96] 确定了: $\kappa_s^{(h)}(DC(n)) = 2^h(n + 1 - h)$.

下面定义交换超立方体 (exchanged hypercube). 对于给定的两个整数 s 和 t , 令

$$V(s, t) = \{u_{s+t} \dots u_{t+1} u_t \dots u_1 u_0 : u_0, u_i \in \{0, 1\}, i \in I_{s+t}\}.$$

交换超立方体 $EH(s, t)$ 的顶点集为 $V(s, t)$, 两顶点 $u = u_{s+t} \dots u_0$ 和 $v = v_{s+t} \dots v_0$ 相邻 \Leftrightarrow 它们满足下面条件: 对每个 $i \in I_{s+t}$,

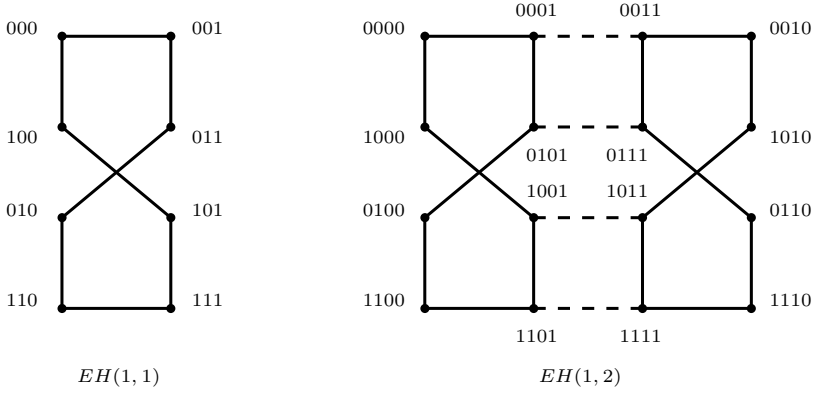
- (a) u 和 v 不同仅第 i 个或者最后一个坐标,
- (b) 如果 $i \in I_t$, 那么 $u_0 = v_0 = 1$,
- (c) 如果 $i \in I_{s+t} - I_t$, 那么 $u_0 = v_0 = 0$.

图 15 所示的是 $EH(1, 1)$ 和 $EH(1, 2)$.

⁹⁴Li, Y. and Peng, S., Dual-cubes: a new interconnection network for high-performance computer clusters, Proceedings of the 2000 international computer symposium, workshop on computer architecture, 2000, 51-57.

⁹⁵Zhou, S.-M., Chen, L.-X. and Xu, J.-M., Conditional fault diagnosability of dual-cubes. International Journal of Foundations of Computer Science, 23 (8)(2012), 1729-1749.

⁹⁶Yang, X. and Zhou, S.-M., On conditional fault tolerant of dual-cubes. International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, 28 (3) (2013), 199-213.

图 15 交换超立方体网络 $EH(1,1)$ 和 $EH(1,2)$

交换超立方体网络 $EH(s,t)$ 是由 Loh 等人^[97] 提出来的. Q_{s+t+1} 有 $(s+t+2)2^{s+t-1}$ 条边^[98]. 令 E'_i 是 Q_{s+t+1} 中满足下列条件的 i 维边子集: 对于 $e \in E'_i$, 若 $i \in I_t$, 则 e 的两端点的最后坐标为 0; 若 $i \in I_{s+t} - I_t$, 则 e 的两端点的最后坐标为 1. 从定义容易看到, $EH(s,t)$ 可以从超立方体 Q_{s+t+1} 中对称地移去所以边集 E'_i ($i \in I_{s+t}$) 得到. 因此, $EH(s,t)$ 是 Q_{s+t+1} 的支撑 2 部子图, 最小度为 $\min\{s,t\} + 1$, 最大度为 $\max\{s,t\} + 1$.

显然, 当 $s = t = n$ 时, $EH(n,n) \cong DC(n)$. 对偶立方体 $DC(n)$ 是 Cayley 图, 但当 $s \neq t$ 时, $EH(s,t)$ 显然不是正则的, 因而不是 Cayley 图.

容易看到, $EH(s,t) \cong EH(t,s)$. 因此, 可以假定 $s \leq t$. 马美杰等人^[99,100] 确定了: 如果 $1 \leq s \leq t$, 那么 $\kappa_s^{(0)}(EH(s,t)) = \lambda_s^{(0)}(EH(s,t)) = s + 1$, $\kappa_s^{(1)}(EH(s,t)) = \lambda_s^{(1)}(EH(s,t)) = 2s$. 这个结果被推广到到更一般的情形.

定理 2.17 如果 $1 \leq s \leq t$, 那么对任何 $h, 0 \leq h \leq s$,

$$\kappa_s^{(h)}(EH(s,t)) = \lambda_s^{(h)}(EH(s,t)) = 2^h(s+1-h).$$

因为 $EH(n,n) \cong DC(n)$, 所以定理 2.17 包含了周书明等人^[96] 的结果.

推论 2.18 对任何 h , 如果 $0 \leq h \leq n$, 那么

$$\kappa_s^{(h)}(DC(n)) = \lambda_s^{(h)}(DC(n)) = 2^h(n+1-h).$$

这些结果包含在《Xiang-Jun Li and Jun-Ming Xu, Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes. Information Processing Letters, 113 (14-16) (2013), 533-537.》一文中.

§2.6 分层立方网络

令 $V_n = \{x_1x_2 \cdots x_n : x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n\}$. 若 $x = x_1x_2 \cdots x_n \in V_n$, 则 $\bar{x} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \in V_n$ 称为 x 的补, 其中 $\bar{x}_i = \{0,1\} \setminus \{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$. xQ_n 表示点 x 和超立方体 Q_n 的笛卡尔乘积 $\{x\} \times Q_n$.

⁹⁷Loh, P. K. K., Hsu, W. J. and Pan, Y., The exchanged hypercube. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 16 (9) (2005), 866-874.

⁹⁸Chen, Y.-W., A comment on “the exchanged hypercube”. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 18(4) (2007), 576.

⁹⁹Ma, M., The connectivity of exchanged hypercubes, Discrete Mathematics Algorithms and Applications 2 (2) (2010) 213 - 220.

¹⁰⁰Ma, M. and Zhu, L., The super connectivity of exchanged hypercubes. Information Processing Letters, 111 (2011), 360-364.

n 维分层立方网络 (hierarchical cube network) HCN_n 是由 Ghose 和 Desai^[101] 提出来的, 它有点集 $V_n \times V_n$, 由 2^n 个超立方体 $\{xQ_n : x \in V_n\}$ 并按下列规则在两个超立方体之间的添加边组成: xQ_n 中点 (x, y) 连到 yQ_n 中点 (y, x) 如果 $x \neq y$, 或者 $\bar{x}Q_n$ 中点 (\bar{x}, \bar{y}) 如果 $x = y$.

HCN_n 是 2^{2n} 个顶点的 $(n + 1)$ 正则图. 图 16 所示的是分层立方网络 HCN_2 .

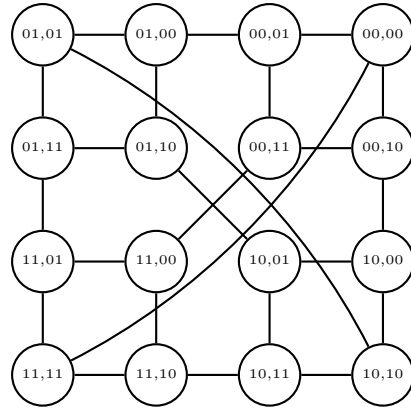


图 16 分层立方网络 HCN_2

Chiang 等人 (1996)^[102] 和 Fu 等人 (2002)^[103] 证明了: $\kappa(HCN_n) = \lambda(HCN_n) = n + 1$.

周书明等人 (2016)^[104] 证明了: 对于 $n \geq 3$, $\kappa_s^{(1)}(HCN_n) = 2n$, 且 $\kappa_s^{(2)}(HCN_n) = 4n - 4$.

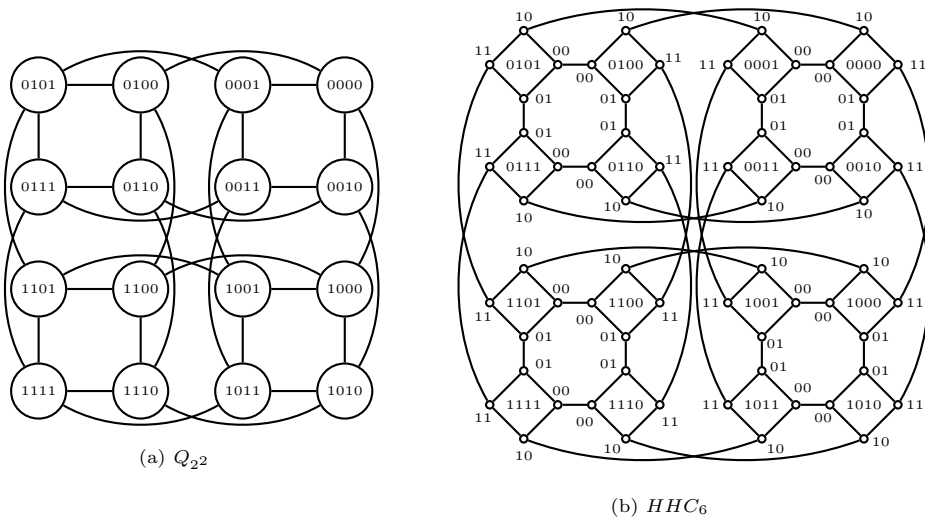


图 17 分层超立方体网络 HHC_6

定理 2.19 (李向军等, 2019^[105])

¹⁰¹Ghose, K. and Desai, K. R., Hierarchical cubic network, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 6 (4) (1995), 427-435.

¹⁰²W.-K. Chiang, R.-J. Chen, Topological properties of hierarchical cubic networks. Journal of Systems Architecture, 42 (4) (1996) 289-307.

¹⁰³J.-S. Fu, G.-H. Chen, D.-R. Duh, Node-disjoint paths and related problems on hierarchical cubic networks. Networks, 40 (2002), 142-154.

¹⁰⁴S. Zhou, S. Song, X. Yang, L. Chen, On conditional fault tolerance and diagnosability of hierarchical cubic networks. Theoretical Computer Science, 609 (2016), 421-433.

¹⁰⁵李向军, 刘敏, 严政, 徐俊明, On conditional fault tolerance of hierarchical cubic networks. Theoretical Computer Science, 761 (2019), 1-6.

$$\begin{aligned}\kappa_s^{(h)}(HCN_n) &= 2^h(n+1-h), \quad 0 \leq h \leq n-1; \\ \lambda_s^{(h)}(HCN_n) &= 2^h(n+1-h), \quad 0 \leq h \leq n.\end{aligned}$$

与分层立方网络类似的是 n 维分层超立方体网络 (hierarchical hypercube networks) HHC_n , 它是由 Malluhi 和 Bayoumi^[106] 提出来的, 其中 $n = 2^m + m$, 它是 Q_{2^m} 和 Q_m 替代图 $Q_{2^m} \otimes Q_m$. 容易验证, 由定理 1.17 知 HHC_n 是 Cayley 图 (见第 §1.4 节). 图 17 所示的是分层超立方体网络 HHC_6 , 其中 $m = 2$ 且 $n = 6$. 周书明等人^[107] 确定了 $\kappa_o^{(1)}(HHC_n) = 2m$, $\kappa_o^{(2)}(HHC_n) = 3m - 2$ ($m \geq 2$). 目前没有关于 $\kappa_s^{(h)}(HCN_n)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(HCN_n)$ 的任何结果. 值得关注.

§2.7 增广立方体网络的 2 强连通度

n 维增广立方体 (augmented cube) 网络 AQ_n 有顶点集 $V(AQ_n) = \{x_n \cdots x_1 : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$, 按下述方式递归构造而成:

$AQ_1 = K_2$, $V(K_2) = \{0, 1\}$. 对 $n \geq 2$, AQ_n 是有两个不交的 $(n-1)$ 维增广立方体 AQ_{n-1}^0 和 AQ_{n-1}^1 , 其中 $V(AQ_{n-1}^0) = \{0x_{n-1} \cdots x_2x_1 : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n-1\}$ 和 $V(AQ_{n-1}^1) = \{1x_{n-1} \cdots x_2x_1 : x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n-1\}$, AQ_{n-1}^0 中的点 $X = 0x_{n-1} \cdots x_2x_1$ 与 AQ_{n-1}^1 中的点 $Y = 1y_{n-1} \cdots y_2y_1$ 有边相连 \Leftrightarrow 或者 (i) $x_i = y_i, 1 \leq i \leq n-1$, 或者 (ii) $x_i = \bar{y}_i, 1 \leq i \leq n-1$. 图 18 所示的是 AQ_1, AQ_2 和 AQ_3 .

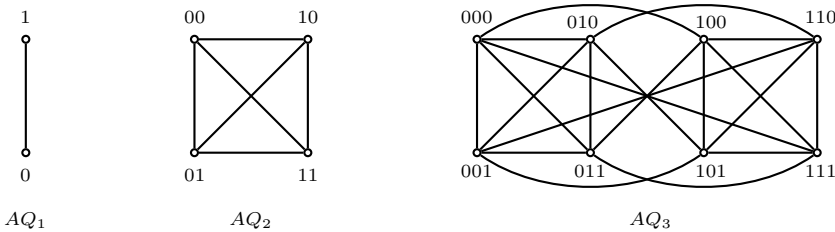


图 18 增广立方体网络 AQ_1, AQ_2 和 AQ_3

增广立方体 AQ_n 是由 Choudum 和 Sunitha^[108] 提出来的, 它是 $(2n-1)$ 正则 $(2n-1)$ 连通的 ($n \geq 4$), $\kappa(AQ_3) = 4$, $\kappa(AQ_2) = 3$, $\kappa(AQ_1) = 1$, 直径 $d(AQ_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, 而且 AQ_n 是 Cayley 图 $C_{(\mathbb{Z}_2)^n}(S)$, $S = \{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n\}$, 其中 e_i ($1 \leq i \leq n$) 如 (1.1.1) 所定义,

$$e'_i = \underbrace{0 \cdots 0}_{n-i} \underbrace{1 \cdots 1}_i \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.2.9)$$

Choudum 和 Sunitha^[109] 还进一步确定了 AQ_n 的所有自同构.

马美杰等人^[110] 证明: $\kappa_o^{(1)}(AQ_n) = 4n - 8$ ($n \geq 6$), $\lambda_o^{(1)}(AQ_n) = 4n - 4$ ($n \geq 2$). 对于 $h = 2$, 我们得到如下结果:

¹⁰⁶Malluhi, Q.M. and Bayoumi, M.A., The hierarchical hypercube: A new interconnection topology for massively parallel systems. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 5(1) (1994), 17-30.

¹⁰⁷Zhou, S.-M., Lin, L.-M. and Xu, J.-M., Conditional fault diagnosis of hierarchical hypercubes. International Journal of Computer Mathematics, 89 (16) (2012), 2152-2164.

¹⁰⁸Choudum, S. A. and Sunitha, V., Augmented cubes. Networks, 40 (2) (2002), 71-84.

¹⁰⁹Choudum, S. A. and Sunitha, V., Automorphisms of augmented cubes. International Journal of Computer Mathematics, 85 (11) (2008), 1621-1627.

¹¹⁰Ma, M., Liu, G. and Xu, J.-M., The super connectivity of augmented cubes. Information Processing Letters, 106 (2) (2008), 59-63. See a corrigendum: M. Ma, X. Tan, J.-M. Xu, G. Liu, A note on "The super connectivity of augmented cubes". Information Processing Letters, 109 (12) (2009), 592-593.

定理 2.20 $\kappa_o^{(2)}(AQ_n) = 6n - 17$ ($n \geq 9$), $\lambda_o^{(2)}(AQ_n) = 6n - 9$ ($n \geq 4$).

这些成果包含在《Meijie Ma, Yaxing Song and Jun-Ming Xu, Fault-tolerant analysis of augmented cubes. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 10 (1) (2013), 37-55》一文中.

对于一般的 $h \geq 3$, 目前还没有确定 $\kappa_o^{(h)}(AQ_n)$ 和 $\lambda_o^{(h)}(AQ_n)$. 至于 $\kappa_s^{(h)}(AQ_n)$ 和 $\lambda_s^{(h)}(AQ_n)$, 目前也没有任何结果.

§2.8 由对换生成的 Cayley 图

设 \mathcal{T}_n 是 Ω_n 中的对换集, $S \subseteq \mathcal{T}_n$. 对换图 (transposition graphs) T_S 有顶点集 $I_n = \{1, \dots, n\}$ 和边集 $\{ij : (i, j) \in S\}$. 注意, Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 有 $n!$ 个顶点. 因为一个对换改变置换的奇偶性, 所以每条边连接一个奇置换和一个偶置换. 因此, Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 是 2 部图. 而且对任何两个 $S, S' \subseteq \mathcal{T}_n$, $T_S \cong T_{S'} \Leftrightarrow C_{\Omega_n}(S) \cong C_{\Omega_n}(S')$.

例如, 若 $S = \{(1, i) : 2 \leq i \leq n\}$, 则 T_S 是 $K_{1, n-1}$, 对应的 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 是星图 S_n (见本文第 §2.2 节). 这就是为什么 Akers 和 Krishnamurthy 当初把 S_n 称为星图的原因.

又例如, 若 $S = \{(i, i + 1) : 1 \leq i \leq n - 1\}$, 则 T_S 是路 P_n , 对应的 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 是泡泡序列图 (bubble-sort graph) B_n . 这种类型的对换就像一串气泡排成一条直线, 或许正是这个原因, Akers 和 Krishnamurthy 当初把 B_n 称为泡泡序列图. 图 19 所示的是泡泡序列图 B_2, B_3 和 B_4 .

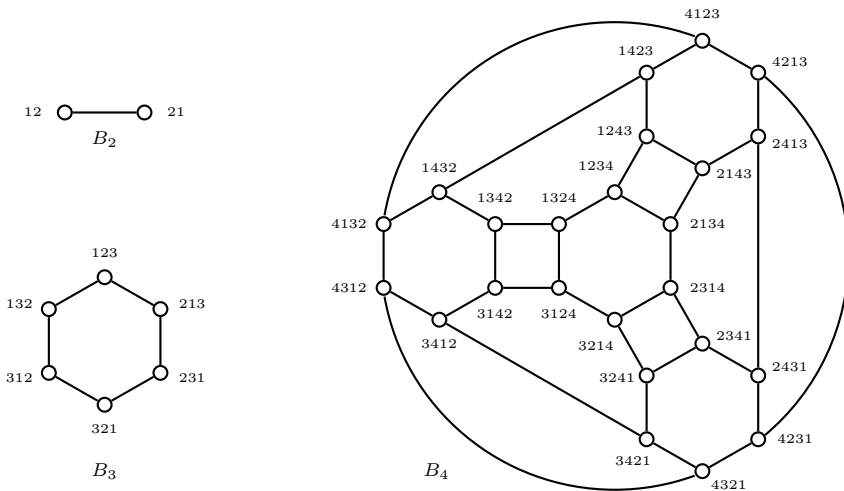


图 19 泡泡序列图 B_2, B_3 和 B_4 .

Cheng *et al.* (2006) ^[111] 确定了 $\kappa_s^1(B_n) = 2n - 4$ ($n \geq 3$), 杨卫华等人 (2010) ^[112] 确定了 $\kappa_s^2(B_n) = 4(n - 3)$ ($n \geq 4$), Shi *et al.* (2017) ^[113] 确定了 $\kappa_s^3(B_n) = 8(n - 4)$ ($n \geq 6$) 并猜想: 当 $n \geq 3$ 时, 对任何 k ($0 \leq k \leq n/2$) 均有 $\kappa_s^k(B_n) = 2^k(n - k - 1)$. 我们证明了这个猜想, 并得到如下结果.

¹¹¹E. Cheng, L. Lipták, Structural properties of Cayley graphs generated by transposition trees, *Congressus Numerantium*, 180 (2006), 81-96.
¹¹²Yang, W.-H., Li, C.-H. and Meng, J.-X., Conditional connectivity of Cayley graphs generated by transposition trees, *Information Processing Letters*, 110(23)(2010), 1027-1030.
¹¹³L.-S Shi, P. Wu, Conditional connectivity of bubble sort graphs, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica-English Series*, 33 (4) (2017), 933-944.

定理 2.21 当 $n \geq 3$ 时, 对任何 k ($0 \leq k \leq n/2$) 均有

$$\kappa_s^k(B_n) = \lambda_s^k(B_n) = 2^k(n - k - 1).$$

这个工作发表在《Xiang-Jun Li, Xue-Qian Zeng; Jun-Ming Xu, Generalized measures of fault tolerance for bubble sort networks. Applied Mathematics and Computation, Volume 363, 15 December 2019, 124630.》一文中.

Polya (见 Berge^[114]) 证明了: 集 $S \subseteq \mathcal{T}_n$ ($|S| = (n - 1)$) 生成 $\Omega_n \Leftrightarrow$ 对换图 T_S 是树, 亦称对换树 (transposition tree). 因此, 人们感兴趣的是由对换树 T_S 导出的 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$, 简记为 \mathcal{T}_n . 它是 $(n - 1)$ 正则 $(n - 1)$ 连通 2 部点可迁图, 由命题 1.3 知, $\lambda_s^{(1)}(\mathcal{T}_n) = 2(n - 2)$.

当 $n \geq 4$ 时, 杨卫华等人^[115] 确定了

$$\begin{aligned} \kappa_s^{(2)}(\mathcal{T}_n) &= \lambda_s^{(2)}(\mathcal{T}_n) = g(n - 3), \text{ 其中 } g \text{ 是 } \mathcal{T}_n \text{ 的围长;} \\ \kappa_o^{(2)}(\mathcal{T}_n) &= 3n - 8 \text{ 且 } \lambda_o^{(2)}(\mathcal{T}_n) = 3n - 7. \end{aligned}$$

这里提及一下几类由对换图 T_S 不是树的连通图而导出的 Cayley 图. 若 $T_s \cong K_{n,n-k}$, 即 $S = \{(i, j) : 1 \leq i \leq k, k + 1 \leq j \leq n\}$, 则 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 称为广义星 (generalized star) 图 $GS_{n,k}$. 图 20 所示的图是 $GS_{4,2}$. 显然, $GS_{n,1}$ 是星图 S_n . 所以, $GS_{n,k}$ 是星图 S_n 的推广, 故称为广义星. 广义星图 $GS_{n,k}$ 是由 Fragopoulou 等人^[116,117] 首先提出并研究的.

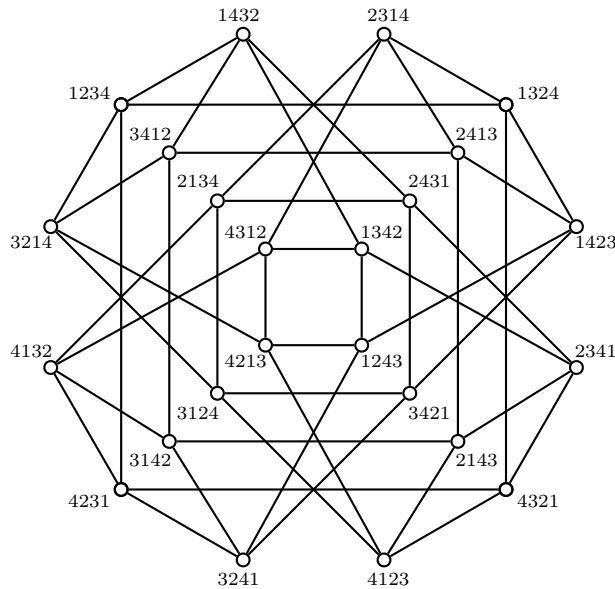


图 20 广义星图 $GS_{4,2}$

另外, 若 $T_s \cong C_n$, 即 $S = \{(i, i + 1) : 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{(n, 1)\}$, 则 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 称为泡泡圈序列 (modified bubble-sort) 图 MB_n ; 若 $T_s \cong K_n$, 即 $S = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$, 则 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$ 称为完全对换 (complete-transposition) 图 CT_n .

¹¹⁴Berge, C., Principles of Combinatorics, Academic Press, New York, 1971, p118
¹¹⁵Yang, W.-H., Li, C.-H. and Meng, J.-X., Conditional connectivity of Cayley graphs generated by transposition trees, Information Processing Letters, 110(23)(2010), 1027-1030.
¹¹⁶Fragopoulou, P., Communication and fault tolerance algorithms on a class of interconnection networks. PhD thesis, Queen University. Kingston, Canada, 1995.
¹¹⁷Fragopoulou, P. and Akl, S. G., Optimal communication primitives on the generalized hypercube network. J. Parallel Distrib. Comput. 32(2)(1996), 173-187.

喻祥明和黄晓晖^[118]确定了 $\kappa_o^{(2)}(MB_n) = 3n - 5$ ($n \geq 4$). 王国忠和师海忠^[119]证明了

$$\begin{aligned}\kappa_o^{(1)}(CT_n) &= n(n-1) - 2, \quad \kappa_o^{(2)}(CT_n) = \frac{3n(n-1)}{2} - 6 \quad (n \geq 4); \\ \lambda_o^{(1)}(CT_n) &= n(n-1) - 2, \quad \lambda_o^{(2)}(CT_n) = \frac{3n(n-1)}{2} - 4 \quad (n \geq 3).\end{aligned}$$

这几类 Cayley 图的研究成果很少, 应该值得进一步研究. 特别地, 当 $h \geq 3$ 时, 确定 $\kappa_s^{(h)}(\mathcal{T}_n)$, $\lambda_s^{(h)}(\mathcal{T}_n)$, $\kappa_o^{(h)}(\mathcal{T}_n)$, $\lambda_o^{(h)}(\mathcal{T}_n)$.

§2.9 递归网络的嵌入连通度

大规模计算机系统网络拓扑, 比如超立方体型网络 HL_n , 星网络 S_n 等, 都具有递归结构, 一是为了方便网络的扩充, 二是扩充后的网络照样能运行被用在原始网络中路由算法或者维修策略. 点和边发生故障可能会导致整个网络不连通, 但人们希望每个剩余分支能具有与原来网络一样的拓扑结构. 处于这种考虑, 杨玉星和王世英^[120]提出嵌入连通度 (embedded connectivity) 概念.

设 G_n 是 n 维递归网络, 则对于正整数 h ($h \leq n-1$), 存在子网络 $G_h \subset G_n$. 令 $\delta_h = \delta(G_h)$.

设 $F \subset V(G_n)$ (或者 $F \subset E(G_n)$), h 是整数且 $1 \leq h \leq n-1$. 若 $G_n - F$ 不连通, 而且每个顶点被包含在某个子网络 G_h 中, 则称 F 为 G_n 的嵌入 h 点割 (或者嵌入 h 边割). 图 G_n 的嵌入 h 连通度 $\zeta_h(G_n)$ (或者嵌入 h 边连通度 $\eta_h(G_n)$) 定义为最小嵌入 h 点割中的点数 (或者最小嵌入 h 边割中的边数).

由定义, 如果 F 是 G_n 的嵌入 h 点割, 那么 $G_n - F$ 包含子网络 G_h . 于是, $\delta(G_n - F) \geq \delta_h$, 这意味着 F 是 G_n 的超 δ_h 点割. 因此, $\kappa_s^{(\delta_h)}(G_n) \leq |F| = \zeta_h(G_n)$. 同样地, $\lambda_s^{(\delta_h)}(G_n) \leq \eta_h(G_n)$. 这个简单的观察和 (2.2.6) 提供了 $\zeta_h(G_n)$ 和 $\eta_h(G_n)$ 的下界.

命题 2.22 对于 $h \leq n-1$,

- (a) 若 $\zeta_h(G_n)$ 存在, 则 $\zeta_h(G_n) \geq \kappa_s^{(\delta_h)}(G_n) \geq \kappa_o^{(\delta_h)}(G_n)$;
- (b) 若 $\eta_h(G_n)$ 存在, 则 $\eta_h(G_n) \geq \lambda_s^{(\delta_h)}(G_n) \geq \lambda_o^{(\delta_h)}(G_n)$.

注意到: 对任何 h , 若 $1 \leq h \leq n-2$, 则 $\kappa_s^{(h)}(Q_n) = 2^h(n-h)$; 若 $1 \leq h \leq n-1$, 则 $\lambda_s^{(h)}(Q_n) = 2^h(n-h)$. 通过表示 $Q_n = Q_h \times Q_{n-h}$ 容易建立 $\zeta_h(Q_n)$ 和 $\eta_h(Q_n)$ 的上界, 再利用命题 2.22 立即得到下面的结果.

定理 2.23 对任何 h , $\begin{cases} \zeta_h(Q_n) = 2^h(n-h) & \text{若 } 1 \leq h \leq n-2; \\ \eta_h(Q_n) = 2^h(n-h) & \text{若 } 1 \leq h \leq n-1. \end{cases}$

对于星图 S_n , 杨玉星和王世英在提出这些概念的同时, 利用命题 2.22, 确定了 $\zeta_2(S_n) = \eta_2(S_n) = 2n-4$ ($n \geq 3$), $\eta_3(S_n) = 6(n-3)$ ($n \geq 4$), 并且对任何 h ($1 \leq h \leq n-1$), 给出 $\eta_h(S_n) \leq h!(n-h)$. 我们获得 $\zeta_h(S_n) \leq h!(n-h)$. 由定理 2.6 对任何整数 h , 若 $1 \leq h \leq n-1$, 则 $\kappa_s^{(h)}(S_n) = \lambda_s^{(h)}(S_n) = h!(n-h)$. 利用这些结果和命题 2.22, 立即得到下面的结果.

定理 2.24 对任何 h , 若 $1 \leq h \leq n-1$, 则 $\zeta_h(S_n) = \eta_h(S_n) = h!(n-h)$.

对于泡泡序列图 B_n (见本文第 §2.8 节), 杨玉星和王世英在提出这些概念的同时, 利用命题 2.22, 确定了 $\zeta_2(B_n) = 2n-4$ ($n \geq 3$) 并给出 $\eta_h(B_n)$ 的上界.

¹¹⁸喻祥明, 黄晓晖, Restricted Vertex connectivity of modified bubble sort graphs. 新疆大学学报, 29 (1) (2012), 78-81.
¹¹⁹王国忠, 师海忠, 完全对换网络的限制连通度. 运筹学学报, 17(3)(2013), 57-64.
¹²⁰Yang, Y.-X. and Wang, S.-Y., Conditional connectivity of star graph networks under embedded restriction. Information Sciences, 199 (15) (2012), 187-192.

命题 2.25 对任何整数 h ($1 \leq h \leq n-1, n \geq 2$) 有 $\eta_h(B_n) \leq h!(n-h)$.

根据已知的结果和命题 2.25, 很容易证明 $\eta_2(B_n) = 2n-4$ ($n \geq 3$)^[121].

利用对 n (≥ 4) 进行数学归纳, 我们证明了 $\eta_3(B_n) \geq 6(n-3)$. 由命题 2.25, 从而确定了 $\eta_3(B_n) = 6(n-3)$ ^[122].

定理 2.26 若 $n \geq 4$, 则 $\eta_3(B_n) = 6(n-3)$.

这些结果被包含在论文《Xiang-Jun Li, Qi-Qi Dong, Zheng Yan and Jun-Ming Xu, Embedded connectivity of recursive networks. Theoretical Computer Science, 653 (2016), 79-86》中.

对一般的 h , 仍然无法确定 $\eta_h(B_n)$ 和 $\eta_h(B_n)$. 利用命题 2.22 和命题 2.25, 只需确定 $\kappa_s^{(h)}(B_n)$ 和 $\kappa_s^{(h)}(B_n)$; 或者 $\kappa_o^{(h)}(B_n)$ 和 $\kappa_o^{(h)}(B_n)$.

§2.10 字典乘积和直积图的连通度

设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个无向图. 作为图的运算, G_1 和 G_2 的笛卡尔乘积 (cartesian product), 强乘积 (strong product), 字典乘积 (lexicographic product) 和直积 (direct product) 是图的重要运算, 它们的顶点集都是 $V_1 \times V_2$, 差别只是边的连接方式.

对于笛卡尔乘积 $G_1 \square G_2$, 两顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 相连 $\Leftrightarrow x_1 = y_1$ 且 $x_2y_2 \in E_2$ 或者 $x_2 = y_2$ 且 $x_1y_1 \in E_1$;

对于强乘积 $G_1 \boxtimes G_2$, 两顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 相连 \Leftrightarrow 对每个 $i = 1, 2$, 或者 $x_i = y_i$ 或者 $x_iy_i \in E_i$;

对于字典乘积 $G_1[G_2]$, 两顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 相连 $\Leftrightarrow x_1y_1 \in E_1$, 或者 $x_1 = y_1$ 且 $x_2y_2 \in E_2$;

对于直积 $G_1 \times G_2$, 两顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 相连 $\Leftrightarrow x_1y_1 \in E_1$ 且 $x_2y_2 \in E_2$.

图 21 展示了 K_2 和 P_2 的各种乘积图, 其中 $V(K_2) = \{a, b\}$, $V(P_2) = \{x, y, z\}$. 注意: 在文献中, 强乘积也称 Kronecker 乘积 (见本文第 §6.1 节).

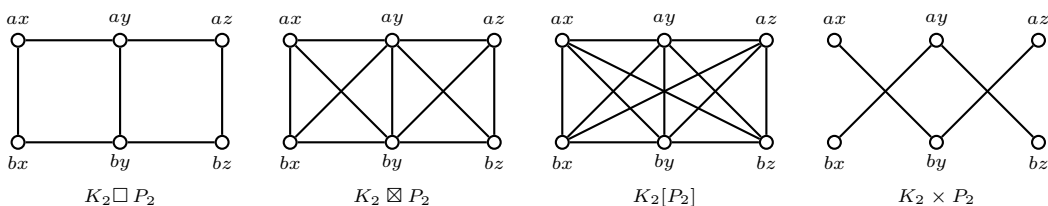


图 21 K_2 和 P_2 的 4 种乘积图

对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是 Cayley 图 $C_{\Gamma_i}(S_i)$, e_i 是 Γ_i 的单位元. 则 G_1 和 G_2 的这 4 种乘积都是 Cayley 图 $C_{\Gamma}(S)$, 其中 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, S 是由乘积的不同而不同 (见^[123] 中的命题 7)^[124]:

对于笛卡尔乘积 $G_1 \square G_2$, $S = (S_1 \times \{e_1\}) \cup (\{e_2\} \times S_2)$;

¹²¹注: 杨玉星等人也陈述了这个结果, 但他们在证明中错误地假定围长 $g(B_n) = 6$. 实际上, 当 $n \geq 4$ 时, $g(B_n) = 4$.
¹²²注: 杨玉星等人也陈述了这个结果. 然而, 他们在证明中错误假定 $\lambda_s^{(2)}(B_n) = 6(n-3)$. 事实上, 当 $n \geq 4$ 时, $\lambda_s^{(2)}(B_n) = 4(n-3)$.

¹²³Heydemann, M. C. and Ducourthial, B., Cayley graphs and interconnection networks. In: G. Hahn, G. Sabidussi (Eds.), Graph Symmetry (Montreal, PQ, 1996), NATO Advanced Science Institutes Series C, in: Mathematica and Physical Sciences, vol. 497, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, pp. 167-224.

¹²⁴注: 李峰等人在 [Li, F., Wang, W., Xu, Z., Zhao, H., Some results on the lexicographic product of vertex-transitive graphs. Applied Mathematics Letters, 24 (2011), 1924-1926.] 一文的定理 2.4 中再次陈述并证明这个结论: 两个 Cayley 图的字典乘积仍是 Cayley 图. 但定理的陈述和证明中出现没有定义的符号 “ Φ_2 ” (拟为 \bar{S}_2). 另外, 该文

对于强乘积 $G_1 \boxtimes G_2$, $S = (S_1 \times \{e_1\}) \cup (\{e_2\} \times S_2) \cup (S_1 \times \Gamma_2)$;

对于字典乘积 $G_1[G_2]$, $S = (S_1 \times \Gamma_2) \cup (\{e_1\} \times S_2)$;

对于直积 $G_1 \times G_2$, $S = S_1 \times S_2$.

先前的研究确定了笛卡尔乘积图的连通度 (参见^[125,126]) 和强乘积图的连通度 (参见^[127]):

$$\begin{aligned}\lambda(G_1 \square G_2) &= \min\{\delta_1 + \delta_2, \lambda_1 v_2, \lambda_2 v_1\}; \\ \kappa(G_1 \square G_2) &= \min\{\kappa_1 v_2, \kappa_2 v_1, \delta_1 + \delta_2\}. \\ \lambda(G_1 \boxtimes G_2) &= \min\{\lambda_1(v_2 + 2\varepsilon_2), \lambda_2(v_1 + 2\varepsilon_1), \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2\}; \\ \kappa(G_1 \boxtimes G_2) &= \min\{\delta_1 v_2, \delta_2 v_1, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2\}.\end{aligned}$$

我们也获得字典乘积图边连通度, 其点连通度仍然没有被确定.

定理 2.27 设 G_1 和 G_2 是两个非平凡图. 若 G_1 是连通的, 则

$$\lambda(G_1[G_2]) = \min\{\lambda_1 v_2^2, \delta_2 + \delta_1 v_2\}.$$

对于直积图 $G_1 \times G_2$ 的点连通度, Mamut 和 Vumar^[128] 得到

$$\kappa(K_m \times K_n) = (m-1)(n-1), \quad n \geq m \geq 2, \quad n \geq 3.$$

后来, Guji 和 Vumar^[129] 证明了: 对于 2 部图 G ,

$$\kappa(G \times K_n) = \min\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\}, \quad n \geq 3,$$

并且猜想这个结论对非 2 部图 G 也成立. 当 $n = 2$ 时, Wang 和 Wu^[130] 证明了这个猜想. Wang 和 Xue^[131] 也声称证明了这个猜想. Wang 和 Yang^[132] 得到

$$\kappa(G \times K_2) = \min\{2\kappa(G), \min\{|X| + 2|Y|\}\},$$

其中 $X, Y \subset V(G)$ 且满足某些要求. 他们在另一篇论文^[133] 中确定了一般图 G 与完全 t 部图直积的连通度. Tang 等人^[134] 确定了完全图与完全 t 部图直积的连通度.

中定理 2.2 断言: 边可迁图的字典乘积仍是边可迁的. 事实上, Imrich 等人在 [Edge-transitive lexicographic and cartesian product. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, DOI: 10.7151/dmgt.1892, May 2016] 中给出一个简单的反例 $K_3[P_2]$, 并进一步证明: 设 G_1 是连通非完全图, G_2 是任意图, 则 $G_1[G_2]$ 是边可迁的 $\Leftrightarrow G_1$ 是边可迁的且 G_1 是无边图.

¹²⁵Xu, J.-M. and Yang, C., Connectivity of Cartesian product graphs. *Discrete Math.*, 306(1) (2006), 159-165.

¹²⁶Xu, J.-M. and Yang, C., Connectivity and super-connectivity of Cartesian product graphs. *Ars Combinatoria*, 94 (2010), 25-32.

¹²⁷杨超, 徐俊明, Connectivity and edge-connectivity of strong product graphs. *中国科学技术大学学报*, 38 (5) (2008), 449-455.

¹²⁸Mamut, A. and Vumar, E., Vertex vulnerability parameters of Kronecker product of complete graphs. *Inform. Process. Lett.* 106 (2008) 258-262.

¹²⁹Guji, R. and Vumar, E., A note on the connectivity of Kronecker products of graphs. *Appl. Math. Lett.* 22 (2009) 1360-1363.

¹³⁰Wang, Y. and Wu, B., Proof of a conjecture on connectivity of Kronecker product of graphs. *Discrete Mathematics* 311 (2011) 2563 - 2565.

¹³¹Wang, W. and Xue, N.-N., Connectivity of direct products of graphs. arXiv:1102.5180, <http://arxiv.org/abs/1102.5180>.

¹³²Wang, W. and Yan, Z., Connectivity of Kronecker products by K_2 . *Applied Mathematics Letters*, 25 (2012), 172-174.

¹³³Wang, W. and Yan, Z., Connectivity of Kronecker products with complete multipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161 (10-11) (2013), 1655-1659.

¹³⁴Tang, D., Wang, H. and Shan, E., Vertex vulnerability parameters of Kronecker products of complete multipartite graphs and complete graphs. *Operations Research Transactions (运筹学学报)*, 16 (1) (2012), 31-40.

对于直积图 $G_1 \times G_2$ 的边连通度, Cao 等人^[135] 证明了: $\lambda(G \times K_n) = \min\{(n-1)\delta(G), n(n-1)\lambda(G)\}$, 其中 $n \geq 3$. 当 $n = 2$ 时, 我们确定了 $\lambda(G \times K_2)$. 令 $\beta(G)$ 是最小边数, 它们被删去导致一个 2 部图. 显然, $\beta(G) = 0 \Leftrightarrow G$ 是 2 部图. 对每个 $j \geq \lambda$, 令 $\beta_j(G) = \min\{\beta(C) : C \text{ 是 } G - B \text{ 中分支, } B \text{ 是 } G \text{ 中边数为 } j \text{ 的割}\}$. 利用这些记号, 我们结果能被陈述如下.

定理 2.28 设 G 是 $\lambda(> 0)$ 边连通图, $\delta = \delta(G)$, $\beta = \beta(G)$ 且 $\beta_j = \beta_j(G)$, 则

$$\lambda(G \times K_2) = \min\{2\lambda, 2\beta, \min_{j=\lambda}^{\delta}\{j + 2\beta_j\}\}. \quad (2.2.10)$$

这些结果发表在《Cao Yang and Jun-Ming Xu, Connectivity of lexicographic product and direct product of graphs. Ars Combinatoria, 111 (2013), 3-12.》一文中.

遗憾的是, 对一般图的 $\kappa(G_1 \times G_2)$ 和 $\lambda(G_1 \times G_2)$ 还没有被确定.

欧见平^[136] 讨论了这 4 种乘积图的超连通性.

§2.11 有向图的 k 连通和超连通性

设 D 是顶点集为 $V(D)$ 的有限简单有向图. $V(D)$ 中的顶点 v 的度 $d(v)$ 被定义为 v 的出度 $d^+(v)$ 和入度 $d^-(v)$ 中的最小值. 如果有向图 D 的最小度为 δ , 连通度为 κ , 则 $\kappa \leq \delta$. 如果 $\kappa = \delta$, 则称有向图是极大连通的. 对极大连通的有向图 D 的每个最小点割 S , 如果 $D - S$ 要么是非强连通的且至少有一个平凡的强连通分支, 要么是平凡的, 则称 D 是超连通的. 我们通过点数 v , 边数 ε 和最小度 δ 给出有向图或二部有向图在最小度给定时是极大连通的或超连通的充分条件, 即

定理 2.29 设 $k \geq 2$ 是整数, D 是 v 个点 ε 条边, 最小度 $\delta \geq k$, 强连通度为 κ 的有向图. 如果 $\varepsilon > v(v-1) - (\delta-k+2)(v-\delta-1)$, 或者 D 是 2 部图且 $\varepsilon > v\delta + \left\lceil \frac{1}{2}(v-2\delta + \frac{k-1}{2})^2 \right\rceil$, 那么 $\kappa \geq k$.

定理 2.30 设 D 是 v 个点 ε 条边, 最小度 $\delta \geq 2$, 强连通度为 $\kappa = \delta$ 的有向图. 如果 $\varepsilon \geq v(v-1) - 2(v-\delta-2)$, 或者 D 是 2 部图且 $\varepsilon > v\delta + \left\lceil \frac{1}{2}(v - \frac{3\delta}{2})^2 \right\rceil$, 那么 D 是超连通的.

并举例说明这些条件中的下界是紧的. 这些结果发表在《洪振木, Volkman Lutz, 徐俊明, Sufficient conditions for digraphs to be maximally connected and super-connected. 中科大报, 48 (8) (2018), 612-617》一文中.

¹³⁵Cao, X.-L., Brglez, Š., Špacapan, S. and Vumar, E., On edge connectivity of direct products of graphs. Information Processing Letters, 111 (2011), 899-902.

¹³⁶Ou, J.-P., On optimizing edge-connectivity of product graphs. Discrete Mathematics, 311 (6) (2011), 478-492.

§3 网络故障诊断研究

用图 $G = (V, E)$ 来模拟计算机处理系统互连网络的拓扑结构, 其中 V 中点代表网络中的处理器, E 中边代表处理器之间的连线. G 中的顶点被称为故障点 (fault-vertex), 如果它对应的网络中处理器发生故障. 子集 $F \subset V(G)$ 被称为故障集, 如果 F 中每个顶点都是故障点.

在多处理器计算机系统中, 处理器的故障是不可避免的, 识别故障处理器能力被认为是系统水平诊断. 长时期以来, 人们提出许多系统水平自我诊断模型, 其中最重要的诊断模型是 PMC 模型和比较诊断模型 (参见综述文章^[137]). 网络故障诊断研究引起许多研究工作者的研究兴趣.

§3.1 泡泡序列网络在 PMC 模型下的条件容错诊断度

PMC 模型是由 Preparata, Metze 和 Chien^[138] 于 1967 年提出的.

对于系统 G , PMC 模型要求 G 中所有相邻的两顶点 u 和 v 是相互可以测试的. 当 u 测试 v 时, u 是测试点, 而 v 是被测试点; 测试结果输出 1 (或者 0) 意味着 v 是故障点 (或者非故障点). $\sigma(u, v)$ 表示 u 测试 v 的输出. 而且假定: 若测试点是非故障点, 则测试输出是正确的; 否则测试输出是不可靠的. 如此定义的所有测试输出记为 σ , 称为该诊断的校验子 (syndrome).

对于给定的校验子 σ 和子集 $F \subset V(G)$, 若对任何 $uv \in E(G)$, $u \in \bar{F} = V(G - F)$ 均有 $\sigma(u, v) = 1 \Leftrightarrow v \in F$, 则称 F 与 σ 是一致的 (consistent with σ). 这意味着 F 可能包含故障点. 因为由故障点得到测试输出是不可靠的, 所以同一个故障点集 F 可能得到不同的与其一致的校验子. 另一方面, 不同的故障点集也可能得到相同的与其一致的校验子. 设 $\sigma_F = \{\sigma : \sigma \text{ 与 } F \text{ 是一致的}\}$. 设 $F_1, F_2 \subset V(G)$ 是两个不同子集. 若 $\sigma_{F_1} \cap \sigma_{F_2} = \emptyset$, 则 F_1 和 F_2 是可区分的 (distinguishable); 否则, F_1 和 F_2 是不可区分的 (indistinguishable).

Preparata 等人^[138] 在提出这些概念的同时也给出 F_1 和 F_2 是可区分的充分必要条件.

命题 3.1 设 F_1 和 F_2 是 G 中两个不同的顶点子集. F_1 和 F_2 是可区分的 \Leftrightarrow 存在 $u \in \overline{F_1 \cup F_2}$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$ 使得 $uv \in E(G)$, 其中 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \cup F_2) \setminus (F_1 \cap F_2)$.

若对系统 G 中任意给定的校验子都能由唯一的点数不超过 t 的故障点集所确定, 则称 G 在 PMC 模型下是 t 可诊断的, t 的最大值称为 G 在 PMC 模型下的诊断度, 记为 $t(G)$, 即

$$t(G) = \max\{t : G \text{ 在 PMC 模型下是 } t \text{ 可诊断的}\}.$$

Lai 等人^[139] 给出 G 是 t 可诊断的充分必要条件.

命题 3.2 在 PMC 模型下, 系统 G 是 t 可诊断的 \Leftrightarrow 对任何两个不同的 $F_1, F_2 \subset V(G)$, 若 $\max\{|F_1|, |F_2|\} \leq t$, 则 F_1 和 F_2 是可区分的.

设 F 是 G 中故障集. 若对任何 $v \in V(G)$ 均有 $N_G(v) \not\subseteq F$, 则称 F 为条件故障集.

设 F_1 和 F_2 是 G 中任意两个不同的条件故障集且 $\max\{|F_1|, |F_2|\} \leq t$. 若 F_1 和 F_2 是可区分的, 则称 G 是条件 t 可诊断的, t 的最大值称为 G 的条件诊断度, 记为 $t_c(G)$, 即

$$t_c(G) = \max\{t : G \text{ 是条件 } t \text{ 可诊断的}\}.$$

¹³⁷Duarte Jr., E. P., Ziwich, R. P. and Albini, L. C. P., A Survey of Comparison-Based System-Level Diagnosis. ACM Computing Surveys, Vol. 43, No. 3, Article 22, Publication date: April 2011. 1-56.

¹³⁸Preparata, F. P., Metze, G. and Chien, R. T., On the connection assignment problem of diagnosable systems, IEEE Transactions on Computers 16(1967) 848-854.

¹³⁹Lai, P. L., Tan, J. J. M., Chang, C. P. and Hsu, L. H., Conditional diagnosability measures for large multiprocessor systems, IEEE Transactions on Computers 54 (2) (2005) 165-175.

我们确定了泡泡序列图 B_n (见 §2.8) 在 PMC 模型下的条件诊断度 $t_c(B_n)$.

定理 3.3 在 PMC 模型下, 当 $n \geq 4$ 时, $t_c(B_n) = \begin{cases} 5 & \text{如果 } n = 4; \\ 4n - 11 & \text{如果 } n \geq 5. \end{cases}$

这个结果包含在《Shuming Zhou, Jian Wang, Xirong Xu, Jun-Ming Xu, Conditional fault diagnosis of bubble sort graphs under the PMC model. Intelligence Computation and Evolutionary Computation, Advances in Intelligent Systems and Computing Volume 180, 2013, pp 53-59.》一文中.

§3.2 网络故障在比较模型下的条件诊断研究

这一节考虑比较诊断模型 (comparison diagnosis model), 简称为比较模型 (comparison model). 比较模型是由 Malek 和 Maeng^[140,141] 于 1980 年左右提出来的.

对于系统 G , 当点 z 送信息到它的两个邻点 x 和 y 后, z 收到来自 x 和 y 的回答, 比较它们的回答并输出比较结果. 如果回答是不一样的, 那么 x 和 y 中至少一个发生了故障; 如果回答是一样的, 那么 x 和 y 都没有发生了故障. 用 $\sigma((x, y)_z)$ 表示比较结果:

$$\sigma((x, y)_z) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \text{ 和 } y \text{ 的回答是一样的;} \\ 1 & \text{如果 } x \text{ 和 } y \text{ 的回答是不一样的.} \end{cases}$$

如此定义的函数 σ 称为该诊断的校验子 (syndrome).

然而, 如果 z 本身发生故障, 那么比较结果是不可靠的. 因此, 故障点集可能产生不同的校验子. 设 $F \subset V$ 且 σ 是校验子, 若 σ 能导致 F 中所有点都是故障点, 而 \bar{F} 中所有点都是非故障点, 则称 F 与 σ 是相容的 (compatible).

若对系统 G 中任意给定的校验子 σ 都存在唯一, 点数不超过 t , 且与 σ 是相容的子集 $F \subset V(G)$, 则称 G 在比较模型下是 t 可诊断的, t 的最大值称为 G 在比较模型下的诊断度, 记为 $t(G)$.

设 $\sigma_F = \{\sigma : \sigma \text{ 与 } F \text{ 是相容的}\}$. $V(G)$ 中两个不同子集 F_1 和 F_2 是可识别的 (distinguishable) $\Leftrightarrow \sigma_{F_1} \cap \sigma_{F_2} = \emptyset$, 否则是不可识别的 (indistinguishable). 在比较模型下, 存在许多不同的方法检验系统是否是 t 可诊断的. Sengupta 和 Dahbura^[142] 给出一个充分必要条件以确保系统的可识别性.

命题 3.4 在比较模型下, G 中两个不同的点子集 F_1 和 F_2 是可识别的 \Leftrightarrow 它们至少要满足下列条件之一 (见图 22 所示):

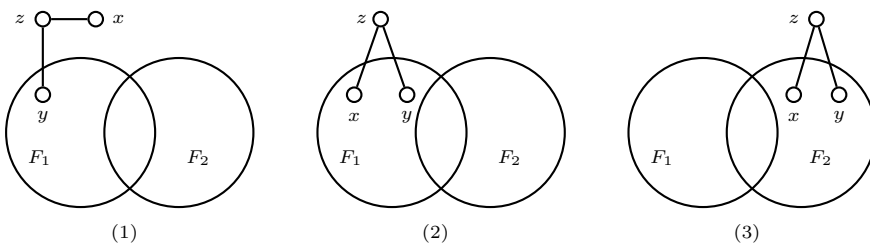


图 22 图示命题 3.4 中的条件

¹⁴⁰Maeng, J., Malek, M., A comparison connection assignment for self-diagnosis of multiprocessors systems, in: Proceedings of the 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing, New York, ACM Press, (1981) 173-175.

¹⁴¹Malek, M., A comparison connection assignment for diagnosis of multiprocessors systems, in: Proceedings of the 7th annual symposium on Computer Architecture, New York: ACM Press, (1980) 31-36.

¹⁴²A. Sengupta, A. Dahbura, On self-diagnosable multiprocessor systems: diagnosis by the comparison approach. IEEE Transaction on Computers, 41(1992), 1386-1396.

- (a) 存在 $x, z \in \overline{F_1 \cup F_2}$ 和 $y \in F_1 \Delta F_2$ 使得 $xz, yz \in E(G)$;
 (b) 存在 $z \in \overline{F_1 \cup F_2}$ 和 $x, y \in F_1 \setminus F_2$ 使得 $xz, yz \in E(G)$;
 (c) 存在 $z \in \overline{F_1 \cup F_2}$ 和 $x, y \in F_2 \setminus F_1$ 使得 $xz, yz \in E(G)$.

2008年, Lin 等人^[143] 提出条件诊断度概念. 图 G 中的故障集 F 被称为条件故障集 (conditional fault-set) 如果对每个 $x \in \overline{F}$ 都有 $N_G(x) \not\subseteq F$, 其中 $N_G(x)$ 是点 x 在 G 中的邻点集, 即 $G - F$ 不含孤立点. 集对 (F_1, F_2) 被称为条件故障集对, 如果 F_1 和 F_2 都是条件故障集.

若 G 中任何两个条件故障集 F_1 和 F_2 都是可识别的, 而且满足 $\max\{|F_1|, |F_2|\} \leq t$, 则称 G 在比较模型下是条件 t 可诊断的. 当提到两个条件故障集 F_1 和 F_2 是条件 t 可诊断时, 总假定 $\max\{|F_1|, |F_2|\} \leq t$. Sengupta 和 Dahbura 给出图 G 是条件 t 可诊断的充分必要条件.

命题 3.5 在比较模型下, G 是条件 t 可诊断的 $\Leftrightarrow G$ 中任何两个条件故障集 F_1 和 F_2 是可识别.

G 在比较模型下的条件 t 可诊断度 (conditional diagnosability) $t_c(G)$ 定义为

$$t_c(G) = \max\{t: G \text{ 是在比较模型下条件 } t \text{ 可诊断的}\}.$$

显然, $t_c(G) \geq t(G)$. 对于给定的图 G , 人们总是希望确定出 $t_c(G)$. 然而, 这是很困难的.

设 $F \subset V(G)$ 是 G 的点割, H 是 $G - F$ 的分支. 如果 H 是孤立点或者孤立边, 则称 H 为小分支; 否则称 H 为大分支. Cheng 等人^[144] 给出在某些条件下有 $t_c(G) \geq t$.

命题 3.6 设图 $G = (V, E)$ 有最大度 Δ 和最小度 $\delta \geq 3$. 如果存在整数 t 使得

- (a) $|V| > (\Delta + 1)(t - 1) + 4$;
 (b) 对任何 $F \subset V(G)$, $|F| \leq t - 1$, 如果 $G - F$ 有小分支且所有小分支的点数不超过 2,

那么, $t_c(G) \geq t$.

这个结果是目前人们确定 $t_c(G)$ 的基础.

§3.3 (n, k) 排列图的条件诊断度

第 §2.2 节定义了 (n, k) 排列图 (arrangement graphs) $A_{n,k}$, 而且 $A_{n,1} \cong K_n$, $A_{n,n-1} \cong S_n$ (星图), $A_{n,n-2} \cong AG_n$ (交错群图).

Lin 等人提出条件诊断度概念的同时, 确定了在比较模型下星图 S_n 的条件可诊断度 $t_c(S_n) = 3n - 7$ ($n \geq 5$). 周书明和肖文俊^[145] 确定了在比较模型下交换群图 AG_n 的条件可诊断度 $t_c(AG_n) = 6n - 19$ ($n \geq 6$). 我们推广这些结果到更一般的 (n, k) 排列图 $A_{n,k}$, 获得如下结果.

定理 3.7 设 $A_{n,k}$ 是 (n, k) 布置图, $k \geq 4$. 则在比较模型下,

$$t_c(A_{n,k}) = \begin{cases} 3n - 7 & \text{若 } n = k + 1; \\ (3k - 2)(n - k) - 3 & \text{若 } n \geq k + 2. \end{cases}$$

这个研究成果包含在论文《Shuming Zhou and Jun-Ming Xu, Fault diagnosability of arrangement graphs. Information Sciences, 246 (10) (2013), 177-190》中. 这篇文章做得很艰苦, 其中提出的研究方法为研究高阶连通度提供了新的研究途径.

¹⁴³C. K. Lin, J. J. M. Tan, L. H. Hsu, E. Cheng, and Lipták, Conditional diagnosability of cayley graphs generalized by transposition tree under the comparison diagnosis model. Journal of Interconnection networks, 9(2008), 83-97.

¹⁴⁴Cheng, E., Lipták, L., Qiu, K., Shen, Z., On deriving conditional diagnosability of interconnection networks, Information Processing Letters, 112(17-18)(2012), 674-677.

¹⁴⁵Zhou, S. M. and Xiao, W. J., Conditional diagnosability of alternating group networks. Information Processing Letters, 110(10)(2010), 403-409.

§3.4 条件诊断度与强 2 连通度的关系

研究发现, 命题 3.6 中的条件 (b) 与图的强 2 连通度有密切关系. 把故障条件诊断度与强 2 连通度结合起来研究是本项目重要研究内容之一. 本节介绍的研究成果是该项目主持人在北京交通大学访问时, 与该校郝荣霞教授和她的博士生田增娴合作的成果, 发表在《Rong-Xia Hao, Zeng-Xian Tian and Jun-Ming Xu, Relationship between Conditional Diagnosability and 2-extra Connectivity of Symmetric Graphs. Theoretical Computer Science, 627 (2016), 36-53》一文中. 这一节和下一节介绍该文的主要研究成果和应用.

回顾图的强 2 连通度 (见第 §2.1 节). 设 G 是连通图, $S \subset V(G)$. 如果 $G - S$ 不连通而且每个连通分支至少有 3 个点, 那么称 S 为 G 的 R_2 点割. 对于任意图 G , 不一定存在 R_2 点割. 例如, 长为 5 的圈 C_5 就不存在 R_2 点割. 图 G 被称为 R_2 图, 如果它包含至少一个 R_2 点割. 对于 R_2 图 G , 它的强 2 连通度 $\kappa_o^{(2)}(G)$ 定义为最小 R_2 点割中点数. 为书写方便, 分别记 $\kappa_o^{(2)}(G)$ 为 $\kappa_o''(G)$.

文献中, 对于给定的图 G , $t_c(G)$ 和 $\kappa_o''(G)$ 总是分别研究的. 举两个例子.

对于交错群网络 (定义见本文例子 2.1) AN_n , 周书明和肖文俊^[146] 确定了 $t_c(AN_n) = 3n - 9$ ($n \geq 5$); 周书明^[147] 确定了 $\kappa_o''(AN_n) = 3n - 9$ ($n \geq 4$). 因此当 $n \geq 5$ 时有, $t_c(AN_n) = 3n - 9 = \kappa_o''(AN_n)$.

对于交错群图 (定义见本文例子 2.2) AG_n , 周书明等人^[148] 确定了 $t_c(AG_n) = 6n - 19$ ($n \geq 6$) (见本文第 §3.3 节); Lin 等人^[149] 曾确定了确定 $\kappa_o''(AG_n) = 6n - 19$ ($n \geq 5$). 因此, 当 $n \geq 6$ 时, 有 $t_c(AG_n) = 6n - 19 = \kappa_o''(AG_n)$.

本项目试图寻找在比较模型下条件诊断度 $t_c(G)$ 与强 2 连通度 $\kappa_o''(G)$ 之间的关系.

为了陈述我们的结果, 需要某些记号. 对于 $X \subset V(G)$, 记 $N_G(X) = (\cup_{x \in X} N_G(x)) \setminus X$ 为 X 的邻点集. 对于 G 中两个不相邻顶点 x 和 y , 令 $\ell(x, y) = |N(x) \cap N(y)|$, 且 $\ell(G) = \max\{\ell(x, y) : x, y \in V(G), xy \notin E(G)\}$.

为了便于计算, 这里仅考虑正则图. 设 S 是 G 中最小 R_2 点割, 则 $G - S$ 中至少有一分支包含路 P_3 或者圈 C_3 . 于是, 我们发现在某些条件下正则图 G 在比较模型下的条件 t 可诊断度 $t_c(G)$ 与强 2 连通度 $\kappa_o''(G)$ 有如下密切关系.

定理 3.8 设 G 是 n 正则 R_2 图, $t = \min\{|N_G(T)| : T \text{ 是 } G \text{ 中路 } P_3 \text{ 或者圈 } C_3\}$. 如果 G 满足下列条件:

- (a) 对任何 $F \subset V(G)$, $|F| \leq t - 1$, $G - F$ 有一个大分支和包含最多两个顶点的小分支;
- (b) 如果 G 不含 C_5 , 那么 $n \geq 2\ell(G) + 2$, 否则 $n \geq 3\ell(G) + 2$;
- (c) $|V(G)| > (n + 1)(t - 1) + 4$;

那么在比较模型下, $t_c(G) = t = \kappa_o''(G)$.

定理 3.8 的证明不难, 定理中条件虽然有点复杂, 但已经证实许多著名的互连网络对应的图都具有这些要求.

¹⁴⁶Zhou, S.-M., Xiao, W.-J., Conditional diagnosability of alternating group networks, Information Processing Letters, 110(2010), 403-409.

¹⁴⁷Zhou, S.-M., The study of fault tolerance on alternating group networks. In Biomedical Engineering and Informatics, 2009. BMEI '09. 2nd International Conference on, Issue Date: 17-19 Oct. 2009, DOI: 10.1109/BMEI.2009.5305876.

¹⁴⁸Zhou, S.-M. and Xu, J.-M., Fault diagnosability of arrangement graphs. Information Sciences, 246(10)(2013), 177-190.

¹⁴⁹Lin, L., Zhou, S., Xu, L., Wang, D., The extra connectivity and conditional diagnosability of alternating group networks, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 26(8)(2015), 2352-2362.

§3.5 主要结果的应用

作为定理 3.8 的应用, 我们能统一许多著名网络在比较模型下的条件诊断度 t_c 与强 2 连通度 κ_o'' . 主要困难是验证定理 3.8 中的条件 (a), 幸好这些条件对下面涉及到的网络都已经被证实.

例子 3.9 星图和 (n, k) 星图

星图 (star graphs) S_n 和 (n, k) 星图 $S_{n,k}$ 被定义在第 §2.2 节. 我们^[150] 确定了 $t_c(S_n) = 3n - 7$ ($n \geq 4$), 周书明^[151] 还确定了 $t_c(S_{n,k}) = n + 2k - 5$ ($n \geq k + 2, k \geq 3$). 然而, $\kappa_o''(S_n)$ 和 $\kappa_o''(S_{n,k})$ 都还没有被确定. 作为定理 3.8 的推论, 立即有下述结论.

推论 3.10 $t_c(S_n) = 3n - 7 = \kappa_o''(S_n), n \geq 5; t_c(S_{n,k}) = n + 2k - 5 = \kappa_o''(S_{n,k}), n \geq k + 2, k \geq 3.$

因为 $S_{n,n-2} \cong AN_n$, 由推论 3.10, 立即有

推论 3.11 $t_c(AN_n) = 3n - 9 = \kappa_o''(AN_n), n \geq 5.$

例子 3.12 (n, k) 排列图 (arrangement graphs)

(n, k) 排列图 $A_{n,k}$ (见 §2.3), 定理 3.7 确定了: 当 $n \geq k + 2$ 且 $k \geq 4$ 时, $t_c(A_{n,k}) = (3k - 2)(n - k) - 3$. 然而, $\kappa_o''(A_{n,k})$ 还没有被确定. 作为定理 3.8 的推论, 立即有下述结论.

推论 3.13 当 $n \geq k + 2$ 且 $k \geq 8$ 时, $t_c(A_{n,k}) = (3k - 2)(n - k) - 3 = \kappa_o''(A_{n,k}).$

因为 $A_{n,n-2} \cong AG_n$, 由推论 3.13, 立即得到下述结论.

推论 3.14 $t_c(AG_n) = 6n - 19 = \kappa_o''(AG_n) (n \geq 6).$

例子 3.15 对换图

对换图 (transposition graphs) 的定义见第 §2.8 节. 用 \mathcal{T}_n 表示由对换树生成的 Cayley 图. 当 $n \geq 4$ 时, Lin 等人^[152] 确定了 $t_c(\mathcal{T}_n(S)) = 3n - 8$, 杨卫华等人^[153] 确定了 $\kappa_o''(\mathcal{T}_n(S)) = 3n - 8$. 当 $n \geq 7$ 时, 这些结果可以由定理 3.8 导出.

推论 3.16 $t_c(\mathcal{T}_n(S)) = 3n - 8 = \kappa_o''(\mathcal{T}_n(S)), n \geq 7.$

例子 3.17 k 叉 n 立方网络 (k -ary n -cube networks)

当 $k \geq 2$ 时, k 叉 n 立方网络 Q_n^k 是 n 个圈 C_k 的笛卡尔乘积 $C_k \times \cdots \times C_k$, 由 Dally^[154] 首先提出. 显然, $Q_n^2 = Q_n$. 由命题 1.10, Q_n^k 是 $2n$ 正则 Cayley 图 $C_\Gamma(S)$, $\Gamma = (\mathbb{Z}_k)^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\} \cup \{e_1^{(k-1)}, \dots, e_n^{(k-1)}\}$, 其中 e_i ($1 \leq i \leq n$) 如 (1.1.1) 所定义, $e_i^{(k-1)}$ 是将 e_i 中 1 替换成 $(k - 1)$, 即

$$e_i^{(k-1)} = \underbrace{0 \cdots 0}_{i-1} (k-1) \underbrace{0 \cdots 0}_{n-i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

¹⁵⁰Zhou, S.-M. and Xu, J.-M., Fault diagnosability of arrangement graphs. Information Sciences, 246(10)(2013), 177-190.

¹⁵¹Zhou, S.-M., The conditional fault diagnosability of (n, k) -star graphs, Applied Mathematics and Computation, 218(2012), 9742-9749.

¹⁵²Lin, C.-K., Tan, J.J.M., Hsu, L.-H., Cheng, E., Lipták, L., Conditional diagnosability of Cayley graphs generalized by transposition tree under the comparison model, Journal of Interconnection networks, 9(2008), 83-97.

¹⁵³Yang, W.-H., Li, C.-H. and Meng, J.-X., Conditional connectivity of Cayley graphs generated by transposition trees, Information Processing Letters, 110(23)(2010), 1027-1030.

¹⁵⁴Dally, W. J., Performance analysis of k -ary n -cube interconnection networks. IEEE Transaction on Computers, 39(6)(1990), 775-785.

徐等人^[155] 确定了 $\kappa_o''(Q_n^2) = 3n - 5$ ($n \geq 4$) . 赵元庆等人^[156] 确定了 $\kappa_o''(Q_n^3) = 6n - 7$ ($n \geq 3$) . 谢孙源等人^[157] 确定了 $\kappa_o''(Q_n^k) = 6n - 5$ ($k \geq 4, n \geq 5$) . Hsu 等人^[158] 确定了 $t_c(Q_n^2) = 3n - 5$ ($n \geq 5$) . 这些结果可以由定理 3.8 导出.

推论 3.18 如果 $k = 5$, 那么 $n \geq 8$, 否则 $n \geq 6$. $t_c(Q_n^k) = t = \kappa_o''(Q_n^k)$, 其中

$$t = \begin{cases} 6n - 5 & \text{if } k \geq 4; \\ 6n - 7 & \text{if } k = 3; \\ 3n - 5 & \text{if } k = 2. \end{cases}$$

例子 3.19 对偶立方网络 (dual-cube networks)

对偶立方网络 DC_n 被定义在第 §2.5 节. 当 $n \geq 3$ 时, 周书明等人分别确定了 $\kappa_o''(DC_n) = 3n - 2$ 和 $t_c(DC_n) = 3n - 2$. 这些结果可以由定理 3.8 导出.

推论 3.20 $t_c(DC_n) = 3n - 2 = \kappa_o''(DC_n), n \geq 5$.

例子 3.21 煎饼图 (pancake graphs)

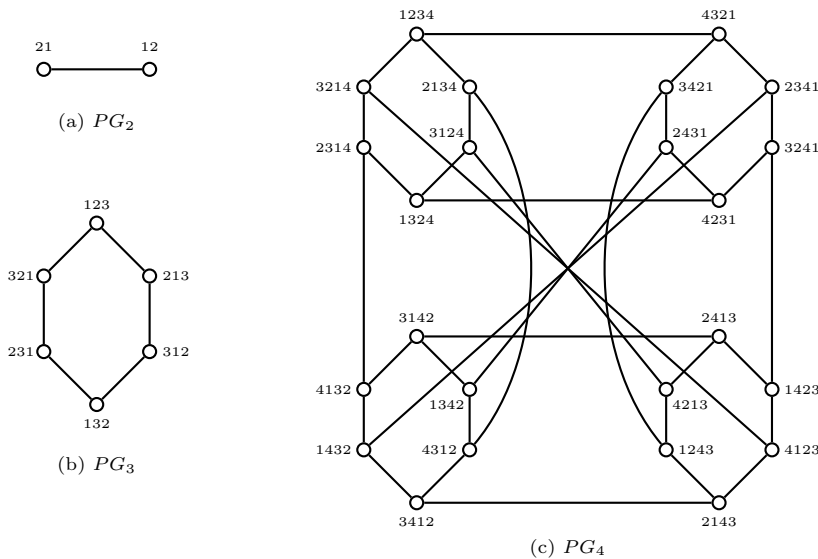


图 23 煎饼图 PG_2, PG_3 和 PG_4 .

煎饼图 PG_n 是由 Akers 和 Krishnameurthy^[159] 提出来的, 它的顶点集为 Ω_n , 两顶点 p_i 和 p_j 有边相连 $\Leftrightarrow p_i = i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n$ 且 $p_j = i_k \cdots i_2 i_1 i_{k+1} \cdots i_n$, 其中 $2 \leq k \leq n$. 图 23 所示的是煎饼图 PG_2, PG_3 和 PG_4 . 煎饼图 PG_n 是 $(n - 1)$ 正则 $(n - 1)$ 连通的 Cayley 图 $C_{\Omega_n}(S)$, 其中

¹⁵⁵Xu, J.-M., Zhu, Q., Hou, X.-M., and Zhou, T., On restricted connectivity and extra connectivity of hypercubes and folded hypercubes. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), E-10(2)(2005), 208-212.

¹⁵⁶赵元庆, 金显华, 3 元 n 立方网络的 2 阶连通性. 计算机应用, 33(4)(2013), 1036-1038.

¹⁵⁷Hsieh, S.Y. and Chang, Y.-H., Extra connectivity of k -ary n -cube networks, Theoretical Computer Science, 443(2012), 63-69.

¹⁵⁸Hsu, G.-H., Chiang, C.-F. Shih, L.-M., Hsu, L.-H. and Tan, Jimmy J.-M., Conditional diagnosability of hypercubes under the comparison diagnosis model, Journal of Systems Architecture, 55(2009), 140-146.

¹⁵⁹Akers, S. B. and Krishnamurthy, B., A group theoretic model for symmetric interconnection networks. IEEE Transactions on Computers, 38(4)(1989), 555-566.

$S = \{(i, i-1, \dots, 1, i+1, \dots, n) : 2 \leq i \leq n\}$. 周书明等人^[160] 确定了 $t_c(PG_n) = 3n - 7$ ($n \geq 5$). 然而, $\kappa_o''(PG_n)$ 未被确定. 定理 3.8 能导出下述结果.

推论 3.22 $t_c(PG_n) = 3n - 7 = \kappa_o''(PG_n)$ ($n \geq 5$).

例子 3.23 分层超立方体网络 (hierarchical hypercube networks)

对于 n 维分层超立方体网络 HHC_n (见第 §2.6 节), 周书明等人^[161] 分别确定了 $\kappa_o''(HHC_n) = 3m - 2$ 和 $t_c(HHC_n) = 3m - 2$ ($n = 2^m + m, m \geq 2$). 当 $m \geq 5$ 时, 这些结果可以由定理 3.8 导出.

推论 3.24 $t_c(HHC_n) = 3m - 2 = \kappa_o''(HHC_n)$ ($n = 2^m + m, m \geq 5$).

还可以举出一些例子, 不一一列举了.

§3.6 在 PMC 模型下 t/t 诊断度与强连通度的关系

1991 年, Kavianpour and Friedman^[162] 提出在 PMC 模型下保守诊断度 (pessimistic diagnosability) 概念.

故障点数不超过 t 的系统 G , 如果它的所有故障点能被孤立在一个集 S 中, $|S| \leq t$ 而且 S 最多含一个非故障点, 则称 G 是 t/t 可诊断的. 在 PMC 模型下, G 的保守诊断度 (pessimistic diagnosability) 定义为

$$t_p(G) = \max\{t : G \text{ 是 } t/t \text{ 可诊断的}\}.$$

Tsai 和 Chen^[163] 给出系统 G 是 t/t 可诊断的充分必要条件.

命题 3.25 (Tsai 和 Chen^[163]) 系统 G 是 t/t 可诊断的 \Leftrightarrow 对任何 $S \subseteq (G)$, $|S| = p$, $0 \leq p \leq t - 1$, $G - S$ 有最多一个孤立点, 其余分支至少有 $2(t - p) + 1$ 个点.

对于 G 中两个相邻顶点 x 和 y , 令 $\ell'(x, y) = |N(x) \cap N(y)|$, 且 $\ell'(G) = \max\{\ell'(x, y) : x, y \in V(G), xy \in E(G)\}$.

定理 3.26 设 G 是 k 正则 k 连通图 ($k \geq 5$), $\nu(G) \geq 4k - 2$, $cn(G) \leq 2$, $U \subset V(G)$, F 是 G 的点割.

(1) 若 $2 \leq |U| \leq 2(2k - 4 - \ell')$, 则 $|N_G(U)| \geq 2k - 2 - \ell'$;

(2) 若 $|F| \leq 2k - 3 - \ell'$, 则 $G - F$ 仅有两个分支, 其中一个为孤立点.

那么 $t_p(G) = 2k - 2 - \ell' = \kappa_o'(G)$.

作为推论, 许多著名网络的保守诊断度能被确定, 比如: 交错群图, 交错群网络, BC 网络, k 叉 n 立方体, 分裂星网络, 由置换树生成的 Cayley 图等等.

这些结果被包含在论文 (Mei-Mei Gu, Rong-Xia Hao, Jun-Ming Xu and Yan-Quan Feng, Equal relation between the extra connectivity and pessimistic diagnosability for some regular graphs. Theoretical Computers Science, 690 (2017), 59-72) 中.

¹⁶⁰Zhou, S.-M. and Xu, L., Conditional fault diagnosability of pancake graphs, Journal of Convergence Information Technology, 8(10)(2013), 668-675.

¹⁶¹Zhou, S.-M., Lin, L.-M. and Xu, J.-M., Conditional fault diagnosis of hierarchical hypercubes. International Journal of Computer Mathematics, 89 (16) (2012), 2152-2164.

¹⁶²Kavianpour, A. and Kim, K.H., Diagnosabilities of hypercubes under the pessimistic one-step diagnosis strategy. IEEE Trans. Comput. 40(2) (1991), 232-237.

¹⁶³Tsai, C.-H. and Chen, J.-C., Fault isolation and identification in general biswapped networks under the PMC diagnostic model. Theoret. Comput. Sci. 501 (2013) 62-71.

§4 网络强边容错度的脆弱性研究

§4.1 图的强边连通的持久度

第 §2.1 节回顾了强 h 边连通的定义. 对一般的图 G 说来, 当 $h \geq 1$ 时, $\lambda_o^{(h)}(G)$ 并不一定存在. 例如, 对 $n \geq 1$, 令 $G_{h,n}^* = K_1 \vee (nK_h)$. 显然, $G_{1,n}^* = K_{1,n}$, 而且 $\lambda_o^{(h)}(G_{h,n}^*)$ 不存在.

若 $\lambda_o^{(h)}(G)$ 存在, 则称 G 为 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图. 对于 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图 G , 必存在子集 $X \subset V(G)$, $|X| \geq h+1$ 使得 $E_G(X)$ 是强 h 边割而且 $G[X]$ 和 $G[\bar{X}]$ 都是连通的, 其中 $E_G(X)$ 表示 G 中 X 与 \bar{X} 之间的边集. 令 $d_G(X) = |E_G(X)|$,

$$\xi_h(G) = \min\{d_G(X) : X \subset V(G), |X| = h+1 \text{ 且 } G[X] \text{ 是连通的}\}.$$

显然, $\xi_0(G) = \delta(G)$ 且 $\xi_1(G) = \xi(G)$. 对于 $\lambda_o^{(h)}$ 图 G , Whitney 不等式意味着 $\lambda_o^{(0)}(G) \leq \xi_0(G)$; Esfahanian 和 Hakimi (见命题 1.1) 证明了 $\lambda_o^{(1)}(G) \leq \xi_1(G)$; 孟吉翔等人^[164] 证明了 $\lambda_o^{(2)}(G) \leq \xi_2(G)$. 对于 $h \geq 3$, Bonsma 等人^[165] 发现不等式 $\lambda_o^{(h)}(G) \leq \xi_h(G)$ 不再成立. 张昭和原晋江^[166] 证明了下面的结果, 它确保了 $\lambda_o^{(h)}(G)$ 的存在性.

命题 4.1 设 G 是至少 $2(\delta+1)$ 顶点的连通图, 其中 $\delta = \delta(G)$. 如果对任何正整数 h , $G \not\cong G_{\delta,n}^*$, 那么 $\lambda_o^{(h)}(G)$ 存在, 而且

$$\lambda_o^{(h)}(G) \leq \xi_h(G) \text{ 对任何 } h, 0 \leq h \leq \delta.$$

设 G 是 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图. 若 $\lambda_o^{(h)}(G) = \xi_h(G)$, 则称 G 为 $\lambda_o^{(h)}$ 优的. 设 G 是 $\lambda_o^{(h)}$ 优图, 若 G 的每个 $\lambda_o^{(h)}$ 边割 F , $G-F$ 包含至少一个点数为 $h+1$ 的分支, 则称 G 为超 $\lambda_o^{(h)}$ 图. 由定义立即知, 超 $\lambda_o^{(h)}$ 图必是 $\lambda_o^{(h)}$ 优的. 反之不然.

命题 4.2 设 G 是 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图且 $\lambda_o^{(h)}(G) \leq \xi_h(G)$. 则对任何 $h \geq 0$, G 是超 $\lambda_o^{(h)}$ 图 \Leftrightarrow 或者 $\lambda_o^{(h+1)}(G)$ 不存在, 或者 $\lambda_o^{(h+1)}(G) > \xi_h(G)$.

定义 4.3 超 $\lambda_o^{(h)}$ 图 G 的持久度 (persistence) $\rho_o^{(h)}(G)$ 定义为最大整数 m 使得对任何 $F \subset E(G)$ ($|F| \leq m$), $G-F$ 仍然是超 $\lambda_o^{(h)}$ 图.

当网络连线发生故障时, 持久度 $\rho_o^{(h)}(G)$ 是度量超 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图脆弱性的参数. 对于给定的超 $\lambda_o^{(h)}$ 连通图 G , 确定 $\rho_o^{(h)}(G)$ 的值是有意义的. 一般说来, 确定 $\rho_o^{(h)}(G)$ 的精确值是不容易的. 但 $\rho_o^{(h)}(G)$ 的上界是容易得到的.

命题 4.4 对于任何超 $\lambda_o^{(h)}$ 图 G , $\rho_o^{(h)}(G) \leq \delta(G) - 1$.

对任何超 $\lambda_o^{(h)}$ 图 G , 我们不知道确定 $\rho_o^{(h)}(G)$ 是否是 NP-hard 问题. 这里只考虑较小的 h , 即 $h \in \{0, 1, 2\}$. 为方便, 分别用 λ , λ' , λ'' , ρ 和 ρ' 表示 $\lambda_o^{(0)}$, $\lambda_o^{(1)}$, $\lambda_o^{(2)}$, $\rho_o^{(0)}$ 和 $\rho_o^{(1)}$.

洪艳梅等人^[167] 证明了: 对于超 λ 图 G , 如果它是 λ' 连通的, 那么

$$\rho(G) \geq \min\{\lambda'(G) - \delta(G) - 1, \delta(G) - 1\}.$$

¹⁶⁴Meng, J.-X. and Ji, Y., On a kind of restricted edge connectivity of graphs. Discrete Appl. Math. 117 (1-3) (2002), 183-193.

¹⁶⁵Bonsma, P., Ueffing, N. and Volkmann, L., Edge-cuts leaving components of order at least three. Discrete Math. 256 (1-2) (2002), 431-439.

¹⁶⁶Zhang, Z. and Yuan, J., A proof of an inequality concerning k -restricted edge-connectivity. Discrete Math. 304 (2005), 128-134.

¹⁶⁷Hong, Y.-M., Meng, J.-X. and Zhang, Z., Edge fault tolerance of graphs with respect to super edge-connectivity. Discrete Appl. Math. 160 (2012), 579-587.

同时,在某些条件下,他们还确定了 $k(\geq 3)$ 正则图 G 的持久度

$$\rho(G) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } k = 3 \text{ 且 } G \text{ 是超 } \lambda \text{ 的;} \\ k - 1 & \text{如果 } k \geq 4 \text{ 且 } G \text{ 是超 } \lambda' \text{ 的;} \\ \lambda' - k & \text{如果 } G \text{ 是超 } \lambda \text{ 的但不是超 } \lambda' \text{ 的, 而且 } \kappa(G) \geq \lambda' - k + 1. \end{cases}$$

该项目考虑超 λ'' 连通图 G 的持久度 $\rho'(G)$. 这里介绍的主要结果是洪振木完成, 分别发表在论文《Zhen-Mu Hong and Jun-Ming Xu, Vulnerability of super edge-connected graphs. Theoretical Computer Science, 520 (2014), 75-86》和《HONG Zhenmu and XU Junming, Edge fault-tolerance of super restricted edge-connected Cartesian product graphs. 中国科学技术大学学报, 44 (12) (2014), 967-974》中.

§4.2 一般图持久度的下界

首先获得如下关键结果.

引理 4.5 设 G 是 λ' 连通图, $F \subset E(G)$.

- (i) 若 G 是 λ' 优的而且 $|F| \leq \delta(G) - 1$, 则 $G - F$ 是 λ' 连通的.
- (ii) 若 $G - F$ 是 λ'' 连通的, 则 G 也是 λ'' 连通的, 而且 $\lambda''(G - F) \geq \lambda''(G) - |F|$.

由引理 4.5 立即获得下面结果.

定理 4.6 设 G 是超 λ' 图. 若 $\lambda''(G)$ 不存在, 则 $\rho'(G) = \delta(G) - 1$.

由定理 4.6, 仅需考虑超 λ' 且 λ'' 连通图 G 的持久度 $\rho'(G)$.

图 G 被称为边正则的, 如果它的每条边的度都是 $\xi(G)$. 用 $\eta(G)$ 表示 G 中边度为 $\xi(G)$ 的边的数目. 为方便, 记 $\lambda'' = \lambda''(G)$, $\lambda' = \lambda'(G)$, $\rho' = \rho'(G)$, $\xi = \xi(G)$ 和 $\delta = \delta(G)$.

下面的定理给出超 λ' 且 λ'' 连通图 G 的持久度 $\rho'(G)$ 的下界.

定理 4.7 设 G 是超 λ' 且 λ'' 连通图. 则

- (i) $\rho'(G) \geq \min\{\lambda'' - \xi - 1, \delta - 1\}$ 如果 $\eta(G) \geq \delta$, 或者
- (ii) $\rho'(G) \geq \min\{\lambda'' - \xi, \delta - 1\}$ 如果 G 是边正则的.

定理 4.7 中条件“ $\eta(G) \geq \delta$ ”是必要的, 而且 $\rho'(G)$ 的下界是紧的.

§4.3 正则图的持久度

为了方便运用定理 4.7, 确保图 G 是边正则的, 考虑正则图. 从所周知, 任何 $k(\geq 2)$ 图必包含圈. 用记号 $g(G)$ 表示图 G 的围长(最短圈的长度). 容易验证, C_4 和 C_5 是两个仅有的 2 正则超 λ' 连通图. 显然有 $\rho'(C_4) = \rho'(C_5) = 1$. 因此, 假定 $k \geq 3$. 首先考虑 3 正则图, 这样的图有偶数个顶点. 容易证明下面的命题.

命题 4.8 设 G 是 $2n$ 阶 3 正则超 λ' 连通图. 若 $n \geq 4$, 则围长 $g(G) > 4$, 而且 $n \neq 4$.

下述定理完全确定了 3 正则超 λ' 连通图 G 的持久度 $\rho'(G)$.

定理 4.9 设 G 是 $2n$ 阶 3 正则超 λ' 连通图, 则

$$\rho'(G) = \begin{cases} 2, & \text{若 } n = 2 \text{ 或者 } 3; \\ 1, & \text{若 } n \geq 5. \end{cases}$$

一般说来, 当 $k \geq 4$ 时, 确定 k 正则超 λ' 图 G 的持久度 $\rho'(G)$ 是相当困难. 由定理 4.6, 若 $\lambda''(G)$ 不存在, 则 $\rho'(G) = k - 1$. 因此, 仅需要考虑 k 正则 λ'' 连通图. 对于这样的图 G , 有下面的严格包含关系

$$\lambda'' \text{ 连通图} \supset \lambda'' \text{ 优图} \supset \text{超 } \lambda'' \text{ 连通图}.$$

分别建立 λ'' 优图和超 λ'' 连通图的持久度 ρ' 的界. 首先获得下述引理.

引理 4.10 设 G 是 k 正则 λ'' 优图, 且 $k \geq 4$. 则 G 是超 λ' 连通的 $\Leftrightarrow g(G) \geq 4$ 或者 $k \geq 5$.

下面的定理给出 k 正则 λ'' 优图 G 的持久度 $\rho'(G)$ 的界.

定理 4.11 设 G 是 k 正则 λ'' 优图, 且 $k \geq 4$. 若 $g(G) \geq 4$, 则

$$k - 2 \leq \rho'(G) \leq k - 1.$$

若 $g(G) = 3$, $k \geq 5$ 且 G 是 $(k - 2)$ 连通但不是超 λ'' 连通的, 则

$$k - 4 \leq \rho'(G) \leq k - 3.$$

这些界都是可以达到的. 但对于第二个结论, 条件“ G 是 $(k - 2)$ 连通”只是用在证明中, 但是否必要, 目前还不知道.

对于 k 正则超 λ'' 图 G , $\rho'(G)$ 有如下更好的界.

定理 4.12 设 G 是 k 正则超 λ'' 图, 则

$$\rho'(G) \begin{cases} = k - 1 & \text{若 } k \geq 4 \text{ 且 } g(G) \geq 4; \\ = 2 & \text{若 } k = 5 \text{ 且 } g(G) = 3; \\ \geq k - 3 & \text{若 } k \geq 6. \end{cases}$$

对于 $k (\geq 4)$ 正则点可迁图 G , 王应前和李乔^[168] 证明了: 若 $g \geq 5$, 则 G 是 λ'' 优的; 杨卫华等人^[169] 证明了: 若 G 不含 C_4 且是 λ'' 优的, 则 G 是超 λ'' 连通的. 结合这些结果和定理 4.12, 立即获得下面的结果.

推论 4.13 设 G 是 $k (\geq 4)$ 正则点可迁图. 若 $g \geq 5$, 则 $\rho'(G) = k - 1$.

推论 4.13 中的条件“ $g \geq 5$ ”是必要的. 因为 4 维超立方体 Q_4 是 λ'' 优的点可迁的图且 $g = 4$, 但不是超 λ'' 连通的, 持久度 $\rho'(Q_4) = 2$.

¹⁶⁸Wang, Y.-Q. and Li, Q., Conditional edge-connectivity properties, reliability comparisons and transitivity of graphs. Discrete Math. 258 (2002), 205-214.

¹⁶⁹Yang, W.-H., Zhang, Z., Qin, C.-F. and Guo, X.-F., On super 2-restricted and 3-restricted edge-connected vertex transitive graphs. Discrete Math. 311 (2011), 2683-2689.

§4.4 置换图的持久度

由定理 4.12 中第一个结论知: 如果 G 是 k 正则超 λ'' 图, $k \geq 4$ 且 $g(G) \geq 4$, 那么 $\rho'(G) = k - 1$. 这一节, 作为这个结果的应用, 介绍置换图和广义置换图的持久度.

首先考虑置换图 $G(G_0, G_1; M)$, 它由 Chartrand 和 Harary^[170] 提出来的. 令 G_0 和 G_1 是两个有同样顶点集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的图. 置换图 $G(G_0, G_1; M)$ 有顶点集 $V(G_0) \cup V(G_1)$ 和边集 $E(G_0) \cup E(G_1) \cup M$, 其中 $M = \{i\sigma(i) : i \in V(G_0), \sigma(i) \in V(G_0), \sigma \in \Omega_n\}$ 是 G_0 和 G_1 顶点之间的完备匹配. 第 §2.4 节定义的立方体型网络是 $G(G_0, G_1; M)$ 的特殊情形. 因此, $G(G_0, G_1; M)$ 包含超立方体 Q_n , 变形 VQ_n , 扭立方体 TQ_n , 局部扭立方体 LTQ_n , 交叉立方体 CQ_{n-1} 和 Möbius 立方体 MQ_n .

广义置换图 $G(G_0, G_1, \dots, G_{m-1}; \mathcal{M})$ 定义如下. 设 G_0, G_1, \dots, G_{m-1} 是 $m (\geq 3)$ 个具有相同顶点的图. 图 $G(G_0, G_1, \dots, G_{m-1}; \mathcal{M})$ 有顶点集 $V(G_0) \cup V(G_1) \cup \dots \cup V(G_{m-1})$ 和边集 $E(G_0) \cup E(G_1) \cup \dots \cup E(G_{m-1}) \cup \mathcal{M}$, 其中 $\mathcal{M} = \cup_{i=0}^{m-1} M_{i, i+1(\text{mod } m)}$, $M_{i, i+1(\text{mod } m)}$ 是 G_i 和 $G_{i+1(\text{mod } m)}$ 顶点之间的完备匹配. 递归循环图 (Recursive circulant graphs) $G = G(cd^m, d)$ ^[171] 和无向超环面网 $C_{d_1} \square C_{d_2} \square \dots \square C_{d_n}$ ^[172] 是广义置换图的特例.

设 $G(n, d)$ 是一个图, 它的顶点集 $V = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, 两顶点 x and y 相连 $\Leftrightarrow |x - y| = d^i \pmod{n}$ 对任何 $i \in \{0, 1, \dots, \lceil \log_d n \rceil - 1\}$. 显然, $G(d^m, d)$ 是循环图, 它是 δ 正则 δ 连通的, 其中 $\delta = 2m - 1$ 如果 $d = 2$, 或者 $\delta = 2m$ 如果 $d \neq 2$. 考虑阶在 d^m 与 d^{m+1} 之间的循环图 $G(cd^m, d)$, 其中 $1 < c < d$, $\delta = 2m + 1$ 如果 $c = 2$, 或者 $\delta = 2m + 2$ 如果 $c > 2$. Park 和 Chwa^[173] 证明了 $G(cd^m, d)$ 有递归结构, 即 $G(cd^m, d) = G(G_0, G_1, \dots, G_{d-1}; \mathcal{M})$, 其中 $G_i \cong G(cd^{m-1}, d)$, $i = 0, 1, \dots, d - 1$. 正因为这个缘故, $G(cd^m, d)$ 被称为递归循环图 (recursive circulant graph), 它是 δ 正则 δ 连通的. 特别地, $G(2^m, 4)$ 是 m 正则 m 连通的. $G(2^m, 4)$ 与 Q_m 有相同的阶 2^m , 但当 $m \geq 3$ 时, $G(2^m, 4) \not\cong Q_m$ 因为 $G(2^m, 4)$ 包含奇圈. 注意, 因为当 $c \geq 3$ 时, $G(cd^0, d) \cong C_c$, 所以当 $c = 3$ 时 $G(cd^m, d)$ 包含三角形.

n 维超环面网 $C(d_1, \dots, d_n) = C_{d_1} \square C_{d_2} \square \dots \square C_{d_n}$. $C(d_1, \dots, d_n)$ 是 $2n$ 正则 $2n$ 边连通的点可迁图, 围长 $g = \min\{4, d_i, 1 \leq i \leq n\}$. 因此, 如果 $d_i \geq 4$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), 那么 $C(d_1, \dots, d_n)$ 是不含三角形的. $C(d_1, \dots, d_n)$ 能被表示为 $G(G_0, G_1, \dots, G_{d_1-1}; \mathcal{M})$, 其中 $G_i \cong C_{d_2} \square \dots \square C_{d_n}$ ($i \in \{0, 1, \dots, d_1 - 1\}$).

Chen 等人^[174, 175] 和 Xu 等人^[176] 研究了这两类图的超边连通度. 王世英等人^[177] 研究了这两类图的 2 强连通度. 陆枚等人^[178] 研究了这两类图的持久度 ρ . 这一节进一步研究这两类图的持

¹⁷⁰Chartrand, G. and Harary, F., Planar permutation graphs. Ann. Inst. H. Poincaré (sect B), 3 (4) (1967), 433-438.

¹⁷¹Lee, J.H., Park, S.M. and Chwa, K.Y., Recursive Circulant: A New Topology for Multicomputer Networks, in: Proceedings of Internet Symposium Parallel Architectures Algorithms and Networks (ISPAN94) Japan, IEEE Press, New York, 1994, pp. 73 - 80.

¹⁷²Dally, W.J., Performance analysis of k -ary n -cube interconnection networks. IEEE Trans. Comput. 39 (1990) 775 - 785.

¹⁷³Park, J.H. and Chwa, K.Y., Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks. In: Proceedings International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms, and Networks, Kanazawa, Japan, 1994, pp. 73-80.

¹⁷⁴Chen, Y.C., Tan, J.J.M., Hsu, L.H. Kao, S.S., Super-connectivity and super-edge-connectivity for some interconnection networks. Appl. Math. Comput. 140 (2003), 245-254.

¹⁷⁵Chen, Y.C. and Tan, J.J.M., Restricted connectivity for three families of interconnection networks. Appl. Math. Comput. 188 (2007), 1848-1855.

¹⁷⁶Xu, J.-M. Wang, J.-W. and Wang, W.-W., On super and restricted connectivity of some interconnection networks. Ars Combin. 94 (2010), 25-32.

¹⁷⁷Wang, S.Y., Yuan, J. and Liu, A. X., k -restricted edge-connectivity for some interconnection networks. Appl. Math. Comput. 201 (2008), 587-596.

¹⁷⁸Wang, D. and Lu, M., Edge fault tolerance of super edge connectivity for three families of interconnection networks.

久度 ρ' .

定理 4.14 对每个 $i = 0, 1$, 设 G_i 是 n 阶不含三角形的 k 正则超 λ 图, 并设 $\lambda'_i = \lambda'(G_i)$. 如果 $\min\{n, \lambda'_0 + \lambda'_1\} > 3k - 1$, 那么置换图 $G = G(G_0, G_1; M)$ 是超 λ'' 的且 $\rho'(G) = k$.

定理 4.14 中条件 “ $\min\{n, \lambda'(G_0) + \lambda'(G_1)\} > 3k - 1$ ” 是必要的, 它确保 $G = G(G_0, G_1; M)$ 是超 λ'' 的. 例如, $G_0 \times K_2$ 不是超 λ'' 的, 其中 G_0 是 n 阶不含三角形的 k 正则超 λ 图, $k \geq 3$ 且 $n \geq 6$.

推论 4.15 设 $G_n \in \{Q_n, TQ_n, CQ_n, MQ_n, LTQ_n\}$. 如果 $n \geq 5$, 那么 G_n 是超 λ'' 且超 λ' 连通的, 而且 $\rho'(G_n) = n - 1$.

推论 4.15 中条件 “ $n \geq 5$ ” 是必要的. 例如, Q_4 是 λ'' 优的非超 λ'' 连通的, $\rho'(Q_4) = 2$.

现在考虑广义置换图 $G(G_0, G_1, \dots, G_{m-1}; \mathcal{M})$ 的持久度 ρ' . 为了确保 G 不含三角形, 假定 $m \geq 4$. 令 $I_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$.

定理 4.16 对每个 $i \in I_m$, 设 G_i 是 n 阶 k 正则 k 边连通图, 且不含三角形. 如果 $k \geq 3$, $n > \lceil \frac{3k+2}{2} \rceil$ 且 $m \geq 4$, 那么 $G = G(G_0, \dots, G_{m-1}; \mathcal{M})$ 是超 λ'' 连通的, 且 $\rho'(G) = k + 1$.

作为定理 4.16 的应用, 我们立即获得下述结果.

推论 4.17 设 c, d, m 是正整数, $1 < c < d$, $c \neq 3$, $d \geq 4$, $m \geq 2$. 则 $G = G(cd^m, d)$ 是超 λ'' 连通的, 而且

$$\rho'(G) = \begin{cases} 2m & \text{若 } c = 2; \\ 2m + 1 & \text{若 } c \geq 4. \end{cases}$$

推论 4.18 如果 $n \geq 3$, $d_i \geq 4$ ($1 \leq i \leq n$), 那么 $G = C(d_1, \dots, d_n)$ 是超 λ'' 连通的, 而且 $\rho'(G) = 2n - 1$.

§4.5 笛卡尔乘积图的持久度

在笛卡尔乘积图连通度研究中, 欧见平^[179] 给出正则图的笛卡尔乘积是超 λ' 连通的充分必要条件.

命题 4.19 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是 k_i 正则 k_i 边连通图, $k_i \geq 2$. 则笛卡尔乘积 $G_1 \square G_2$ 是超 λ' 连通的 \Leftrightarrow 它不是完全图和圈的笛卡尔乘积.

洪艳梅等人^[180] 给出正则图笛卡尔乘积的持久度 $\rho(G)$ 的下界和上界: 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是 n_i 阶 k_i 正则 k_i 边连通图, $k_i \geq 2$. 则

$$\min\{k_1 + k_2 - 1, n_1 k_2 - k_1 - k_2, n_2 k_1 - k_1 - k_2\} \leq \rho(G_1 \square G_2) \leq k_1 + k_2 - 1.$$

在该项目研究中, 洪振木给出正则图笛卡尔乘积的持久度 $\rho'(G)$ 的下界和上界.

Inform. Sci. 188 (2012), 260-268.

¹⁷⁹Ou, J.-P., On optimizing edge-connectivity of product graphs. Discrete Mathematics, 311 (6) (2011), 478-492.

¹⁸⁰Hong, Y.-M., Meng, J.-X. and Zhang, Z., Edge fault tolerance of graphs with respect to super edge-connectivity. Discrete Appl. Math. 160 (2012), 579-587.

定理 4.20 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是 n_i 阶 k_i 正则 k_i 边连通图, $k_i \geq 4$. 则

$$\min\{k_1 + k_2 - 1, n_1 k_2 - 2k_1 - 2k_2 + 1, n_2 k_1 - 2k_1 - 2k_2 + 1\} \leq \rho'(G_1 \square G_2) \leq k_1 + k_2 - 1.$$

该定理的证明主要困难在于下界的确定, 而且这些上界和下界都能达到. 如果添加一些并不苛刻的条件, 正则图笛卡尔乘积的持久度 $\rho'(G)$ 能被确定.

推论 4.21 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是 k_i 正则 k_i 边连通图, $k_i \geq 4$. 如果下述条件之一被满足:

- (i) G_1 和 G_2 都不是完全图;
- (ii) $k_1 + k_2 \geq 10$;
- (iii) $k_1 = 4, k_2 = 5$ 且 G_2 不是完全图,

则 $\rho'(G_1 \square G_2) = k_1 + k_2 - 1$.

例如, 超立方体 $Q_n = Q_p \square Q_{n-p}$. 若 $n \geq 8$ 且 $\min\{p, n-p\} \geq 4$, 则 $\rho'(Q_n) = n - 1$.

这些研究成果包含在论文《Edgeqlant fault-tolerance of super restricted edge-connected Cartesian product graphs. 中国科学技术大学学报, 44 (12) (2014), 967-974》中.

§5 网络容错嵌入研究

关于网络的容错嵌入研究, 近 10 几年来备受研究工作者的关注. 综述文章^[181] 概述了 2009 年以前的所有相关结果. 本项目考虑变型超立方体网络.

§5.1 变型超立方体网络的边可迁性和路圈嵌入

n 维变型超立方体 (varietal hypercube) VQ_n 递归定义如下. $VQ_1 = K_2$, 顶点集为 $\{0,1\}$. 假定 VQ_{n-1} 已被定义, 且假定 VQ_n^0 (或者 VQ_n^1) 是将 VQ_{n-1} 中每个顶点前添加 0 (或者 1) 而得到的图. 对于 $n > 1$, $VQ_n = VQ_n^0 \cup VQ_n^1$ 并按照下述规则添加连边得到的图: VQ_n^0 中点 $X_n = 0x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_2x_1$ 与 VQ_n^1 中点 $Y_n = 1y_{n-1}y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_2y_1$ 相连 \Leftrightarrow

1. $x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3} \cdots x_2x_1 = y_{n-1}y_{n-2}y_{n-3} \cdots y_2y_1$ 如果 $n \neq 3k$, 或者
2. $x_{n-3} \cdots x_2x_1 = y_{n-3} \cdots y_2y_1$ 且 $(x_{n-1}x_{n-2}, y_{n-1}y_{n-2}) \in I$ 如果 $n = 3k$,

其中 $I = \{(00,00), (01,01), (10,11), (11,10)\}$.

图 24 所示的是变型超立方体 VQ_1, VQ_2, VQ_3 和 VQ_4 .

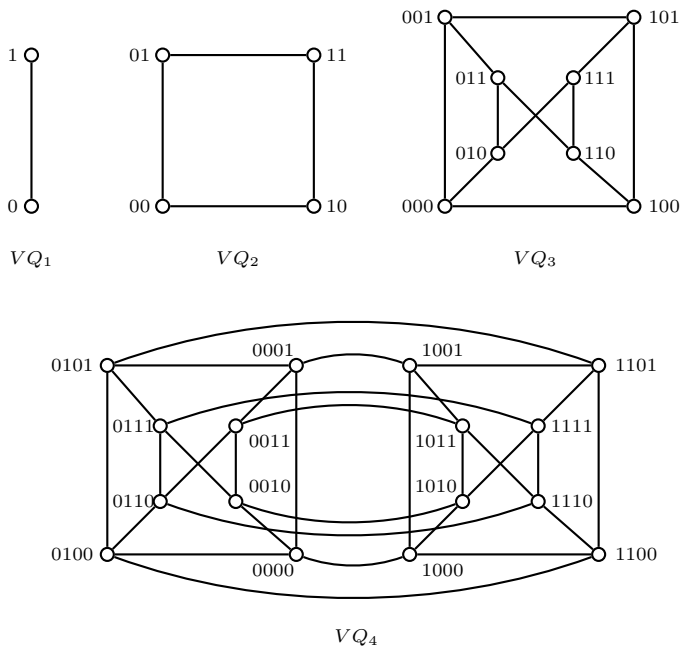


图 24 变型超立方体 VQ_1, VQ_2, VQ_3 和 VQ_4

变型超立方体 VQ_n 是由 Cheng 和 Chuang^[182] 提出来的. 与超立方体 Q_n 一样, VQ_n 是 n 正则 n 连通的, 超连通度和超边连通度都为 $2n - 2$ (见王建伟等人^[183]), 并有优于 Q_n 的性质. 例如, VQ_n 的直径, 平均距离, 容错直径和宽直径都比超立方体 Q_n 小. 在该项目中, 我们进一步研究 VQ_n 的结构性质. 在这个研究过程中发现当 $n = 3k$ 时是最困难的.

¹⁸¹Xu, J.-M. and Ma, M, Survey on path and cycle embedding in some networks. *Frontiers of Mathematics in China*, 4 (2) (2009), 217 - 252.

¹⁸²Cheng S.-Y. and Chuang J.-H. Varietal hypercube - a new interconnection networks topology for large scale multi-computer. *Proceedings of International Conference on Parallel and Distributed Systems*, 1994: 703-708.

¹⁸³王建伟, 徐俊明, Reliability analysis of varietal hypercube networks. *中国科学技术大学学报*, 39 (12) (2009), 1248-1252.

在 VQ_4 中取 3 个顶点 $X = 0101, Y = 1101$ 和 $Z = 0001$ (见图 24), 边 XZ 被包含在一个圈 C_5 中, 而边 XY 却不包含在任何圈 C_5 . 这意味着 VQ_4 不是边可迁的. 然而, VQ_n 是点可迁的.

定理 5.1 对任何 $n \geq 1$, VQ_n 是点可迁的.

证明方法是直接利用点可迁定义, 对于 VQ_n 中任意两顶点 X 和 Y , 构造出一个自同构 σ 使得 $\sigma(X) = Y$. 证明很长、很复杂, 不尽人意.

这个结果包含在论文《Li Xiao, Jin Cao and Jun-Ming Xu, Transitivity of varietal hypercube networks. *Frontiers of Mathematics in China*, 9 (6) (2014), 1401-1410》中.

注: 令 $n = 3k + t, k \geq 0, 0 \leq t \leq 2$, \mathbb{D}_4 是 8 阶二面体群: $\mathbb{D}_4 = \{a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\}$. 令 $\mathbb{G}_n = (\mathbb{D}_4)^k \times (\mathbb{Z}_2)^t, S_n = \{\underbrace{a^2, \dots, a^2}_k, \underbrace{b, \dots, b}_k, \underbrace{ab, \dots, ab}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_t\}$. 最近, 周进鑫^[184] 通过证明 $C_{\mathbb{G}_n}(S_n) \cong VQ_n$, 从而证明了 VQ_n 是 Cayley 图, 因此是点可迁的. 周进鑫证明 VQ_n 是 Cayley 图的方法也有不尽人意的地方, 他没有直接刻画出群 Γ 和生成集 S 使得 $VQ_n = C_\Gamma(S)$. 周进鑫在同一篇文章中还确定了: 若 $n = 3k + t, k \geq 3, 0 \leq t \leq 2$, 则

$$\kappa_o^{(h)}(VQ_n) = n(h+1) - \frac{1}{2}h(h+3) \quad \text{若 } 0 \leq h \leq n-k.$$

关于变型超立方体 VQ_n 的结构性质, 获得如下结果.

定理 5.2 对 $n \geq 2$, VQ_n 中每条边被包含在所有长度 (从 4 到 2^n , 除了 5) 的圈中, 即 VQ_n 是 6 边泛圈的 ($n \geq 3$).

定理 5.3 设 x 和 y 是 VQ_n 中距离为 d 的两顶点. 如果 $n \geq 3$, 那么 VQ_n 中存在所有长度 (从 d 到 $2^n - 1$, 除了 2, 4 如果 $d = 1$) 的 xy 路.

这个结果包含在论文《曹瑾, 肖力, 徐俊明, Cycles and paths embedded in varietal hypercubes. *中国科学技术大学学报*. 44 (9) (2014), 732-737》中.

定理 5.2 意味着 VQ_n 包含 Hamilton 圈, 定理 5.3 分别意味着 VQ_n 是 Hamilton 连通的. 在边故障发生情况下, 该项目研究了变型超立方体 VQ_n 的边容错 Hamilton 性, 获得如下结果.

定理 5.4 对 $n \geq 3$, 只要 VQ_n 中边故障数不超过 $(n-3)$, 剩余网络仍然是 Hamilton 连通的; 只要 VQ_n 中边故障数不超过 $(n-2)$, 剩余网络仍然有 Hamilton 圈.

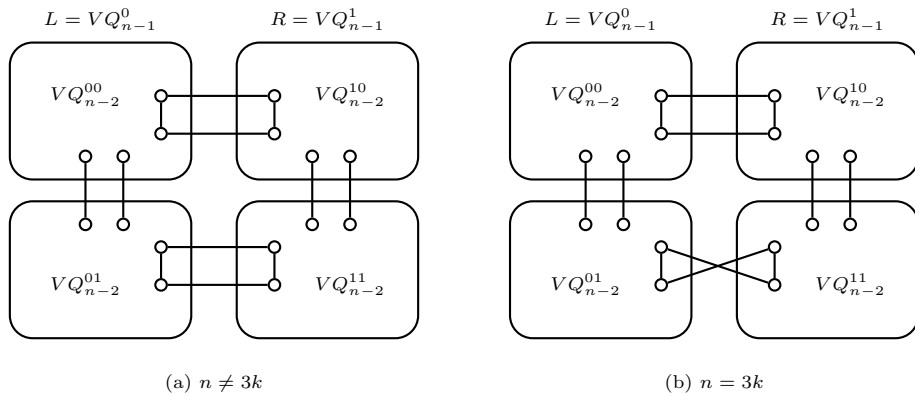
这些结果包含在论文《黄燕云, 徐俊明, Hamilton paths and cycles in fault-tolerant varietal hypercubes. *中国科学技术大学学报*, 46 (6) (2015), 436-442》中.

随后, 我们通过进一步研究 VQ_n 的结构性质, 发现 VQ_n 具有如图 25 所示的递归结构.

在第 §4.4 节中, 我们曾指出变型超立方体 VQ_n 是置换图 $VQ_{n-1}^0 \oplus_M VQ_{n-1}^1$, 其中 VQ_{n-1}^0 与 VQ_{n-1}^1 之间的完备匹配 M 由 M_1 和 M_2 组成: M_1 是 VQ_{n-2}^{00} 与 VQ_{n-2}^{10} 之间的完备匹配, M_2 是 VQ_{n-2}^{01} 与 VQ_{n-2}^{11} 之间的完备匹配.

利用这种结构, 考虑发生点边混合故障, 改进了定理 5.4 中第二个结论, 获得如下结果.

¹⁸⁴Zhou, J.-X., On g -extra connectivity of hypercube-like networks. *Journal of Computer and System Sciences*, 88 (2017), 208-219.

图 25 VQ_n 的递归结构

定理 5.5 设 e 是 VQ_n 中任意一条非故障边, 当点边故障数不超过 $n-2$ ($n \geq 2$) 时, VQ_n 中存在一条非故障 Hamilton 圈包含 e .

这个结果被包含在论文《Jian-Guang Zhou and Jun-Ming Xu, Hamilton paths and cycles in varietal hypercube networks with mixed faults. International Journal of Combinatorics, 2015, Art. ID 513073, 6 pp.》中.

§5.2 容错超立方体网络不交路

对于超立方体 Q_n , 许多研究成果表明它包含每个长度的路和偶圈, 即使它包含故障点或者边, 有关具体结果见一篇综述文章^[185]. 如果 Q_n 没有故障点或者边, 那么对任何两顶点 x 和 y , 由 Menger 定理, Q_n 中存在 n 不交的 xy 路. 但这些路并不一定包含 Q_n 中所有顶点.

注意到 Q_n 是 2 部分图. 设 x 和 y 是 Q_n 中不同划分中的任何两顶点, k 是任意正整数. 2004 年, Chang 等人^[186] 证明了: 对任何 k ($1 \leq k \leq n$), Q_n 中都存在 k 条内点不交的 xy 路, 它们包含 Q_n 中所有顶点. 2007 年, Chang 等人^[187] 进一步证明了: 对任何 k ($1 \leq k \leq n-4$), Q_n 中都存在 k 条内点不交的 xy 路, 包含 Q_n 中所有顶点, 且任何两条路长之差不超过 2.

网络故障是不可避免的. 假定 Q_n 有 f_v 个故障点. 2006 年, Fu^[188] 证明了: 当 $f_v \leq n-2$ 且 $n \geq 3$ 时, 对 Q_n 任何两个距离为 d 的非故障顶点 x 和 y , 如果 d 是奇数 (或者偶数), 那么 Q_n 中存在长至少为 $2^n - 2f_v - 1$ (或者 $2^n - 2f_v - 2$) 的非故障 xy 路. 因为 Q_n 是 2 部图, 如果所有故障点都在同一个划分中, 那么 Q_n 中长为 $2^n - 2f_v - 1$ (或者 $2^n - 2f_v - 2$) 的路是最长的非故障 xy 路. 如果 Q_n 中每个非故障点至少有两个非故障邻点, Kueng 等人^[189] 和马美杰等人^[190] 改进 f_v 的界为 $2n-5$; Fink 和 Gregor^[191] 改进 f_v 的界为 $2n-4$; 当 $n \geq 15$ 时, Dvořák *et al.*^[192] 进一步

¹⁸⁵Xu, J.-M. and Ma, M.-J. A survey on cycle and path embedding in some networks, Front. Math. China. 4 (2) (2009) 217-252.

¹⁸⁶Chang, C.-H., Lin, C.-K., Huang, H.-M. and Hsu, L.-H., The super laceability of the hypercubes, Inform. Process. Lett. 92 (2004) 15-21.

¹⁸⁷Chang, C.-H., Sun, C.-M., Huang, H.-M. and Hsu, L.-H., On the equitable k^* -laceability of hypercubes, J. Comb. Optim. 14 (2007) 349-364.

¹⁸⁸Fu, J.-S., Longest fault-free paths in hypercubes with vertex faults, Inf. Sci. 176(7)(2006)759-771.

¹⁸⁹Kueng, T.-L., Liang, T., Hsu, L.-H. and Tan, J. J. M., Long paths in hypercubes with conditional node-faults, Inf. Sci. 179 (2009), 667-681.

¹⁹⁰Ma, M.-J., Liu, G.-Z. and Pan, X.-F., Path embedding in faulty hypercubes. Applied Mathematics and Computation, 192(1) (2007), 233-238.

¹⁹¹Fink, J. and Gregor, P., Long paths and cycles in hypercubes with faulty vertices, Inf. Sci. 179 (2009) 3634-3644.

¹⁹²Dvořák, T. and Koubek, V., Long paths in hypercubes with a quadratic number of faults, Inf. Sci. 179 (2009)

改进 f_v 的界为 $\frac{1}{10}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

设超立方体 Q_n 包含 f_v 故障点和 f_e 条故障边, k 是整数 ($1 \leq k \leq n-1$), X 和 Y 是在不同划分集中非故障点集且 $|X| = |Y| = k$. 如果 $f_v + f_e = 0$, 那么由 Menger 定理, Q_n 中存在 k 不交的 ST 路. 但这些路并不一定包含 Q_n 中所有非故障点.

2009 年, 陈协彬^[193] 证明了如果 $f_v + f_e \leq n - k - 1$, 那么 Q_n 中存在 k 不交的非故障 ST 路, 它们包含至少 $2^n - 2f_v$ 个顶点. 仅在边故障的情况下, Gregor 等人^[194] 和陈协彬^[195] 获得一些 Q_n 中多点到多点不交非故障路的结果. 本项目仅考虑点故障, 获得如下结果.

定理 5.6 假定 Q_n ($n \geq 2$) 包含 f_v 个故障点, $f_v \leq 2(n - k - 1)$, $1 \leq k \leq n - 1$, X 和 Y 是在不同划分集中非故障点集且 $|X| = |Y| = k$. 如果每个非故障点至少有两个非故障邻点, 那么 Q_n 中存在 k 条不交非故障 ST 路, 它们包含至少 $2^n - 2f_v$ 个顶点.

当 $k = 1$ 时, 定理 5.6 推广了 Fink 和 Gregor 的结果. 同时, 如果 Q_n 不含故障边, 那么定理 5.6 改进了陈协彬的结果.

证明定理 5.6 是采用对 n 进行数学归纳法. 因此需要对 Q_n 进行划分而且满足某些要求, 而且需要在各种情形下构造 k 条不交非故障 ST 路, 下面的两个引理分别确保划分和这些不交路的存在性.

引理 5.7 如果 $f_v \leq 2n - 6$ 且 Q_n ($n \geq 3$) 中每个非故障点至少有两个非故障邻点, 那么存在划分 $Q_n = L \odot R$, 其中 $L \cong R \cong Q_{n-1}$, 使得 L (或者 R) 中每个非故障点在 L (或者 R) 中至少有两个非故障邻点.

引理 5.8 设 x 和 y 是 Q_n ($n \geq 3$) 中相邻两顶点, $1 \leq k \leq n - 2$, S 和 T 分别是 $Q_n - \{x, y\}$ 的不同划分中 k 个顶点集. 则 $Q_n - \{x, y\}$ 中存在 k 条不交 ST 路, 它们包含 $Q_n - \{x, y\}$ 中所有顶点.

定理 5.6 的证明很艰辛, 投稿过程更艰辛, 先后投过 4 个不同的杂志, 均以“找不到合适审稿人”的理由而退回, 从文稿的完成到接收花费五年多时间.

证明思路.

定理 5.6 的证明是对 n (≥ 2) 进行数学归纳. 当 $k = 1$ 时, $f_v \leq 2n - 4$, 由 Fink 和 Gregor 的结果, 定理成立. 当 $k = n - 1$ 时, $f_v = 0$, 由陈协彬的结果, 定理成立. 因此, 当 $2 \leq n \leq 3$ 时, 定理成立. 所以只需考虑 $n \geq 4$ 且 $2 \leq k \leq n - 2$.

归纳部分是利用 Q_n 的递归结构 $Q_n = L \odot R$, 其中 $L \cong R \cong Q_{n-1}$, 使得 L (或者 R) 中每个非故障点在 L (或者 R) 中至少有两个非故障邻点 (引理 5.7 确保这种划分的存在性). 在这样的划分中, S 和 T 中点以及故障点将可能分成两个子集. 这些给定理的证明带来困难.

首先在 L 和 R 中构造两类多对多 (many-to-many) 不交路, 然后合并它们以得到 Q_n 中不交 ST 路. 不幸的是, 在有些情况下, L (或者 R) 中故障数超过归纳假设要求一个或者两个, 这时候我们不能在 L (或者 R) 中直接用归纳假设. 有两个办法处理这种情形. 一是把超过的故障点暂时看到非故障点, 由归纳假设得到不交路. 如果这些路中包含故障点, 就想办法替代掉它们使得到的非故障路保持尽可能多的点. 第二个办法是取 $S \cup T$ 中一个或者两个点作为临时故障点, 由归纳假

3763-3771.

¹⁹³Chen, X.-B., Many-to-many disjoint paths in faulty hypercubes, Inf. Sci. 179 (2009) 3110-3115.

¹⁹⁴Gregor, P. and Dvořák, T., Path partitions of hypercubes, Inform. Process. Lett. 108 (2008) 402-406.

¹⁹⁵Chen, X.-B., Paired many-to-many disjoint path covers of hypercubes with faulty edges, Inf. Process. Lett. 112 (2012) 61-66.

设得到 $k-1$ 条不交路, 然后构造一条新的非故障路链接 $S \cup T$ 中临时故障点 (引理 5.8 确保能做到这一点), 从而得到 Q_n 中 k 不交 ST 路.

当 $f_v \leq 2n - 2k - 2$ 时, 文章最后给出一个关于顶点数的线性算法求 Q_n 中多对多不交非故障路.

这些结果发表在《Xiang-Jun Li, Bin Liu and Meijie Ma and Jun-Ming Xu, Many-to-many disjoint paths in conditionally faulty hypercubes. Discrete Applied Mathematics, 217 (2) (2017), 229-242》一文中.

§6 网络直径与宽直径研究

§6.1 Kronecker 乘积图的直径与图的本源指数

设 G_1 和 G_2 是两个无向图 (可以有环), Kronecker 乘积图 $G_1 \times G_2$ 有顶点集 $V(G_1) \times V(G_2)$, 两顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 相邻 $\Leftrightarrow x_1y_1 \in E(G_1)$ 且 $x_2y_2 \in E(G_2)$.

作为图的运算, Kronecker 乘积^[196]是由 Weichesel^[197]于 1962 年提出, 并证明: 如果 G_1 和 G_2 都是连通的, 则 $G_1 \times G_2$ 是连通的 $\Leftrightarrow G_1$ 和 G_2 至少一个包含奇圈.

Kronecker 乘积 (文献中也称直积, 见 ??) 是图和网络构造重要方法之一, 因此引起人们的研究兴趣. 许多性质和图论参数已被研究, 比如连通度 (见第 ?? 节). Leskovec 等人^[198]获得关于 Kronecker 乘积图直径的如下结果.

命题 6.1 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是直径为 d_i 且每个顶点含有一个环的连通图. 则 Kronecker 乘积图 $G_1 \times G_2$ 的直径 $d(G_1 \times G_2) = \max\{d_1, d_2\}$.

在研究 Kronecker 乘积图的直径时, 我们发现 Kronecker 乘积图的直径与因子图的本源指数有密切关系.

n 阶非负方阵 A 称为本原的 (primitive), 如果存在正整数 k 使 A^k 的每个元素都为正数 (记为 $A^k > 0$). 使 $A^k > 0$ 成立的最小 k 称为 A 的本原指数 (primitive exponent), 记为 $r(A)$.

图 G 称为本源的, 如果它的邻接矩阵 $A(G)$ 是本源的; G 的本源指数定义为它的邻接矩阵 $A(G)$ 的本源指数. Rosenblatt^[199]给出有向图为本原的一个充分必要条件.

命题 6.2 有向图 D 是本原的 $\Leftrightarrow D$ 为强连通的, 而且 D 中所有不同有向圈长 l_1, l_2, \dots, l_c 的最大公约数为 1, 即, $\text{g.c.d}(l_1, l_2, \dots, l_c) = 1$.

设 A_i 是图 G_i 的邻接矩阵, $A_1 \times A_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的邻接矩阵. 则对任何正整数 k 有 $(A_1 \times A_2)^k = A_1^k \times A_2^k$. 通过图的本源指数, 我们确定了 Kronecker 乘积图的直径. 首先, 我们获得一个关键结果.

¹⁹⁶以德国数学家 Leopold Kronecker (1823-1891) 命名, 以纪念他对代数和代数数论, 特别是椭圆函数理论的突出贡献.

¹⁹⁷Weichesel, P. M., The Kronecker product of graphs. Proceedings of the American Mathematical Society, 13 (1962), 47-52.

¹⁹⁸Leskovec, J., Chakrabarti, D., Kleinberg, J., Faloutsos, C. and Ghahramani, Z., Kronecker graphs: An approach to modeling networks. Journal of Machine Learning Research, 11 (2010), 985-1042.

¹⁹⁹Rosenblatt D. On the graphs and asymptotic forms of finite boolean relation matrices. Naval. Res. Quart. 4(1957), 151-167.

定理 6.3 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是直径为 d_i , 本源指数为 r_i 的连通图, $G = G_1 \times G_2$. 如果 G_1 包含奇圈, 那么 G 的直径 $d(G)$ 满足下列性质.

(1) $d(G) \geq \max\{d_1, d_2\}$.

(2) 如果 G_2 包含奇圈, 那么

$$d(G) \geq \begin{cases} r_1 & \text{若 } r_1 = r_2; \\ \min\{r_1, r_2\} + 1 & \text{若 } r_1 \neq r_2. \end{cases}$$

(3) $d(G) \leq \max\{r_1, r_2\}$.

(4) $d(G) \leq \min\{\max\{r_1 + 1, d_2\}, \max\{r_2 + 1, d_1\}\}$, 而且若 G_2 是 2 部图, 则等号成立.

因为每个顶点都有环的连通图 G 有 $r(G) = d(G)$, 定理 6.3 中性质 (1) 和 (3) 意味着命题 6.1. 由定理 6.3, 我们确定了 Kronecker 乘积图的直径.

定理 6.4 对每个 $i = 1, 2$, 设 G_i 是直径为 d_i , 本源指数为 r_i 的连通图. 如果 G_1 包含奇圈, 那么

$$d(G_1 \times G_2) = \begin{cases} r_1 & \text{若 } r_1 = r_2; \\ \max\{r_2 + 1, d_1\} & \text{若 } r_1 > r_2; \\ \max\{r_1 + 1, d_2\} & \text{若 } r_1 < r_2. \end{cases}$$

利用定理 6.3 和定理 6.4, 我们还确定了一些特殊图的 Kronecker 乘积图的直径. 这些研究成果包含在《Fu-Tao Hu and Jun-Ming Xu, On the diameter of the Kronecker product graph. Mathematical Sciences Letters, 2 (2) (2013), 121-127》中.

§6.2 正则图的宽直径

设 G 是 w 连通图. G 中两顶点 x 和 y 之间的宽距离 $d_w(G; x, y)$ 是最小正整数 ℓ 使得 G 中存在 w 条内点不交且长度不超过 ℓ 的 xy 路. 图 G 的宽直径 $d_w(G) = \max\{d_w(G; x, y) : x, y \in V(G)\}$. 宽直径概念是由 Hsu^[200], Flandrin 和李皓^[201] 独立提出来的. 由宽直径定义易知:

$$d(G) = d_1(G) \leq d_2(G) \leq \cdots \leq d_{w-1}(G) \leq d_w(G).$$

这意味着宽直径是经典直径概念的推广. 另一方面, 如果 G 的连通度 $\kappa(G) \geq w$, 那么由著名的 Menger 定理知 $d_w(G)$ 一定存在. 这说明宽直径概念是直径和连通度概念的结合, 是度量网络容错性和可靠性的重要参数. 然而, Hsu 已经证明: 对于一般的 w 连通图 G , 确定 $d_w(G)$ 的问题是 NP 完备问题. 因此, 确定 $d_w(G)$ 的界显得重要. 当 $w \geq 3$ 时, 对于 n 阶 w 连通 w 正则图 G , Hsu 和 Luczak^[202] 给出紧的上界: $d_w(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 我们获得下面的结果.

定理 6.5 对于 n 阶 w 连通 w 正则图 G 和正整数 m , 如果 $\lceil \frac{2w+5}{3} \rceil \leq m \leq w$, 那么

$$d_m(G) \leq \left\lfloor \frac{(n-2)(w-2)}{(w-m+1)(3m-w-4)} \right\rfloor + 1.$$

由定理 6.5, 若 $w \geq 5$, 则 $d_w(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

这个结果包含在《李佳傲, 徐俊明, The wide-diameter of regular graphs. 中科学技术大学学报, 43 (8) (2013), 603-606》一文中.

²⁰⁰Hsu, D. F., On container width and length in graphs, groups, and networks. IEICE Trans. Fundam, 1994, E (77A): 668-680.

²⁰¹Flandrin, E. and Li, H., Mengerian properties, Hamiltonicity and claw-free graphs. Networks, 24(1994), 660-678.

²⁰²Hsu, D. F. and Luczak, T., Note on the k -diameter of k -regular k -connected graphs [J]. Discrete Math., 132(1994), 291-296.

§6.3 强超立方体的宽直径和容错直径

设 G 是 w 连通图. G 的点容错直径 (fault-tolerant diameter) $D_w(G)$ 定义为

$$D_w(G) = \max\{d(G - F) : F \subset V(G), |F| < w\}.$$

容易看到, 对任何 w 连通图 G 有

$$d(G) = D_1(G) \leq D_2(G) \leq \dots \leq D_{w-1}(G) \leq D_w(G).$$

对于 $w (\geq 2)$ 连通图 G , 容错直径 $D_w(G)$ 和宽直径 $d_w(G)$ 有下述关系.

$$D_w(G) \leq d_w(G). \tag{6.6.11}$$

对于 $2 \leq k \leq n$, n 维强超立方体 (enhanced hypercube) $EQ_{n,k}$ 能被构造从超立方体 Q_n 中添加补边 xy , 其中 $x = x_n \cdots x_{k+1}x_kx_{k-1} \cdots x_1$ and $y = x_n \cdots x_{k+1}\bar{x}_k\bar{x}_{k-1} \cdots \bar{x}_1$ (注: 为方便起见, 这里给出的定义与原定义稍有不同, 原定义 $y = x_n \cdots x_{n-k+1}\bar{x}_{n-k}\bar{x}_{n-k-1} \cdots \bar{x}_1$). 图 26 中所示的图是 $EQ_{3,3}$ 和 $EQ_{4,3}$, 其中实线为超立方体中边, 虚线为补边.

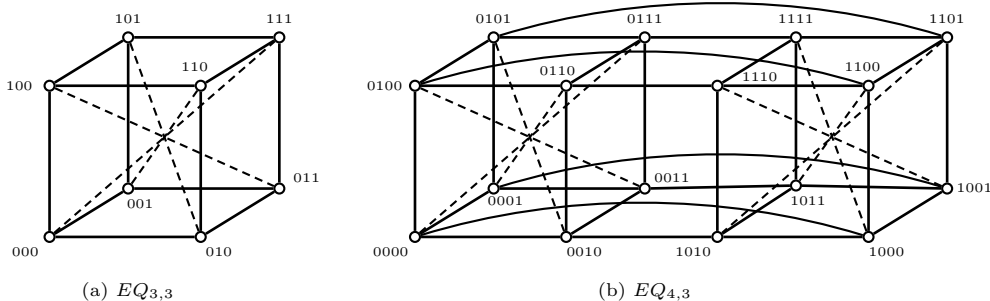


图 26 强超立方体 $EQ_{3,3}$ 和 $EQ_{4,3}$

强超立方体网络是由 Tzeng 和 Wei^[203] 提出来的. 显然, 当 $k = n$ 时, $EQ_{n,n}$ 为 n 维折叠超立方体 (folded hypercube) FQ_n , 即 $EQ_{n,n} = FQ_n$. 因此, 强超立方体是折叠超立方体的推广. 令

$$S_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, S'_n = S_n \cup \{e'_n\},$$

其中 e_i 如 (1.1.1) 所定义, e'_n 如 (2.2.9) 所定义. 由例子 1.11 知, 超立方体 Q_n 是 Cayley 图 $C_{(\mathbb{Z}_2)^n}(S_n)$; 马美杰等人^[204] 证明了折叠超立方体 FQ_n 也是 Cayley 图 $C_{(\mathbb{Z}_2)^n}(S'_n)$. 因而, 超立方体 Q_n 和折叠超立方体 FQ_n 都是点可迁的. 利用笛卡尔乘积, 由 $EQ_{n,k}$ 的定义易知 (见 Yang 等人^[206]),

$$EQ_{n,k} = Q_{n-k} \square FQ_k, \quad (1 \leq k \leq n). \tag{6.6.12}$$

由 2001 年出版的著作^[205] 中的定理 2.3.5 (点可迁图的笛卡尔乘积仍是点可迁) 和表达式 (6.6.12) 立即可知, $EQ_{n,k}$ 是点可迁. 然而, 2015 年, Yang 等人^[206] 证明了强超立方体 $EQ_{n,k}$ 是点可迁. 早在

²⁰³Tzeng, N.-F. and Wei, S., Enhanced hypercubes. IEEE Trans. Comput. 40 (1991) 284-294.
²⁰⁴Ma, M. and Xu, J.-M., Algebraic properties and panconnectivity of folded hypercubes. Ars Combin. 95 (2010), 179-186.
²⁰⁵徐俊明 Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks. Kluwer Academic Publishers, October 2001
²⁰⁶Yang, J.-S., Chang, J.-M., Pai, K.-J. and Chan, H.-C., Parallel construction of independent spanning trees on enhanced hypercubes. IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 26 (2015), 3090-3098.

2010 年, 刘红美等人^[207]就证明了 $EQ_{n,k}$ 是 Cayley 图. 事实上, 根据表达式 (6.6.12) 和著作^[205]中的定理 2.3.10, 因为 Q_{n-k} 和 FQ_k 都是 Cayley 图, 所以 $EQ_{n,k}$ 也是 Cayley 图 $C_\Gamma(S''_n)$, 其中 $\Gamma = \mathbb{Z}_2^n = (\mathbb{Z}_2)^{n-k} \times (\mathbb{Z}_2)^k$, $S''_n = (\{e_0\} \times S'_k) \cup (S_{n-k} \times \{e_0\})$, 其中 $e_0 = 00 \cdots 00$ 是 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 中单位元, 即

$$\begin{aligned} S''_n &= \{\underbrace{0 \cdots 0}_{n-k} \underbrace{10 \cdots 0}_k, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k} \underbrace{01 \cdots 0}_k, \dots, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k} \underbrace{00 \cdots 01}_k, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k} \underbrace{11 \cdots 1}_k\} \\ &\cup \{\underbrace{10 \cdots 0}_{n-k} \underbrace{00 \cdots 0}_k, \underbrace{01 \cdots 0}_{n-k} \underbrace{00 \cdots 0}_k, \dots, \underbrace{0 \cdots 01}_{n-k} \underbrace{0 \cdots 0}_k\} \\ &= S_n \cup \{e'_k\}. \end{aligned}$$

因而, $EQ_{n,k}$ 是点可迁. 注意到 Q_{n-k} 和 FQ_k 都是边可迁的, 而当 $k < n$ 时, 强超立方体 $EQ_{n,k}$ 不是边可迁的.

Tzeng 和 Wei^[203]在提出强超立方体网络时就确定了它的直径; 王大进^[208]确定了它的连通度.

命题 6.6 图的笛卡尔乘积有下述性质 (参见《组合网络理论》^[19]中定理 4.2.2 和定理 4.2.3.):

- (a) 对任何连通图 G_i , $d(G_1 \square G_2) = d(G_1) + d(G_2)$.
- (b) 若 G_i 是 w_i 正则 w_i 连通图, 则 $\kappa(G_1 \square G_2) = w_1 + w_2$.

因为 $\kappa(Q_n) = n = d(Q_n)$ 且 $\kappa(FQ_n) = n + 1$, $d(FQ_n) = \lceil \frac{1}{2}n \rceil$, 由表达式 (6.6.12) 和命题 6.6 知:

$$\kappa(EQ_{n,k}) = n + 1, \quad d(EQ_{n,k}) = (n - k) + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil = n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

因此, 当 $w \leq n + 1$ 时, 宽直径 $d_w(EQ_{n,k})$ 和容错直径 $D_w(EQ_{n,k})$ 都是存在的.

Simó 和 Yebra (1997)^[209], Liaw 和 Chang (1999)^[210]分别确定了 $D_w(FQ_n)$ 和 $d_w(FQ_n)$:

$$D_w(FQ_n) = d_w(FQ_n) = \begin{cases} d(FQ_n) & \text{若 } 1 \leq w < \lceil \frac{1}{2}n \rceil; \\ d(FQ_n) + 1 & \text{若 } \lceil \frac{1}{2}n \rceil \leq w \leq n + 1. \end{cases}$$

Yang 等人^[208]讨论了 $d_w(EQ_{n,k})$ 和 $D_w(EQ_{n,k})$, 但没有确定它们的精确值. 通过建立 $d_w(EQ_{n,k})$ 的上界和 $D_w(EQ_{n,k})$ 的下界, 再利用关系式 (6.6.11), 我们确定了 $d_w(EQ_{n,k})$ 和 $D_w(EQ_{n,k})$ 的精确值.

定理 6.7 当 $3 \leq n$ 且 $2 \leq k \leq n$ 时,

$$D_w(EQ_{n,k}) = d_w(EQ_{n,k}) = \begin{cases} d(EQ_{n,k}) & \text{若 } 1 \leq w < n - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \\ d(EQ_{n,k}) + 1 & \text{若 } n - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq w \leq n + 1. \end{cases}$$

马美杰, West, 徐俊明, The vulnerability of the diameter of enhanced hypercubes. *Theoretical Computers Science*, 694 (2017), 60-65.

²⁰⁷C.-Q. Liu and H.-M. Liu(刘红美), *The Forwarding Indices of Enhanced Hypercube Networks. 2010 International Conference on Multimedia Information Networking and Security, 2010, pp 116-118.*

²⁰⁸D. Wang, Diagnosability of enhanced hypercubes. *IEEE Trans. Comput.* 43 (1994) 1054-1061.

²⁰⁹Simó, E. and Yebra, J. L. A., The vulnerability of the diameter of folded n -cubes. *Discrete Math*, 174 (1997), 317-322.

²¹⁰Liaw, S. C. and Chang, G. J., Generalized diameters and Rabin numbers of networks. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2 (4) (1999), 371-384

第二部分 2013-2019 年期间其它研究成果

摘 要

在前 4 年期间, 本课题组除了完成国家自然科学基金资助项目《计算机科学中的若干组合问题研究》外, 还继续完成另一个基金项目《约束数及相关问题研究》(2010.01-2013.12; 项目编号: 11071233). 在这个项目的最后一个执行年里, 继续对正则图和平面图的约束数, 超环面网络的全控制数和成对控制数, p 控制数与约束数, Roman 控制数及约束数和符号边控制划分数的研究, 顺利结题并完成结题报告. 在约束数的研究中, 引起了我们对 p 加强数的研究兴趣, 研究 p 加强数问题的复杂性; 确定了某些特殊图的加强数(如路, 圈和完全 t 部图); 任何树的加强数不超过 $p+1$, 而且当 $p \geq 3$ 时, 递归地构造出其加强数为 $p+1$ 的所有树. 发表有关约束数专题综述文章《On bondage numbers of graphs – a survey with some comments》. 在此期间出版英文专著两部《Combinatorial Theory in Networks》和《A First Course in Graph Theory》; 发表有关路由转发指数专题综述文章《The forwarding indices of graphs – a survey》. 除此以外, 我们还研究了有向图的边反圈数与 Caccetta-Haggkvist 猜想, 以及 Seymour 第二邻域猜想问题, 获得并且改进了若干已知的结果. 最后介绍我们在图的 Pebbling 数方面的研究工作.

§7 控制数与约束数研究

设 $G = (V, E)$ 是图. 子集 $D \subseteq V(G)$ 称为 G 的控制集, 如果不在 D 中每个点都与 D 中某个点相邻. 最小控制集中的点数称为 G 的控制数, 记为 $\gamma(G)$. 子集 $B \subseteq E(G)$ 称为 G 的约束集, 如果 $\gamma(G - B) > \gamma(G)$. 最小约束集中的边数称为 G 的约束数 (Bondage number), 记为 $b(G)$.

约束数是度量控制集脆弱性的主要参数, 自 1990 年提出以来, 备受研究工作者的关注. 2013 年是本课题组国家自然科学基金资助项目《约束数及相关问题研究 (2010.01-2013.12; 项目编号: 11071233)》最后一个执行年. 在这一年里, 我们完成了一篇关于约束数方面综述文章《On bondage numbers of graphs – a survey with some comments》并发表在《International Journal of Combinatorics》(2013) 中. 在这篇文章中, 我们系统地总结了约束数研究的历史、进展、主要结果、问题和猜想、并附有作者的评论. 这一节将总结一下自 2003 年以来, 我们在控制数和约束数方面的后续研究工作, 主要是正则图和平面图的约束数, 超环面网络的全控制数和成对控制数, p 控制数与约束数, Roman 控制数及约束数和符号边控制色数等方面的研究工作.

§7.1 正则图和平面图的约束数研究

设 G 是 $n (\geq 2)$ 阶 k 正则图. 当 $k = n - 1$ 时, G 是完全图 K_n . Fink 等人^[211] 证明了: 完全图 K_n ($n \geq 2$) 的约束数为 $\lceil n/2 \rceil$. 当 $k = n - 2$ 时, G 是完全 t 部分图 $K_t(2)$, 其中 $t = n/2, n \geq 4$ 为偶数. Fink 等人在同一篇文章中证明了: n 阶完全 t 部分图 $K_t(2)$ 图的约束数为 $n - 2$. 当 $k = n - 3$ 时, 我们证明了:

定理 7.1 设 G 是 n 阶 $(n - 3)$ 正则图, 那么 G 的约束数 $b(G) = n - 3$.

²¹¹J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, J. Roberts, The bondage number of a graph. Discrete Mathematics, 86 (1990), 47-57]

这个成果包含在《Fu-Tao Hu and Jun-Ming Xu, The bondage number of $(n-3)$ -regular graph of order n . *Ars Combinatoria*, 120 (2015), 275-281》一文中.

对任何平面图 G , 康丽英和原晋江^[212]证明了: $b(G) \leq \min\{8, \Delta + 2\}$, 其中 Δ 是 G 的最大度. 后来, Carlson 和 Develin^[213] 提出一个新方法给出这个结果的简单证明. 我们利用这个方法证明了康丽英和原晋江的结果对交叉数 $cr(G)$ 小于 4 的图 G 也是成立的.

定理 7.2 对于连通图 G , 如果它满足下列之一:

- (a) $cr(G) \leq 3$,
- (b) $cr(G) = 4$ 且 G 不是 4 正则的,
- (c) $cr(G) = 5$ 且 G 不含 4 度点,

那么 $b(G) \leq \Delta(G) + 2$.

定理 7.3 设 G 是连通图且 $\Delta(G) \geq 6$ 且 $cr(G) \leq 3$. 如果 $\Delta(G) \geq 7$ 或者 $\Delta(G) = 6, \delta(G) \neq 3$ 并且每条边 $e = xy, d_G(x) = 5, d_G(y) = 6$ 被包含在最多一个三角形中, 那么 $b(G) \leq \min\{8, \Delta(G) + 1\}$.

定理 7.4 设 G 是连通图且 $\Delta(G) = 5, cr(G) \leq 4$. 如果任何三角形都不含 2 个 5 度点, 那么 $b(G) \leq 6 = \Delta(G) + 1$.

这些成果被包含在《Yong-Chang Cao, Jia Huang and Jun-Ming Xu, The bondage number of graphs with crossing number less than four. *Ars Combinatoria*, 112 (2013), 493-502》一文中.

§7.2 超环面网络的全控制数和成对控制数

子集 $D \subseteq V(G)$ 称为 G 的全控制集(total dominating set), 如果 G 中每个点都与 D 中某个点相邻. 最小全控制集中的点数称为 G 的全控制数, 记为 $\gamma_t(G)$.

图 G 的控制集 D 被称为成对 (paired) 控制集, 如果导出子图 $G[D]$ 包含完备匹配. 这个概念是由 Haynes 和 Slater^[214]. 图 G 的成对控制数 (paired domination number) $\gamma_{pai}(G)$ 定义为最小成对控制集中的点数. 显然,

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pai}(G).$$

Pfaff 等人^[215] 和 Haynes 等人^[216] 分别证明了确定全控制数和成对控制数问题都是 NP 完备问题.

用记号 $G_{n,m}$ 表示超环面网络, 它是两个圈 C_n 和 C_m 的笛卡尔乘积 $C_n \square C_m$. Klavžar 和 Seifter^[217] 确定了 $\gamma(G_{n,m}), n \geq 3, m \in \{3, 4, 5\}$. 该项目获得如下结果.

²¹²Kang, L.-Y. and Yuan, J.-J., Bondage number of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 222 (2000), 191-198.

²¹³Carlson, K. and Develin, M., On the bondage number of planar and directed graphs. *Discrete Mathematics*, **306** (8-9) (2006), 820-826.

²¹⁴Haynes, T. W. and Slater, P. J., Paired-domination and the paired-domestic number. *Congresses Numerantium*, 109 (1995), 65-72.

²¹⁵Pfaff, J., Laskar, R.C. and Hedetniemi, S.T., NP-completeness of total and connected domination and irredundance for bipartite graphs, Technical Report 428, Clemson University, Dept. Math. Sciences, 1983.

²¹⁶Haynes, T. W. and Slater, P. J., Paired-domination in graphs. *Networks*, 32 (1998), 199-206.

²¹⁷Klavžar, S. and Seifter, N., Dominating cartesian products of cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 59 (1995), 129-136.

定理 7.5 对任何整数 $n (\geq 3)$,

$$\begin{aligned} \gamma_t(G_{n,3}) &= \lceil \frac{4n}{5} \rceil; \\ \gamma_{pai}(G_{n,3}) &= \begin{cases} \lceil \frac{4n}{5} \rceil & \text{if } n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}, \\ \lceil \frac{4n}{5} \rceil + 1 & \text{if } n \equiv 1, 3 \pmod{5}; \end{cases} \\ \gamma_t(G_{n,4}) = \gamma_{pai}(G_{n,4}) &= \begin{cases} n & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n + 1 & \text{if } n \equiv 1, 3 \pmod{4}, \\ n + 2 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

该项目还给出 $\gamma_t(G_{n,5})$ 和 $\gamma_{pai}(G_{n,5})$ 的上界. 这些结果包含在《Fu-Tao Hu and Jun-Ming Xu, Total and paired domination numbers of toroidal meshes. Journal of Combinatorial Optimization, 27 (2) (2014), 369-378》一文中.

§7.3 完全 t 部图的 p 控制数

设 $G = (V, E)$ 是无向图, p 是正整数. 子集 $D \subseteq V$ 称为 G 的 p 控制集, 如果 \bar{D} 中的每个点在 D 中至少有 p 个邻点. 显然, 当 $p = 1$ 时, p 控制集就是通常意义下的控制集. 因此, p 控制集是经典控制集的推广. 下面的命题是显然的.

命题 7.6 图 G 中每个 p 控制集一定包含所有其度最多为 $p - 1$ 的顶点.

最小 p 控制集称为 γ_p -集, γ_p -集中的点数称为 G 的 p 控制数, 记为 $\gamma_p(G)$. 图的 p 控制数是由 Fink 等人^[218] 提出来的^[219].

显然, 图的 p 控制数问题是 NP 完备问题. 因此, 确定特殊图类的 p 控制数是有意义的. 2009 年, Shaheen^[220] 获得 $\gamma_2(C_m \square C_n)$ 上下界, 并确定某些情形的精确值. 除此以外, 没有任何结果. 本项目确定完全 t 部图 K_{n_1, n_2, \dots, n_t} 的 p 控制数.

令 $\{V_1, V_2, \dots, V_t\}$ 是 K_{n_1, n_2, \dots, n_t} 的 t 部划分, $N_t = \{1, 2, \dots, t\}$. 对任意 $I \subseteq N_t$, 令

$$f(I) = \sum_{i \in I} n_i.$$

注意到由命题 7.6, 如果 $t = 1$ 或者 $f(N_t) \leq p$, 那么 $\gamma_p(G) = |V(G)|$. 因此, 总可以假定 $t \geq 2$ 且 $f(N_t) > p$. 令

$$\mathcal{I}_p = \{I \subseteq N_t : |I| \leq t - 2, f(I) < p, \lceil \frac{p-f(I)}{t-|I|-1} \rceil \leq n_i, i \in N_t - I\}.$$

并且令

$$s_1 = \min\{f(I) : I \subseteq N_t, f(I) \geq p\},$$

$$s_2 = \begin{cases} \min\{\lceil \frac{p-f(I)}{t-|I|-1} \rceil : I \in \mathcal{I}_p\} & \text{if } \mathcal{I}_p \neq \emptyset; \\ \infty & \text{if } \mathcal{I}_p = \emptyset. \end{cases}$$

利用这些记号, 我们的结果可以表示如下:

²¹⁸Fink, J. F. and Jacobson, M. S., n -Domination in graphs, in: Y.Alavi, A.J.Schwenk (Eds.), Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, (1985) 283-300.

²¹⁹注: 这是《组合网络理论》¹⁹ §15.2 中的 (ℓ, w) 控制数的特殊情况: $\ell = 1$ 且 $w = p$.

²²⁰Shaheen, R.S., Bounds for the 2-domination number of toroidal grid graphs. International Journal of Computer Mathematics, 86 (4) (2009) 584-588.

定理 7.7 设 $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$ 是完全 t 部图. 如果 $t \geq 2$ 且 $f(N_t) > p$, 那么对任何 $p \geq 1$,

$$\gamma_p(G) = \min\{s_1, p + s_2\}.$$

这个结果被包含在《You Lu and Jun-Ming Xu, The p -domination number of complete multipartite graphs. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 6 (4) (2014) 1450063 (9 pages)》一文中.

§7.4 Roman 控制数及约束数的研究

图 G 上的 Roman 控制函数是由 Cockayne 等人^[221]提出的, 是指映射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 使得每个取值为 0 的点至少与一个取值为 2 的点相邻. 令 $V_i = \{x \in V(G) : f(x) = i\}$, $i = 0, 1, 2$. 则 (V_0, V_1, V_2) 是 $V(G)$ 的划分. 易见, $V_1 \cup V_2$ 是 G 的控制集, 称为 Roman 控制集, 记为 $D_R = (V_1, V_2)$. $f(G) = \sum_{x \in V} f(x)$ 称为 f 的权. Roman 控制数 $\gamma_R(G)$ 是指所有 Roman 控制函数中最小的权. Roman 控制数 $\gamma_R(G)$ 与经典控制数 $\gamma(G)$ 之间的关系:

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

目前关于 Roman 控制数的结果并不多. 我们获得如下结果.

定理 7.8 ① 对于二部图, Roman 控制数问题是 NP 完备的.

② 如果 $n \geq 3$, 则 $\gamma_R(G) = 3$ 当且仅当 $\Delta = n - 2$.

③ 如果 G 是 $n - 3$ 正则的且阶 $n \geq 4$, 则 $\gamma_R(G) = 4$.

这个结果包含在《Fu-Tao Hu and Jun-Ming Xu, Roman bondage numbers of some graphs. Australasian Journal of Combinatorics, 58 (1) (2014), 106-118》一文中.

图 G 的 Roman 约束数 $b_R(G)$ 是由 Stewart^[222]提出来的, 定义为使得 Roman 控制数增加所需要去掉的最少边数. 关于图 G 的 Roman 约束数, 我们得到如下结果:

定理 7.9 确定任意图 G 的 Roman 约束数问题是 NP-hard 问题, 即使 G 是 2 部图.

对于连通图 G , 我们获得 Roman 约束数 $b_R(G)$ 的上界.

定理 7.10 设 G 是 n 阶连通图.

① 如果 $n \geq 3$ 且 $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$, 则 $b_R(G) \leq \min\{b(G), \eta_\Delta\}$, 其中 η_Δ 是 G 中最大度为 Δ 的点数.

② 设 $n \geq 4$. 如果 $\gamma_R(G) = 3$, 那么

$$b_R(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) = n - 2 & \text{如果 } \gamma_R(G) = 3, \\ \Delta(G) + \delta(G) - 1 & \text{如果 } \gamma_R(G) = 4. \end{cases}$$

我们确定了某些图的 Roman 约束数 $b_R(G)$ 的精确值.

²²¹E.J. Cockayne, P.A. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, Roman domination in graphs. Discrete Mathematics, 278 (1-3) (2004), 11-22.

²²²Stewart, I., Defend the Roman Empire. Scientific American 281 (1999), 136-139.

定理 7.11 ① 如果 G 有唯一的最小 Roman 控制函数, 则 $b_R(G) = 1$.

② 设 $K_{3,3,\dots,3}$ 是完全 t 部图, $t \geq 3$. 如果 $G = K_{3,3,\dots,3}$, 那么 $b_R(G) = n - 1$; 如果 $G \neq K_{3,3,\dots,3}$, 则 $b_R(G) = n - 2$.

③ 如果 $n \geq 2$, 设 $b_R(P_2 \times P_n) = 2$.

④ 设 $G = K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ 是完全 t (≥ 2) 部图, 其中 $m_1 = m_2 = \dots = m_i < m_{i+1} \leq \dots \leq m_t$, $n = \sum_{j=1}^t m_j$ 且 $n \geq 3$. 那么

$$b_R(G) = \begin{cases} \lceil \frac{i}{2} \rceil & \text{if } m_i = 1 \text{ and } n \geq 3; \\ 2 & \text{if } m_i = 2 \text{ and } i = 1; \\ i & \text{if } m_i = 2 \text{ and } i \geq 2; \\ n - 1 & \text{if } m_i = 3 \text{ and } i = t \geq 3; \\ n - m_t & \text{if } m_i \geq 3 \text{ and } m_t \geq 4. \end{cases}$$

这些结果包含在《A. Bahremandpour, Fu-Tao Hu, S. M. Sheikholeslami and Jun-Ming Xu, On the Roman bondage number of a graph, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 5 (1) (2013), 1350001(15 pages)》一文中.

§7.5 符号边控制色数与 Hadamard 矩阵

回顾一下图中染色概念. 设 G 是图, $\Omega(G)$ 是 $V(G)$ 的划分. 如果 $\Omega(G)$ 中每个子集都是 G 的独立集, 则称 $\Omega(G)$ 称为 G 的独立集划分. G 的点色数 (chromatic number) $\chi(G)$ 是 $V(G)$ 的独立集划分 $\Omega(G)$ 中子集的最小数目. 如果 $\Omega(G)$ 中每个子集都是 G 的控制集, 则称 $\Omega(G)$ 称为 G 的控制划分. G 的控制色数 (domatic number) $d(G)$ 是 $V(G)$ 的控制划分 $\Omega(G)$ 中子集的最小数目. 词 “domatic” 是由词 “dominating” 和词 “chromatic” 生成. 图的 domatic 数概念是由 Cockayne 和 Hedetniemi^[223] 提出来的.

设 $\Omega'(G)$ 是 $E(G)$ 的划分. 如果 $\Omega'(G)$ 中每个子集都是 G 的匹配集, 则称 $\Omega'(G)$ 称为 G 的匹配划分. G 的边色数 $\chi'(G)$ 是 $V(G)$ 的匹配划分 $\Omega'(G)$ 中子集的最小数目. 如果 $\Omega'(G)$ 中每个子集都是 G 的边控制集, 则称 $\Omega'(G)$ 称为 G 的边控制划分. G 的边控制色数 $d'(G)$ 是 $V(G)$ 的边控制划分 $\Omega'(G)$ 中子集的最小数目.

设 $G = (V, e)$ 是图, \mathbb{R} 是实数集, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 是映射. 记 $f(G) = \sum_{x \in V} f(x)$.

图 G 控制函数是映射 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ 使得 f 在每个点 x 的闭邻点集 $N_G[x]$ 有 $f(N_G[x]) \geq 1$. 映射 f 是 G 的控制集 D 的特征函数, 控制数 $\gamma(G)$ 就是 $\min\{f(G) : f \in F(G)\}$, 其中 $F(G)$ 为 G 的控制函数集. 替代 $\{0, 1\}$ 为 $\{-1, 1\}$ 就得到符号控制函数. 符号控制数 $\gamma_s(G) = \min\{f(G) : f \in F_s(G)\}$, 其中 $F_s(G)$ 为 G 的符号控制函数集. 符号控制数是由 Dunbar 等人^[224] 提出来的.

Volkman 和 Zelinka^[225] 研究了符号控制色数 $d_s(G)$, 并且证明了: $d_s(G)$ 是奇数. 我们考虑符号边控制色数 $d'_s(G)$.

图 G 的符号边控制函数是映射 $f: E(G) \rightarrow \{-1, 1\}$ 使得 $f(e)$ 在每个边 e 的闭邻边集 $N_G[e]$ 有 $f(N_G[e]) \geq 1$. 图 G 的符号边控制色数 $d'_e(G)$ 是最大数 d 使得 G 的 d 个不同的符号边控制函数 $\{f_1, \dots, f_d\}$ 满足对任何边 e 有 $\sum_{i=1}^d f_i(e) \leq 1$. 对于非空图 G , $d'_e(G)$ 和 $d_s(G)$ 有下列关系:

²²³Cockayne, E. J. and Hedetniemi, S. T., Towards a theory of domination in graphs. Networks, 7 (1977), 247-261.

²²⁴Dunbar, J. E., Hedetniemi, S. T., Henning, M. A. and Slater, P. J., Signed domination in graphs, Graph Theory, Combinatorics, and Applications, John Wiley & Sons, Inc. 1 (1995), 311-322.

²²⁵Volkman, L. and Zelinka, B., Signed domatic number of a graph. Discrete Applied Mathematics, 150 (2005), 261-267.

$d'_s(G) = d_s(L(G))$ 是奇数, 其中 $L(G)$ 是 G 的线图.

我们确定了某些特殊图类的符号边控制色数, 如路、圈、星、格网络、完全图等.

定理 7.12 对于 $n \geq 3$,

$$d'_s(C_n) = d_s(C_n) = \begin{cases} 3 & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 & n \equiv 1, 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$d'_s(K_{1,n}) = d_s(K_n) = \begin{cases} n & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor_0 & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

其中 $\lfloor n \rfloor_0$ 表示不超过 n 的最大奇数.

$$d'_s(P_n) = 1, n \geq 2.$$

$$d'_s(P_n \times P_m) = 1, n, m \geq 2.$$

对于完全图 K_n , $d'_s(K_n)$ 的确定依赖于 $4k$ 阶 Hadamard 矩阵的存在性. 所谓 n 阶 Hadamard 矩阵 $H(n)$ 是其元素取自 $\{-1, 1\}$ 的方阵 H 使得 $HH^T = nI_n$, 其中 H^T 表示 H 的转置矩阵, I_n 是单位方阵. 例如, $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 是 2 阶 Hadamard 矩阵, 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Hadamard 矩阵的阶只能是 $n = 1, 2$ 或者 $n \equiv 0 \pmod{4}$. 关于 Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 有一个至今还未解决的著名猜想.

猜想 7.13 对任何整数 $k \geq 1$, Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 是存在的.

借助于 Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 的存在性, 我们给出完全图 K_n 的符号边控制色数 $d'_s(K_n)$ 的表达式.

定理 7.14 对于完全图 K_n , $n \geq 2$,

$$d'_s(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{2}; \\ n & \text{若 } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ 且 } H(n+1) \text{ 存在}; \\ n-2 & \text{若 } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ 且 } H(n-1) \text{ 存在}. \end{cases}$$

定理 7.14 的证明用到对称区组设计.

设 $\mathcal{D} = \{B_1, B_2, \dots, B_v\}$ 是 v 个元素集 P 上 k 元区组集. 若 P 中每个元素正好出现在 λ 个区组中, 则称 \mathcal{D} 为关于参数 (v, k, λ) 的对称平衡不完全区组设计, 简称为对称 (v, k, λ) 设计. \mathcal{D} 的补 $\mathcal{D}^c = \{P \setminus B_1, P \setminus B_2, \dots, P \setminus B_v\}$ 是对称 $(v, v-k, v-2k+\lambda)$ 设计. Hadamard 矩阵与对称设计有如下密切关系.

引理 7.15 对任何整数 $k \geq 1$, Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 存在 \Leftrightarrow 对称 $(4k-1, 2k-1, k-1)$ 存在.

定理 7.14 说明: 如果 n 是奇数, $d'_s(K_n)$ 的确定依赖于 Hadamard 矩阵 $H(4k)$ 的存在性. 已经证明: 当 $k \leq 166$ 时 $H(4k)$ 是存在的 (见 Đoković^[226]). 另一方面, 我们能证明: 如果 $d'_s(K_n) = n$ (其中 $n \equiv 3 \pmod{4}$), 那么 Hadamard 矩阵 $H(n+1)$ 存在. 换句话说, $d'_s(K_n) = n$ ($n \equiv 3 \pmod{4}$) \Leftrightarrow Hadamard 矩阵 $H(n+1)$ 存在. 这说明当 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 确定 $d'_s(K_n)$ 的困难性与确定 Hadamard 矩阵 $H(n+1)$ 的困难性是等价的. 因此, 我们的结果建立了符号边控制色数与 Hadamard 矩阵之间的密切联系.

这些结果发表在《Xiang-Jun Li and Jun-Ming Xu, Signed edge-domestic number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 29 (6) (2013), 1881-1890》一文中. 这篇文章的发表一波三折, 险些被拒, 主要是有位审稿人对线图有模糊认识. 为此, 我写了一篇网络文章《论文险被拒—线图惹的祸》^[227].

§7.6 广义控制数与独立数研究

回顾我们在 §6.2 定义的宽直径概念. 图 G 的宽直径 $d_m(G)$ 是最小整数 d 使得对 G 中任何两点 x 和 y 存在 m 条内点不交且长度不超过 d 的 xy 路. 显然, $d_1(G)$ 就是经典的直径 $d(G)$.

对于给定的正整数 ℓ 和 w , 图 G 的 (ℓ, w) 控制数 $\gamma_{\ell, w}(G)$ 是最小整数 k , G 中存在点数为 k 的子集 D 使得对任何不在 D 中的点 x , 存在 w 条内点不交且长度不超过 ℓ 的 xy 路. 显然, $\gamma_{1, 1}(G)$ 就是经典的控制数 $\gamma(G)$. 因此, 对于一般的图 G , 确定 $\gamma_{\ell, w}(G)$ 问题是 NP 完备的. 对任何 w 连通图 G , 如果 $\ell \geq d_w(G)$, 那么 $\gamma_{\ell, w}(G) = 1$. 因此, 如果 $\ell < d_w(G)$, 那么 $\gamma_{\ell, w}(G) \geq 2$.

图 G 的 (ℓ, w) 独立数 $\alpha_{\ell, w}(G)$ 是最小整数 k , G 中存在点数为 k 的子集 D 使得对 D 中任何两点 x 和 y 它们的宽距离 $d_w(G; x, y) > k$. 显然, $\alpha_{1, 1}(G)$ 就是经典的控制数 $\alpha(G)$. 因此, 对于一般的图 G , 确定 $\alpha_{\ell, w}(G)$ 问题是 NP 完备的. 显然, 对任何 w 连通图 G , $\alpha_{\ell, w}(G) = 1 \Leftrightarrow d \geq d_w(G)$. 因此, 如果 $\ell < d_w(G)$, 那么 $\alpha_{\ell, w}(G) \geq 2$.

谢欣一直在做图的 (ℓ, w) 控制数和 (ℓ, w) 控制数方面的研究. 2012 年^[228', 229], 他确定了双环面网络 $G_{m, n} = C_m \times C_n$ 的 $(\ell, 4)$ 控制数 $\gamma_{\ell, 4}(G_{m, n})$ 和 $(\ell, 4)$ 独立数 $\alpha_{\ell, 4}(G_{m, n})$. 后来, 他考虑了循环有向图 $G(d^n; \{1, d, \dots, d^{n-1}\})$ 和 d 叉立方网络 $C(d, n)$, 获得如下结果.

定理 7.16 设 $G = G(d^n; \{1, d, \dots, d^{n-1}\})$, $d \geq 4$, $n \geq 5$. 若 $1 \leq w \leq n$, $d_w(G) - (g(d, n) + \delta_w) \leq \ell \leq d_w(G) - 1$, 其中 $g(d, n) = \min \left\{ \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil - \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)(\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1) \right\} - 2$, $\delta_w = \begin{cases} 0 & \text{若 } w \leq n - 1; \\ 1 & \text{若 } w = n, \end{cases}$ 则 $\gamma_{\ell, w}(G) = 2$.

这个成果包含在《谢欣, 徐俊明, On the (ℓ, w) -domination numbers of the circulant network. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 91 (2014), 3-18》一文中.

定理 7.17 设 $d, n \geq 4$. 若 $w = n$ 且 $n(d-1) - f(n, d) + 1 \leq \ell \leq n(d-1)$; 或者若 $1 \leq w \leq n-1$ 且 $n(d-1) - f(n, d) \leq \ell \leq n(d-1) - 1$, 其中 $f(d, n) = \min \left\{ \lceil \frac{d}{2} \rceil (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1), \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{d}{2} \rceil \right\}$, 则 $\gamma_{\ell, w}(C(d, n)) = 2$.

这个成果包含在《谢欣, 徐俊明, On the (ℓ, w) -domination number of the cube network. *Ars Combinatoria*, 123 (2015), 185-194. 一文中.

²²⁶Đoković, D. Ž., Hadamard matrices of order 764 exist. *Combinatorica*, 28 (4) (2008), 487-489.

²²⁷徐俊明, 论文险被拒—线图惹的祸. <http://staff.ustc.edu.cn/~xujm/essay2013b.pdf>

²²⁸谢欣, 徐俊明, Domination number of undirected toroidal mesh. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 28 (3) (2012), 453-462

²²⁹谢欣, 徐俊明, 无向超环面网的 (d, m) 独立数. *系统科学与数学*, 32 (3) (2012), 327-333.

§8 p 加强数的研究

用 G^c 表示图 G 的补图, 即 $V(G^c) = V(G)$, $E(G^c) = \{xy : xy \notin E(G)\}$. 设 $R \subseteq E(G^c)$. 如果 $\gamma(G+R) < \gamma(G)$, 则称 R 为 G 的加强集 (reinforcement set). 最小加强集中的边数称为 G 的加强数 (reinforcement number), 记为 $r(G)$. 加强数概念是由 Kok 和 Mynhardt^[230] 提出. 黄佳等人^[231] 研究过有向图的加强数. 与约束数一样, 加强数也是度量图的控制脆弱性的重要概念.

回顾在本文的 §7.3 中图 G 的 p 控制数 $\gamma_p(G)$ 的定义. 设 $G = (V, E)$ 是无向图, p 是正整数. 子集 $D \subseteq V$ 称为 G 的 p 控制集, 如果 \bar{D} 中的每个点在 D 中至少有 p 个邻点. 显然, 当 $p = 1$ 时, p 控制集就是通常意义下的控制集. 因此, p 控制集是经典控制集的推广. 据此, 我们引进 p 加强数的概念.

设 $R \subseteq E(G^c)$. 如果 $\gamma_p(G+R) < \gamma_p(G)$, 则称 R 为 G 的 p 加强集 (p -reinforcement set). 最小 p 加强集中的边数称为 G 的 p 加强数 (p -reinforcement number), 记为 $r_p(G)$.

我们对图的 p 加强数进行原始研究, 讨论了它的计算复杂性, 并确定一些特殊图类的 p 加强数. 主要研究成果由陆由获得.

§8.1 p 加强数的复杂性

现在考虑图 G 的 p 加强数问题. 当 $p = 1$ 时, G 的 1 加强数问题就是经典的加强数问题.

加强数问题 (Reinforcement Problem):

实例: 任意图 G 和正整数 k .

问题: 是否有 $r(G) \leq k$?

我们在文章^[232] 证明了这个问题是 NP-hard 的. 证明方法是通过 3 可满足问题的任意实例句子 \mathcal{C} 来构造加强数问题中实例图 G 并取 $k = 1$ 使得 \mathcal{C} 是可满足的 $\Leftrightarrow r(G) \leq 1$. 因为当 $k = 1$ 时的加强数问题是一般加强数问题的子问题, 所以加强数问题 NP-hard 问题.

因为加强数问题是 p 加强数问题的子问题, 所以 p 加强数问题也是 NP-hard 问题.

我们考虑另一类复杂性问题. 上面讨论的问题涉及数字 k , 它是任意正整数. 在问题的 NP 完备性证明中, 人们通常考虑它的子问题, 取 k 的特殊值. 如果对于这个特殊 k 可以证明它是 NP 完备的, 那么该问题就是 NP 完备的, 这里强调 k 的任意性. 但有些问题, 如果 k 是一个固定值, 它就不是 NPC 问题了. 看一个例子.

p 控制集 (p -dominating Set) 问题:

实例: 任意图 G , 正整数 p 和 k .

问题: 是否存在 p 控制集 D_p 使得 $|D_p| \leq k$?

我们已经知道, 当 $p = 1$ 时, 控制集问题是 NP 完备的. 但如果 k 是一个固定的常数, 那么它就不是 NPC 问题了, 因为可以通过检查所有点数不超过 k 子集来寻找控制集. 又因为 k 是固定常数, 这些子集的数目是多项式界的, 即, 如果图的点数为 n , 那么 $n \geq k$, 且点数不超过 k 子集的个

²³⁰Kok, J. and Mynhardt, C. M., Reinforcement in graphs, *Congr. Numer.* **79** (1990) 225-231.

²³¹Huang, J., Wang J.-W. and Xu, J.-M., Reinforcement numbers of digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, **157**(8) (2009), 1938-1946.

²³²胡夫涛, 徐俊明, On the complexity of the bondage and reinforcement problems. *Journal of Complexity*, **28** (2) (2012), 192-201.

数最多为 $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k}$, 它是 n 的多项式 $O(n^{k+1})$. 因此, 它是 P 问题. 同样地, 对于任意固定的 $p (\geq 2)$ 和 k , 图的 p 控制集问题仍然是 P 问题 (有关这方面的研究可参见 Downey 和 Fellows 的两篇文章^[233, 234]).

然而, 即使 $p (\geq 2)$ 固定且 $k = 1$, 确定 p 加强数问题仍然是 NP-hard 问题. 这个问题可以表述如下:

p 加强数问题 (p -reinforcement Problem):

实例: 任意图 G 和固定的正整数 $p (\geq 2)$.

问题: 是否有 $r_p(G) \leq 1$?

定理 8.1 对于固定的正整数 $p (\geq 2)$, p 加强数问题是 NP-hard 问题.

证明的基本思路是: 把 3 可满足问题 (3SAT) 归结为 p 加强数问题. 为此, 设 $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ 是 3SAT 的任意实例. 构造一个图 G 如下.

- 对每个变量 $u_i \in U$, 设置一个图 H_i , 其中 H_i 是从以顶点集为 $\{u_i, \bar{u}_i\} \cup (\cup_{j=1}^p \{v_{ij}, \bar{v}_{ij}\})$ 的完全图 K_{2p+2} 添加边集 $\cup_{j=1}^{p-1} \{u_i \bar{v}_{ij}, \bar{u}_i v_{ij}\}$ 而得到的图;
- 对每个句子 $C_j \in \mathcal{C}$, 设置一个顶点 c_j 并且连接 c_j 到 H_i 中每个顶点 u_i (或者 \bar{u}_i) 当且仅当文字 u_i (或者 \bar{u}_i) 出现在句子 C_j 中 ($i \in \{1, \dots, n\}$);
- 添加一个完全图 $T (\cong K_p)$ 并且连接它的所有顶点到每个 c_j .

然后证明: \mathcal{C} 是可满足的当且仅当 $r_p(G) = 1$.

这个研究成果发表在《You Lu, Fu-Tao Hu and Jun-Ming Xu, On the p -reinforcement and the complexity, Journal of Combinatorial Optimization, 29 (2) (2015), 389-405》一文中.

§8.2 某些特殊图的 p 加强数

我们确定了路 P_n 和圈 C_n 的 p 加强数. 当 $p = 1$, Kok 和 Mynhardt^[235] 确定了 $r(P_n) = r(C_n) = i$ 如果 $n = 3k + i \geq 4$, 其中 $i \in \{1, 2, 3\}$. 当 $p \geq 2$ 时, 我们确定了 $r_p(P_n)$ 和 $r_p(C_n)$ 的精确值.

定理 8.2 对于 $p \geq 2$, 如果 $\gamma_p(P_n) > p$ 那么

$$r_p(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{若 } p = 2 \text{ 且 } n \text{ 是奇数} \\ 1 & \text{若 } p = 2 \text{ 且 } n \text{ 是偶数} \\ p - 2 & \text{若 } p \geq 3; \end{cases}$$

如果 $\gamma_p(C_n) > p$ 那么

$$r_p(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{若 } p = 2 \text{ 且 } n \text{ 是奇数} \\ 4 & \text{若 } p = 2 \text{ 且 } n \text{ 是偶数} \\ p - 2 & \text{若 } p \geq 3. \end{cases}$$

²³³Downey, R. G. and Fellows, M. R., Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. SIAM J. Comput. 24 (1995), 873-921.

²³⁴Downey, R. G. and Fellows, M. R., Fixed-parameter tractability and completeness II: On completeness for $W[1]$. Theoretical Computer Science, 14 (1995), 109-131.

²³⁵Kok, J. and Mynhardt, C. M., Reinforcement in graphs. Congr. Numer. 79 (1990) 225-231.

对于完全 t 部分图 K_{n_1, \dots, n_t} , 令 $X = \{n_{i_1}, \dots, n_{i_r}\}$ 是 $\{n_1, \dots, n_t\}$ 子集, 定义

$$|X| = r \text{ 且 } f(X) = \sum_{j=1}^r n_{i_j},$$

$$\mathcal{X} = \{X : X \subseteq \{n_1, \dots, n_t\} \text{ 且 } f(X) \geq \gamma_p(G)\}.$$

对每个 $X \in \mathcal{X}$, 定义

$$f^*(X) = \max\{f(Y) : Y \subseteq X \text{ 且 } |Y| = |X| - 1, f(Y) < p\}.$$

定理 8.3 设 G 是完全 t 部分图 $G = K_{n_1, \dots, n_t}$, $t \geq 2$. 如果 $\gamma_p(G) > p$, 那么对任何 $p \geq 1$,

$$r_p(G) = \min\{(p - f^*(X))(f(X) - \gamma_p(G) + 1) : X \in \mathcal{X}\}.$$

对于一般的图, 我们得到如下结果:

定理 8.4 $r_p(G) \leq \Delta(G) + p$; 如果 $\delta(G) < p$, 那么 $r_p(G) \leq \delta(G) + p$; 如果 $\gamma_p(G) > p$ 且 $\Delta(G) < p$, 那么 $r_p(G) = p - \Delta(G)$.

推论 8.5 对任何树 T 和 $p \geq 2$, $r_p(T) \leq p + 1$.

这些研究成果包含在文章《You Lu, Fu-Tao Hu and Jun-Ming Xu, On the p -reinforcement and the complexity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 29 (2) (2015), 389-405.》和《You Lu and Jun-Ming Xu, Trees with maximum p -reinforcement number. *Discrete Applied Mathematics*, 175 (1) (2014), 43-54》中.

值得注意的是, 推论 ?? 仅对 $p \geq 2$ 成立. 对于 $p = 1$, Blair 等人^[236] 证明了: $r_1(T) \leq \frac{n}{2}$, 其中 n 是树 T 的阶. 当 $p \geq 3$ 时, 我们递归地构造出使得 $r_p(T) = p + 1$ 的所有树 T . 但我们的构造方法不适于 $p = 2$ 的情形. 陆由等^[237] 给出树 T 有 $r_2(T) = 3$ 一个充分必要条件.

§9 Caccetta-Häggkvist 猜想研究

1978 年, Caccetta 和 Häggkvist^[238] 提出著名猜想: 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq r$, 那么 G 的围长 $g(G) \leq \lceil n/r \rceil$. 这个猜想至今未解决. 本课题组讨论 Caccetta-Häggkvist 猜想并与此猜想有关的两个问题: 有向图的边反圈数和 Seymour 第二邻域猜想问题. 这方面的工作主要由梁浩完成.

§9.1 有向图的边反圈数

设 $G = (V, E)$ 是有向图. 如果它不含有向圈, 则称 G 为无圈 (acyclic) 有向图. 设 $F \subseteq E(G)$, 如果 $G - F$ 是无圈的, 则称 F 为 G 的反圈边集 (acyclic edge set). 有向图 G 的边反圈数 $\beta(G)$ 表示 G 中最小反圈边集中边数.

²³⁶Blair, J. R. S., Goddard, W., Hedetniemi, S.T., Horton, S., Jones, P. and Kubicki, G., On domination and reinforcement numbers in trees. *Discrete Math.*, 308 (2008), 1165-1175.

²³⁷Lu, Y., Song, W. and Yang, H.-L., Trees with 2-reinforcement number three. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39 (2) (2015), 1-18.

²³⁸Caccetta, L. and Häggkvist, R., On minimal digraphs with given girth. *Proc. 9th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing* (1978) 181-187.

这个概念对无向图 G 也是有效的, 而且 $\beta(G) = \varepsilon(G) - v(G) + \omega(G)$, 其中 $\varepsilon(G)$, $v(G)$ 和 $\omega(G)$ 分别表示 G 的阶, 边数和连通分支数. 但对有向图, Karp (1972) [239] 证明了确定反圈数问题是 NP 完备的.

用 $\varrho(G)$ 表示有向图 G 中不相邻的点对数目. Chudnovsky 等人 (2008) [240] 证明了: 如果 G 不含三角形, 那么 $\beta(G) \leq \varrho(G)$, 并提出如下猜想.

猜想 9.1 不含有向 3 圈的有向图 G 均有 $\beta(G) \leq \frac{1}{2} \varrho(G)$.

这个猜想至今尚未解决. Dunkum 等人 (2011) [241] 证明了 $\beta(G) \leq 0.88 \varrho(G)$; 沈建等人 (2009) [242] 修改它为 $\beta(G) \leq 0.8616 \varrho(G)$. 2008 年, Sullivan [243] 提出下面更一般的猜想.

猜想 9.2 如果有向图 G 的围长 $g(G) > m \geq 3$, 那么

$$\beta(G) \leq \frac{2}{(m+1)(m-2)} \varrho(G).$$

当 $m \in \{4, 5\}$ 时, 猜想 9.2 中上界分别为 $\frac{1}{5} \varrho(G)$ 和 $\frac{1}{9} \varrho(G)$. 本课题组得到如下结果.

定理 9.3 如果有向图 G 的围长 $g(G) > 4$, 那么 $\beta(G) \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \varrho(G) \approx 0.3819 \varrho(G)$.

定理 9.4 如果有向图 G 的围长 $g(G) > 5$, 那么 $\beta(G) \leq (2 - \sqrt{3}) \varrho(G) \approx 0.2679 \varrho(G)$.

这些结果包含在《Hao Liang and Jun-Ming Xu, On Sullivan's conjecture on cycles in 4-free and 5-free digraphs. Acta Mathematica Sinica, English Series, 29 (1) (2013), 53-64》一文中.

当 $m \in \{4, 5\}$ 时, Sullivan 证明了 $\beta(G) \leq \frac{1}{m-2} \varrho(G)$. 本课题组改进了这个结果.

定理 9.5 如果有向图 G 的围长 $g(G) > m \geq 4$, 那么 $\beta(G) \leq \frac{1}{m-2} \varrho(G)$.

这个结果包含在《Hao Liang and Jun-Ming Xu, Minimal feedback arc set of m -free digraphs. Information Processing Letters, 113 (8) (2013) 260-264》一文中.

§9.2 Caccetta-Häggkvist 猜想

猜想 9.1 与下面的 Caccetta - Häggkvist 猜想密切相关.

猜想 9.6 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq r$, 那么 G 的围长 $g(G) \leq \lceil n/r \rceil$.

当 $r = 1$ 时, 猜想 9.6 显然成立. 当 $r = 2$ 时, Caccetta 和 Häggkvist 证明猜想成立. 1987 年, Hamildoune [244], Hoáng 和 Reed [245] 分别证明了当 $r = 3$ 和 $r = 4, 5$ 时猜想成立. 2000 年, 沈建等

²³⁹Karp, R. M., Reducibility among combinatorial problems. In: Complexity of Computer Computations, (R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds.), New York, Plenum, 1972, pp. 85-103.

²⁴⁰Chudnovsky, M., Seymour, P. and Sullivan, B., Cycles in dense digraphs. *Combinatorica* 28 (2008), 1-18.

²⁴¹Dunkum, M., Hamburger, P. and Pór, A., Destroying cycles in digraphs. *Combinatorica*, 31 (2011), 55-66.

²⁴²Chen, K., Karson, S., Liu, D. and Shen, J., On the Chudnovsky-Seymour-Sullivan Conjecture on Cycles in Triangle-free Digraphs. ArXiv preprint arXiv:0909.2468, 2009 - arxiv.org.

²⁴³Sullivan, B., Extremal Problems in Digraphs. Ph.D. thesis, Princeton University, May 2008.

²⁴⁴Hamidoune, Y. O., A note on minimal directed graphs with given girth. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 43 (3) (1987), 343-348.

²⁴⁵Hoáng, C. and Reed, B., A note on short cycles in digraphs. *Discrete Math.*, 66 (1-2) (1987), 103-107.

人^[246]证明了当 $r < \sqrt{n/2}$ 时猜想成立. 对于点可迁图, Hamidoune (1981)^[247]证明了猜想成立. 对于一般的图和 r , 此猜想至今仍未被解决. 当 $r = \frac{n}{3}$ 时, 猜想 9.6 可以表述为:

猜想 9.7 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq \frac{n}{3}$, 那么 G 的围长 $g(G) \leq 3$.

为了证明这个猜想, 人们寻找尽可能小的常数 c 使得每个 n 阶有向图 G , 只要它的最小出度 $\delta^+(G) \geq cn$, G 必含有向 3 圈. Caccetta 和 Häggkvist 证明了 $c \leq 0.3819$; Bondy (1997)^[248]证明了 $c \leq 0.3797$; 沈建 (1998)^[249]修改它到 $c \leq 0.3542$; Hamburger 等人 (2007)^[250]修改到 0.35312. 2009 年, Hladký 等人^[251]进一步修改它到 0.3465. 这个结果表明: 任何 n 阶有向图 G , 如果它的最小出度 $\delta^+(G) \geq 0.3465n$, 那么 G 必含有向 3 圈. 本项目考虑 $r = \frac{n}{4}$, 得到: 如果有向图 G 的最小出度 $\delta^+(G) \geq 0.28866n$, 那么 G 的围长 $g(G) \leq 4$. 后来, 我们改进了这个结果如下.

定理 9.8 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq 0.28724n$, 那么 G 的围长 $g(G) \leq 4$.

这些结果包含在《梁浩, 徐俊明, 有向图最小圈长不大于4的一个充分条件. 吉林大学学报, 51 (2) (2013), 241-243》和《梁浩, 徐俊明, 关于 Caccetta-Haggkvist 猜想的注记. 数学学报, 56 (4) (2013), 479-486》中.

2012 年, 我们在论文^[252]中考虑 $r = \frac{1}{5}n$ 的情形, 得到如下结果.

定理 9.9 设 G 是 n 阶有向图. 如果 $\delta^+(G) \geq 0.24817n$, 那么 G 的围长 $g(G) \leq 5$.

§9.3 Seymour 第二邻域猜想

设 G 是无对称边的简单有向图, x 是 G 的顶点, $d^+(x)$ 和 $d^{++}(x)$ 分别表示 x 的外邻点数和距离为 2 的外邻点数. 1990 年, Seymour 提出第二邻域猜想 (Second Neighborhood Conjecture, 见^[253]).

猜想 9.10 对任何无对称边的简单有向图 G , 存在顶点 x 使得 $d^{++}(x) \geq d^+(x)$.

猜想 9.10 意味着 Caccetta-Häggkvist 猜想的特殊情形: $\min\{\delta^+, \delta^-\} \geq \frac{1}{3}n$, 因此引起人们的研究兴趣. 当 G 是竞赛图时, 作为猜想 9.10 的特殊情形是由 Dean (1995)^[254]提出来的.

²⁴⁶Shen, J., On the girth of digraphs. *Discrete Math.*, 211 (1-3) (2000), 167-181.

²⁴⁷Hamidoune, Y. O., Quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés. *J. Combin. Theory Ser. B*, 30 (1) (1981), 1-10.

²⁴⁸Bondy, J. A., Counting subgraphs: A new approach to the Caccetta-Häggkvist conjecture. *Discrete Math.* 165/166 (1997), 71-80.

²⁴⁹Shen, J., Directed triangles in digraphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 74 (1998), 405-407.

²⁵⁰Hamburger, P., Haxell, P. and Kostochka, A., On the directed triangles in digraphs. *Electronic J. Combin.* 14 (2007), Note 19.

²⁵¹Hladký, J., Král' D. and Norine, S., Counting flags in triangle-free digraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 34 (2009), 621-625.

²⁵²Liang, H. and Xu, J.-M., A note on directed 5-cycles in digraphs. *Applied Mathematics*, 3 (7) (2012), 805-808.

²⁵³Dean, N. and Latka, B. J., Squaring the tournament—an open problem. *Congressus Numerantium*, 109 (1995) 73-80.

²⁵⁴Dean, N. and Latka, B. J., Squaring the tournament – an open problem. *Proceedings of the Twenty-sixth South-eastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Boca Raton, FL, 1995). *Congr Numer* 109 (1995), 73-80.

猜想 9.10 中点 x 被称为 Seymour 点. Fisher (1996) [255] 利用概率方法证明了 Dean 猜想. Havet 和 Thomassé (2000) [256] 利用组合方法也证明了 Dean 猜想, 这种方法获得的 Seymour 点不是一个, 而是两个.

Kaneko 等人 (2001) [257] 证明了最小出度小于 7 的有向图有 Seymour 点. 2007 年, Fidler 和 Yuster [258] 证明最小度为 $|V(G)| - 2$ 的有向图 G , 竞赛图删去一个星或者删去一个子竞赛图有 Seymour 点. (注: Ghazal (2015) [259] 指出 Fidler 和 Yuster 的证明有误.) 2008 年, Hamidoune [260] 证明了点可迁有向图有 Seymour 点. 2013 年, Lladó [261] 证明高连通度的点可迁有向图有 Seymour 点. 2016 年, Cohn 等人 [262] 给出猜想 9.10 的概率表述并证明了在随机竞赛图甚至一般随机有向图中存在大量的 Seymour 点. 对于一般的有向图, 猜想 9.10 仍然没有解决.

试图攻克猜想 9.10 的另一个研究方向是: 对于有向图 G , 确定 μ 的最大值使得存在 $x \in V(G)$ 满足 $d^{++}(x) \geq \mu d^+(x)$. 2003 年, 陈冠涛等人 [263] 给出 $\mu = 0.657298 \dots$, 它是多项式 $2x^3 + x^2 - 1$ 的唯一实根. 文章末尾提到他们能修改这个值到 $0.67815 \dots$. 2010 年, 张陶冶等人 [264] 证明: 如果有向图 G 不含三角形, 那么存在 $x \in V(G)$ 使得 $d^{++}(x) \geq \mu d^+(x)$, 其中 $\lambda = 0.6751 \dots$ 是多项式 $x^3 + 3x^2 - x - 1$ 在区间 $(0, 1)$ 中的唯一实根. 我们获得如下结果.

定理 9.11 对任意给出的 $m \geq 3$, 若 G 是围长 $g(G) > m$ 的有向图, 则存在 $x \in V(G)$ 使得 $d^{++}(x) \geq \mu_m d^+(x)$, 其中 μ_m 是多项式

$$g_m(x) = 2x^3 - (m-3)x^2 + (2m-4)x - (m-1), \quad x \in (0, 1) \quad (9.9.13)$$

的唯一实根, μ_m 是关于 m 的增函数, 而且 $\mu_m \rightarrow 1$ (当 $m \rightarrow +\infty$ 时).

因为 G 是简单无对称边有向图, 围长 $g(G) > 2$. 当 $m = 2$ 时, 定义在 (9.9.13) 中的多项式正好是 $2x^3 + x^2 - 1$. 定理 9.11 能被看成是沈建等人结果的推广. 当 $m = 3$ 时, $\mu_3 = 0.6823 \dots$, 这修改了张陶冶等人的结果. 当 $m = 4$ 时, $\mu_4 = 0.7007 \dots$. 由定理 9.11, 立即获得下面的推论.

推论 9.12 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在整数 m 使得任何围长大于 m 的有向图 G 中存在 $x \in V(G)$ 有 $d^{++}(v) \geq (1 - \varepsilon) d^+(v)$.

这些结果发表在: Hao Liang and Jun-Ming Xu, On Seymour's second neighborhood conjecture of m -free digraphs. *Discrete Mathematics*, 340 (8) (2017), 1944-1949.

²⁵⁵Fisher, D. C. Squaring a tournament: a proof of Dean's conjecture. *J. Graph Theory* 23 (1) (1996), 43-48.

²⁵⁶Havet, F. and Thomassé, S., Median orders of tournaments: a tool for the second neighborhood problem and Sumner's conjecture. *J. Graph Theory*, 35 (4) (2000), 244-256.

²⁵⁷Kaneko, Y. and Locke, S. C., The minimum degree approach for Paul Seymour's distance 2 conjecture. *Congressus Numerantium* 148 (2001), 201-206.

²⁵⁸Fidler, D. and Yuster, R., Remarks on the second neighborhood problem. *J. Graph Theory*, 55 (3) (2007), 208-220.

²⁵⁹Ghazal, S., Erratum to: "Remarks on the second neighborhood problem". <http://arXiv:1506.03695v2>, 2015.

²⁶⁰Hamidoune, Y. O., On iterated image size for point-symmetric relations. *Combin. Probab. Comput.*, 17 (1) (2008), 61-66.

²⁶¹Lladó, A., On the second neighborhood conjecture of Seymour for regular digraphs with almost optimal connectivity. *European J. Combin.*, 34 (8) (2013), 1406-1410.

²⁶²Cohn, Z. Godbole, A. Harkness, E. W. and Zhang, Y., The number of Seymour vertices in random tournaments and digraphs. *Graphs Combin.*, 32 (5) (2016), 1805-1816.

²⁶³Chen, G., Shen, J. and Yuster, R., Second neighborhood via first neighborhood in digraphs. *Annals of Combinatorics*, 7 (2003), 15-20.

²⁶⁴Zhang, T. and Zhou, J., The second neighborhood of triangle-free digraphs. *Graph Theory Notes of New York*, 58 (2010), 48-50.

§10 图的 Pebbling 数

图的 Pebbling 数是由金芙蓉^[265]提出来的. 原始问题起源于一个数学游戏. 假设有 2^n 颗小石子 (pebbles), 它们被随意地放置在 n 维超立方体 Q_n 的顶点处. 游戏遵循下列规则:

规则 10.1 先从至少有两颗石子的顶点处移走两颗石子, 然后将其中一颗放在它的某邻点处.

如果 Q_n 的某个顶点有至少两颗石子, 必有一个顶点 x 处没有石子 (因为 Q_n 有 2^n 个顶点且只有 2^n 颗石子). 问题是: 从任何一个至少有两颗石子的顶点开始, 是否可以不断运用这个游戏规则使得 x 得到一颗石子. 金芙蓉证明了这是可以做到的. 这个游戏导致她提出图的 Pebbling 数概念.

设 G 是连通图, x 是 G 中顶点 (称为目标点). 图 G 的 pebbling 数 $f(G)$ 定义为最小整数 m 使得 m 个石子在 G 中**任何摆放**, 反复运用规则 10.1 都能使目标点 x 得到**一颗石子**.

显然, $f(G) \geq |V(G)|$. 金芙蓉的结果表明 $f(Q_n) = 2^n$. 对于完全图 K_n , 路 P_n 和圈 C_n , 已经确定: $f(K_n) = n$, $f(P_n) = 2^{n-1}$, $f(C_{2k}) = 2^k$, $f(C_{2k+1}) = 2\lfloor \frac{1}{3} 2^{k+1} \rfloor + 1$.

这个概念很容易推广到图 G 的 t -pebbling 数 $f_t(G)$, 它定义为最小整数 m 使得 m 个石子在 G 中的**任何摆放**, 反复运用规则 10.1 都能使**目标点**得到 t **颗石子**. 显然, $f_1(G) = f(G)$. 金芙蓉也证明了 $f_2(Q_n) = 2^n$.

图 G 的最优 t -pebbling 数 $f'_t(G)$ 定义为最小整数 m 使得 m 个石子在 G 中**存在某种摆放**, 反复运用规则 10.1 能使**任意顶点**得到 t 颗石子. $f'_t(G) = f'_1(G)$ 称为 G 的最优 pebbling 数. G 的最优 pebbling 数概念是由 Pachter 等人^[266]首先提出来的; 由 Herscovici 等人^[267]推广到最优 t -pebbling 数.

对于任意的连通图 G , Milans 和 Clark^[268]证明了确定 $f'_t(G)$ 的问题是 NP-hard 问题.

潘永亮和博士生夏正江研究了图的 pebbling 数, 取得一些研究成果.

§10.1 路和圈的最优 t -pebbling 数

关于路 P_n 和圈 C_n , 文献^[267, 269]已经确定了: $f'(P_n) = f'(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$; $f'_2(P_n) = n + 1$; $f'_{3p+r}(P_2) = 4p + 2r$ ($r < 2$); $f'_{3p+2}(P_2) = 4p + 3$. 当 $t \geq 3$ 和 $n \geq 2$, 我们完全确定路 P_n 的最优 t -pebbling 数.

定理 10.2 对任何整数 $p \geq 1$,

$$f'_t(P_n) = \begin{cases} p(n+2) & \text{若 } t = 3p; \\ p(n+2) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{若 } t = 3p + 1; \\ p(n+2) + (n+1) & \text{若 } t = 3p + 2. \end{cases}$$

对于圈 C_n , 文献^[267]中作者已确定了 $f'_t(C_3)$ 和 $f'_t(C_4)$. 我们确定了 $f'_t(C_5)$.

²⁶⁵ Chung, F. R. K., Pebbling in Hypercubes. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2(4)(1989), 467-472.

²⁶⁶ Pachter, L., Snevily, H. S. and Voxman, B., On Pebbling Graphs, Congr. Numer. 107 (1995), 65 - 80.

²⁶⁷ Herscovici, D. S., Hester, B. D. and Hurlbert, G. H., Optimal Pebbling in Products of Graphs. The Australasian Journal of Combinatorics, 50(2011), 3-24.

²⁶⁸ Milans, K. and Clark, B., The complexity of graph pebbling, SIAM J Discrete Math. 20(2006), 769-798.

²⁶⁹ Bunde, D.P., Chambers, E. W., Cranston, D., Milans, K. and West, D. B., Pebbling and optimal pebbling in graphs. Journal of Graph Theory, 57(3)(2008), 215-238.

定理 10.3 对任何 $n \geq 3$, $f'_2(C_n) = n$, $f'_3(C_n) = n + 2$, 且对任何整数 $t \geq 1$,

$$f'_t(C_5) = \begin{cases} 4 & \text{若 } t = 1; \\ 2t & \text{若 } 10|t; \\ 2t + 1 & \text{其它.} \end{cases}$$

这些成果被包含在《夏正江, 潘永亮, 徐俊明, Optimal t -pebbling on paths and cycles. 中国科技大学报, 45(3) (2015), 186-192》一文中.

§10.2 笛卡尔乘积图的 pebbling 数

关于两个图的笛卡尔乘积的 pebbling 数, Graham 提出一个猜想 (见脚注文献^[265]).

猜想 10.4 对任何两个连通图 G 和 H , $f(G \square H) \leq f(G)f(H)$.

许多学者试图解决这个猜想, 但都没有成功, 却证明了这个猜想对许多特殊的图是成立的.

图 G 的中间图 $M(G)$ 是指在图 G 的每条边上插入一个新顶点, 并用新边连接 G 的相邻两条边中新顶点而得到的图. 叶永升等人^[270] 确定了 $f(M(C_n))$ 并证明:

$$f(M(C_{2n+1}) \square M(C_{2m+1})) \leq f(M(C_{2n+1})) f(M(C_{2m+1})), (\max\{n, m\} \geq 5);$$

$$f(M(C_{2n}) \square M(C_{2m+1})) \leq f(M(C_{2n})) f(M(C_{2m+1})), (n \geq 6).$$

至于偶圈与偶圈的笛卡尔乘积, 我们证明了如下结果.

定理 10.5 若 $\min\{n, m\} \geq 6$, 且 $|n - m| \geq 2$, 则

$$f(M(C_{2n}) \square M(C_{2m})) \leq f(M(C_{2n})) f(M(C_{2m})).$$

设有 $2f(G) - r$ 个石子被摆放在图 G 中, 其中 r 个顶点被放有奇数颗石子. 若反复运用规则 10.1 能使目标点得到 2 颗石子, 则称 G 满足奇 2-pebbling 性质.

对于偶圈 C_{2n} 与一般图 G 的笛卡尔乘积, Herscovici^[271] 获得如下结果: 若 G 满足奇 2-pebbling 性质, 则 $f(C_{2n} \square G) \leq f(C_{2n})f(G)$. 至于奇圈与奇圈的笛卡尔乘积, 我们获得如下结果.

定理 10.6 若 G 满足奇 2-pebbling 性质, 则 $f(C_{2n+1} \square G) \leq f(C_{2n+1})f(G)$.

这个结果的证明由两部分完成: $f(C_{4k+1} \square G) \leq f(C_{4k+1})f(G)$ 和 $f(C_{4k+3} \square G) \leq f(C_{4k+3})f(G)$.

我们也考虑偶圈与它的的中间图的笛卡尔乘积, 获得如下结果.

定理 10.7 若 G 满足奇 2-pebbling 性质, 则 $f(M(C_{2n}) \square G) \leq f(M(C_{2n}))f(G)$.

这些成果被包含在《Zheng-Jiang Xia, Yong-Liang Pan, Jun Ming Xu, Pebbling on $C_{4k+3} \times G$ and $M(C_{2n}) \times G$. The Australasian Journal of Combinatorics, 65(2) (2016), 124-136》和《Zheng-Jiang Xia, Yong-Liang Pan, Jun-Ming Xu and Xi-Meng Cheng, Graham's pebbling conjecture on cartesian product of the middle graphs of even cycles. Ars Combinatoria, 132 (2017), 285-294.》两篇文章中.

²⁷⁰叶永升, 刘芳, 翟清明, 图的中间图 Pebbling 数和 Graham 猜想. 运筹学学报, 17 (3) (2013), 35 - 44.

²⁷¹Herscovici, D., Graham's conjecture on products of cycles. J. Graph Theory, 42 (2003), 141-154.

§11 附录: 发表的学术论文和著作

学术论文

1. 周书明, 王建, 徐喜荣, 徐俊明, Conditional fault diagnosis of bubble sort graphs under the PMC model. *Intelligence Computation and Evolutionary Computation, Advances in Intelligent Systems and Computing Volume 180*, 2013, pp 53-59.
2. 梁浩, 徐俊明, On Sullivan's conjecture on cycles in 4-free and 5-free digraphs. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 29 (1) (2013), 53-64.
3. 梁浩, 徐俊明, Minimal feedback arc set of m -free digraphs. *Information Processing Letters*, 113 (8) (2013), 260-264.
4. 梁浩, 徐俊明, 有向图最小圈长不大于4的一个充分条件, *吉林大学学报*, 51 (2) (2013), 241-243.
5. 李向军, 徐俊明, Generalized measures of fault tolerance in exchanged hypercubes. *Information Processing Letters*, 113 (14-16) (2013), 533-537.
6. A. Bahremandpour, 胡夫涛, S. M. Sheikholeslami, 徐俊明, On the Roman bondage number of a graph. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 5 (1) (2013), 1350001 (15 pages).
7. 杨超, 徐俊明, Connectivity of lexicographic product and direct product of graphs. *Ars Combinatoria*, 111 (2013), 3-12.
8. 胡夫涛, 徐俊明, On the diameter of the Kronecker product graph. *Mathematical Sciences Letters*, 2 (2) (2013), 121-127.
9. 马美杰, 宋亚星, 徐俊明, Fault-tolerant analysis of augmented cube. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 10 (1) (2013), 37-55.
10. 周书明, 徐俊明, Fault diagnosability of arrangement graphs. *Information Sciences*, 246 (10) (2013), 177-190.
11. 梁浩, 徐俊明, 关于Caccetta-Häggkvist猜想的注记. *数学学报*, 56 (4) (2013), 479-486.
12. 李向军, 徐俊明, Edge-fault tolerance of hypercube-like networks. *Information Processing Letters*, 113 (19-21) (2013), 760-763.
13. 李佳傲, 徐俊明, The wide-diameter of regular graphs. *中科大校报*, 43 (8) (2013), 603-606.
14. 李向军, 徐俊明, Signed edge-domestic number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 29 (6) (2013), 1881-1890.
15. 曹永昌, 黄佳, 徐俊明, The bondage number of graphs with crossing number less than four. *Ars Combinatoria*, 112 (2013), 493-502.
16. 胡夫涛, 徐俊明, Roman bondage numbers of some graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 58 (1) (2014), 106-118.
17. 洪振木, 徐俊明, Vulnerability of super edge-connected graphs. *Theoretical Computer Science*, 520 (2014), 75-86.

18. 胡夫涛, 徐俊明, Total and paired domination numbers of toroidal meshes. *Journal of Combinatorial Optimization*, 27 (2) (2014), 369-378.
19. 李向军, 徐俊明, Generalized measurements for fault tolerance of star networks. *Networks*, 63 (3) (2014), 225-230.
20. 陆由, 徐俊明, Trees with maximum p -reinforcement number. *Discrete Applied Mathematics*, 175 (1) (2014), 43-54.
21. 肖力, 曹瑾, 徐俊明, Transitivity of varietal hypercube networks. *Frontiers of Mathematics in China*, 9 (6) (2014), 1401-1410.
22. 陆由, 徐俊明, The p -domination number of complete multipartite graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*. 6 (4) (2014), 1450063 (9 pages).
23. 李向军, 徐俊明, Fault-tolerance of (n, k) -star networks. *Applied Mathematics and Computation*, 248 (2014), 525-530.
24. 曹瑾, 肖力, 徐俊明, Cycles and paths embedded in varietal hypercubes. *中国科学技术大学学报*, 44 (9) (2014), 732-737.
25. 谢欣, 徐俊明, On the (ℓ, w) -domination numbers of the circulant network. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 91 (2014), 3 - 18.
26. 洪振木, 徐俊明, Edge fault-tolerance of super restricted edge-connected Cartesian product graphs. *中国科学技术大学学报*, 44 (12) (2014), 967-974.
27. 陆由, 胡夫涛, 徐俊明, On the p -reinforcement and the complexity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 29 (2) (2015), 389-405.
28. 周剑光, 徐俊明, Hamilton paths and cycles in varietal hypercube networks with mixed faults. *International Journal of Combinatorics*, 2015, Art. ID 513073, 6 pp.
29. 夏正江, 潘永亮, 徐俊明, Optimal t -pebbling on paths and cycles. *中国科学技术大学学报*, 45(3) (2015), 186-192.
30. 胡夫涛, 徐俊明, The bondage number of $(n - 3)$ -regular graph G of order n . *Ars Combinatoria*, 120 (2015), 275 - 281.
31. 黄燕云, 徐俊明, Hamilton paths and cycles in fault-tolerant varietal hypercubes. *中国科学技术大学学报*, 46 (6) (2015), 436-442.
32. 谢欣, 徐俊明, On the (ℓ, w) -domination number of the cube network. *Ars Combinatoria*, 123 (2015), 185-194.
33. 郝荣霞, 田增娴, 徐俊明, Relationship between conditional diagnosability and 2-extra connectivity of symmetric graphs. *Theoretical Computer Science*, 627 (2016), 36-53.
34. 夏正江, 潘永亮, 徐俊明, Pebbling on $C_{4k+3} \times G$ and $M(C_{2n}) \times G$. *The Australasian Journal of Combinatorics*, 65 (2) (2016), 124-136.

35. 李向军, 董启启, 严政, 徐俊明, Embedded connectivity of recursive networks. *Theoretical Computer Science*, 653 (2016), 79-86.
36. 李向军, 刘斌, 马美杰, 徐俊明, Many-to-many disjoint paths in conditionally faulty hypercubes. *Discrete Applied Mathematics*, 217 (2) (2017), 229-242.
37. 洪振木, 徐俊明, On restricted edge-connectivity of replacement product graphs. *SCIENCE CHINA Mathematics*, 60 (4) (2017), 745-758.
38. 夏正江, 潘永亮, 徐俊明, 程希明, Graham's pebbling conjecture on cartesian product of the middle graphs of even cycles. *Ars Combinatoria*, 132 (2017), 285-294.
39. 梁浩, 徐俊明, On Seymour's Second Neighborhood Conjecture of m -free Digraphs. *Discrete Mathematics*, 340 (8) (2017), 1944-1949.
40. 谷梅梅, 郝荣霞, 徐俊明, 冯衍全, Equal relation between the extra connectivity and pessimistic diagnosability for some regular graphs. *Theoretical Computers Science*, 690 (2017), 59-72.
41. 马美杰, Douglas B. West, 徐俊明, The vulnerability of the diameter of enhanced hypercubes. *Theoretical Computer Science*, 694 (2017), 60-65.
42. 李向军, 关咏妮, 严政, 徐俊明, On fault tolerance of (n, k) -star networks. *Theoretical Computer Science*, 704 (2017), 82-86.
43. 洪振木, Volkmann Lutz, 徐俊明, Sufficient conditions for digraphs to be maximally connected and super-connected. *中科大学报*, 48 (8) (2018), 612-617.
44. 李向军, 刘敏, 严政, 徐俊明, On conditional fault tolerance of hierarchical cubic networks. *Theoretical Computer Science*, 761 (2019). 1-6.
45. 李向军, 曾学潜; 徐俊明, Generalized measures of fault tolerance for bubble sort networks. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 363, 15 December 2019, 124630.

学术综述

1. 徐俊明, 徐敏, The forwarding indices of graphs – a survey. *Opuscula Mathematica*, 33 (2) (2013), 345-372.
2. 徐俊明, On bondage numbers of graphs – a survey with some comments. *International Journal of Combinatorics*, vol. 2013, Article ID 595210, 34 pages, 2013. doi:10.1155/2013/595210.

学术著作

1. 徐俊明, 《Combinatorial Theory in Networks (网络中的组合理论)》(数学专著系列(英文版)26). 北京: 科学出版社, 2013年1月.
2. 徐俊明, 《A First Course in Graph Theory (图论基础教程)》(运筹与管理科学丛书24). 北京: 科学出版社, 2015年3月.
3. 徐俊明, 《图论及其应用》(第4版). 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019年3月.