

怎样选择课题进行科学研究

徐俊明

摘要

初次从事研究工作的人，首先遇到的问题是怎样选择课题？怎样搜集和整理资料？怎样阅读文献？怎样进行科学研究？本文以作者的亲身体会，介绍从事研究工作的全过程。对初次步入科研的人有一定的参考作用。

§1 怎样选择课题

一、选题的意义

课题是从事科学研究所要解决的问题和主攻方向。选择并确定研究的课题，是进行科学研究的第一步，也是非常关键的一步。选题决定着研究的价值，也关系到研究的成败。对于研究生做学位论文来讲，由于时间的限制，要求论文只许成功，不许失败。因此，选题显得更为重要。有人说，选对了课题，论文就等于完成了一半。这种说法很有道理，研究经验的人都有这个体会。所谓“选对了课题”，包括两层含义：一是指选题要符合学科发展，二是指选题要适应研究状况。前者可以保证选题具有实际意义。而选题有意义，研究成果的才有价值；后者可以保证研究者有能力、有条件对问题顺利开展研究，并取得成功。

从最直接的意思上说，选题则是一项具体的科学研究活动开始的标志，它为整个活动确立了明确的目标。科学研究是一项目的性极强的活动，漫无目的的研究是不会有结果的。从提出问题到解决问题，是一个合乎逻辑的过程，有了问题，才谈得上问题的解决，对问题认识得越清楚，对问题的解决也就越容易。

无论从哪个角度来说，选题的意义都是不可低估的。做研究，写学位论文，必须重视选题，要“选对题”。

二、课题的类型

从总体上说，学术研究有两大类，一类是开创性研究，一类是发展性研究。

1. 开创性研究

所谓开创性研究有两类。一类是为了完善学科理论，提出的新思想、新方法和新理论奠定了本学科的基础，甚至导致一个新学科的诞生。但做出这种研究的人物极少，因为做出这类研究的人物往往都成为该学科的先驱人物，如牛顿和莱布尼兹创立了微积分，爱恩斯坦创立了相对论，Euler创立了图论。又如图论工作者所熟知的 Menger, Kuratowski, Ramsey, Whitney, Dirac, König, Tutte, Erdős 等，前三位都不是搞图论的，但他们所创立的 Menger 定理，Kuratowski 定理，Ramsey 定理奠定了图论基础。另一类就是在本学科内对别人没有研究过的问题进行的研究，提出的新思想方法和理论丰富了研究内容，奠定本学科基础，推动了本学科的发展。如图论工作者所熟知众多大家，大多属于这一类。

实际上,大多数所谓的开创性研究是指后一类。金芳蓉和许德标等等提出许多有网络背景的图论新概念和新问题,建立起一般基本理论框架,就再很少去写同一问题的第二篇文章了。剩下的工作留给别人,这些问题一般都比较难,够许多人做很长时间也解决不了。

开创性研究的特点是,一般没有太多的资料可以利用,也没有现成的方法可作借鉴,难度大,困难多,要求研究者具有深厚的知识积累、丰富的研究经验、较高的研究水平和统揽全局的大家风范。图论界有很多这样的人物,如 Erdős 等。

2. 发展性研究

所谓发展性研究,就是在已有研究成果的基础上,对别人曾研究过的问题作进一步的拓展研究和跟踪研究。大多数人的研究都属于这一类。发展性研究的形式有很多种,常见有下面几种。

(1)跟踪研究。在已有结果基础上,进行更加深入的研究,以使已有的研究成果得到丰富和发展,使已有的理论得到深化、补充和进一步完善。我们现在进行的研究大多数属于跟踪研究。比如,宽直径、限制连通度、路由转发指数、泛圈性、距离控制数等。都是在已有的研究基础上,使结果进一步扩充,使理论进一步完善。各种猜想的研究和解决也都属于跟踪研究。跟踪研究一般只限制在某个专题的局部范围内,要求研究者对这个专题的研究进展和研究方法有比较深入的了解,而且有一个很具体预期目标的预测。

(2)拓展研究。推广已有概念,或者提出新概念,寻找本学科与其它学科之间的联系,提出新的研究方法,使其理论具有更广泛意义下的普遍性、指导性和应用性,丰富了本学科的研究内容和范围,使本学科的基础理论和方法更加完善。提出宽直径、限制连通度、路由转发指数、距离控制数等概念的第一人的研究属于拓展研究。现在,图论中的许多经典概念都得到推广,比如,除直径、连通度、控制数、独立数外,还有染色,匹配等,图的概念也被推广到超图。这要求研究者有较强敏锐的洞察力。

三、选题的原则

为做到选题得当,课题的取舍必须有一个标准和根据。选题的原则,就是衡量课题、决定取舍的标准和根据。课题有意义,结论有新意,是评价科研成果的两个决定性因素。选择课题,主要就应当考虑这两个方面的因素。

1. 课题的学术性

课题的学术性是,即学术意义,是使研究有价值的一个前提。学术性是科学研究之本,选题时必须充分考虑问题的学术意义,要把有研究价值的问题作为自己的研究课题。怎样才能选取具有学术意义的课题呢?一是要了解本学科、本专业的研究动态,在学术研究的“前沿阵地”或者“热点地带”选题。科学发展的过程,是一个知识长期积累的过程。在已有的研究成果的基础上,选择前沿性的或者热点问题加以研究,容易达到新的高度,会为学科的发展作出贡献;二是要了解本学科、本专业的研究历史,着力解决比较重要的基本理论问题。有些问题的研究,从表面看来现实意义不大,但从整个学科、专业发展的角度来看,却是至关重要的,因为它会对其他问题的解决,以至会对学科体系的严整化产生影响。选择这样的课题进行研究,有着重要的学术意义。

要找到一个有意义的课题,首先就必须做好课题的调查工作。调查的内容主要包括:

(1) 课题研究的历史

通过调查,着重了解前人是否对此问题作过研究,作过哪些研究,研究的程度如何,已经取得了哪些成果,还存在着哪些问题,困难在哪里。只有完全了解清楚这些问题,才能确定自己是否可对这个问题进行研究。学术研究是一项创造性行动,探索未知是学术研究的任务,而探索未知的前提是了解已知,只有了解了已知,才知道哪些问题仍属未知状态,才能掌握还有哪些问题未被解决。对于选

择研究课题之前的调查研究工作来说，了解人家做了什么并不是重要的，最重要的是了解人家不曾做什么。

在同学们交给我的文稿中，我们几次发现，有的同学找到了一个自己非常感兴趣，同时似乎也很有意义的问题，并为此做了大量研究工作，写出了文稿。但实际上这个问题早已得到彻底解决。虽然自己是在完全不知情的情况下作出来的，但学术研究最忌重复他人的工作。因为我们从事学术研究的一个很重要的目的是将研究成果用论文的形式发表，一般的学术杂志是不发表重复工作。如果在确定课题之前能对课题研究的历史非常熟悉，那么就可以避免重复他人工作的情况。

(2) 课题研究的现状

通过调查，着重了解目前是否有人对自己所要研究的问题进行研究，研究的进度、研究的角度及研究的方法如何，以便找到研究的突破口。如果说调查研究的历史是一种纵向的了解，那么调查研究的现状则是一种横向的比较。通过这种比较，可以做到知己知彼，可以了解自己的研究与他人有无不同或者有何不同，自己的研究是否会有超越他人的地方。

(3) 课题研究的发展趋向

了解课题的发展趋势，前景如何，对研究前景作出预测。有些课题的研究具有终止性，没有进一步发展的空间。问题解决了，研究也就终止了，无后继工作可做。作为较长远一点的研究课题，特别是作为博士学位论文的研究课题，应该有较大的研究自由空间和发展前景。一方面，该课题可以作为你今后较长一段时间的研究课题。第二方面，博士学位论文要求明确指出：“博士学位论文应能表明作者确已掌握有关学科坚实宽广的基础理论和系统深入的专门知识，具有独立从事科学研究工作的能力，并在科学或专门技术上做出创造性的成果。论文应是系统而完整的科研成果的表述与总结。”

“论文正文一般不少于5万字。”这里的“系统而完整”和“不少于5万字”显然是要求论文所作的研究课题有一定的深度、难度和发展空间的，不是若干内容毫无相关的文章拼凑。

(4) 相关研究的状况

有时，解决一个问题，不仅需要利用某一方面的知识、某一领域的成果。综合运用各种知识，合理利用不同领域的研究成果，往往有利于创造性地解决问题。为提高研究水平，可以有意识地了解一下相关领域的研究状况，看看哪些成果可供借鉴，特别是哪些研究方法可以引入和使用。

学术研究的方法是相通的，其他专业领域的研究方法的借鉴和使用，很可能使学术研究产生突破，很可能使自己的研究呈现出一种全新的面貌。譬如，在图论研究中，常常用到数论，代数，运筹学和概率论中结果和方法。

2. 课题的适度性

课题的学术性对开展研究是必要的，但作者的能力、兴趣、毅力和某些外在条件，在程度上是决定最终能否取得有学术价值得成果，完成课题研究的预定目标的重要因素了。因此，在选题时，对自己的能力要有一个正确的估计，同时还要充分考虑自己的兴趣、毅力和某些外在条件了。

(1) 根据自己的能力选择课题

科学研究是一项高度个性化的精神劳动，研究者的能力差异会带来研究质量的差异。选择有能力完成的课题，是保证课题研究取得成功的首要前提。人们常说，尺有所短，寸有所长，每个人都有自己的长处和不足。在科学研究这种带有明显的个性特征的复杂的精神劳动中，更是如此。就一般情况而言，课题对路子，合口味，同自己的能力特点相适应，就能得以应手、高效率地完成研究任务。进行同一项课题研究，面对同样的资料，有的人可能毫不理会；有的人只是把它诸存起来，补充已有的知识结构；有的人则可能受到触发，产生联想，迅速调动头脑是各种知识要素，形成新的排列组合，作出新的创造。显然，后一种人的能力特点更适合于这个课题的研究。在选择课题时，充分考虑自己的能力特点，能使创造才能得到最大限度的发挥。

科学研究是知识性劳动，知识结构是构成科学研究能力系统的基础，知识结构是否优化，各种知识的“构成比”是否合理，是选题时必须重视的因素之一。另外，智能结构是构成科学研究能力系统的另一个要件。科学研究离不开研究者的智能活动，研究者的智能活动的差异是使科学研究带有明显的个性特征的原因之一，选题必须对此有所考虑。

慎选猜想之类的作为自己的研究课题，特别是一些多年都没有解决的猜想。做学位论文的研究生，由于时间的限制，如果没有足够的先期研究准备，又不知猜想的底细，我建议不要盲目地选这类问题作为论文选题。有些初次介入科研的年轻人，一举成名心切，往往对一些貌似简单的猜想跃跃欲试，但对其困难程度却掌握不清。最为显著的例子是“四色猜想”。Haray [7] 曾对四色猜想有这样一段评论：“四色猜想真可以改名叫‘四色病’了，因为它真像个传染病一样，很容易传染。有时候是良性的，有时候却是恶性的或者慢性的。还没有发明一种预防针可对付这种病，但一个人的体格如果足够强壮，那么稍微一感染就可以有终身免疫力。它会反复发作，虽然还没有死的记录，但已经知道它会使人痛苦非凡。这种病至少已经观察到一次它从父亲转移到了儿子，所以它也许会遗传的。”Haray 已经把四色猜想的困难性讲到这个地步，还有些甘愿受感染。这种病已经传染到我国，被感染的大有人在。这些人绝大多数都不是专业从事图论研究的人。我每年都收到几份这样的文稿，要求“指教”，还有的想报考我的研究生，我一律拒绝，避免感染。

(2) 要选择有兴趣完成的课题

选择有兴趣完成的课题，是保证课题研究取得成功的必要条件。兴趣是人对事物的选择性态度，是一个人积极探究某种事物的认识倾向。在科学研究中，它往往表现为研究者对某一个课题始终如一、坚持不懈、契而不舍的探求精神。科学研究是一项异常艰苦的劳动，研究者对自己所研究的问题感兴趣，就会不计个人得失，执着地研究下去，直到取得成功。在此意义上可以说，兴趣是完成科学研究的一种巨大的推动力。同时，兴趣还可以调动研究者心理活动的积极性，使研究者的思维处于异常活跃的状态，达到一个较高的水平。另外，从兴趣产生的原因来看，按照兴趣的指向选题，有时也是十分简便的选题方法。兴趣往往是研究者对课题的客观意义和个人的研究能力深刻认识的结果，一位有社会责任感和学术洞察力的研究者，是不会对毫无实际意义或自己根本没有能力完成的课题发生兴趣的。

(3) 要选择有条件完成的课题

这里所说的条件是指完成一项科学研究所必需，同时又不以研究者的意志为转移的外在条件。制约科学研究的条件很多，其中，资料条件、时间条件及时间条件是重要因而最值得重视的条件。

总之，选择客观有意义的课题去研究的选题原则，决定了研究的客观必要性，选择主观上有见解的课题去研究的选题原则，决定了研究的可行性。只有同时符合这两条原则的课题，才是可选的课题。

四、调查研究

选题离不开调查研究。实际上，选题的过程就是调查研究的过程。简单地说，进行课题调查的途径主要有两条：一是查阅文献资料。科研成果保存与传播的形式多种多样，而文献是保存与传播社会科学研究成果的主要载体，通过文献资料的查阅，最容易全面了解课题研究的状况；二是访问专家学者。对于学生来说，了解课题研究情况，可以多同指导教师沟通，多听指导教师的意见。一名称职的论文指导教师应对学生所涉及的专业领域比较熟悉，应对已有的研究状况有较全面的把握，而且应有一定的研究经验，能就学生的选题提出意见和建议。

§2 怎样搜集资料

研究课题决定之后，就要着手搜集资料。搜集资料的目的是对研究课题的历史背景，进展和发展

趋势进行全面的了解。现在的网络资源非常丰富，很多资料通过网络就可以查到的。

一、资料搜集主要渠道：

1. 通过搜索著名的数学文摘

如美国数学会的“Mathematical Review（数学评论）”和欧洲数学会的“Zentralblatt MATH（数学文摘）”。数学评论查起来比较方便，它的网址是：

<http://www.ams.org/mathscinet>

嵌入要搜索的主题词就可以了。它能提供作者，文章标题，出版杂志和摘要，但不能提供全文。在搜索资料的过程中，这些信息都是非常有用的。如果需要浏览或者打印某一篇文章全文，可以到校图书馆网页 → 数据库导航 → 全文电子期刊检索 → 点击所要找杂志的第一个字母（按字母顺序排列）就可以了（可能需要出校权）。

2. 通过一些著名的出版社的网页来搜索

国际上著名的出版社或者出版集团都出版许多专业著名的杂志，在他们的网页上都可以浏览他们自己出版的杂志。校图书馆都已经买下这些网页的浏览权，绝大部分能搜索到的文章都能全文浏览和打印。如：

(a) ScienceDirect（Elsevier 出版社）：“the world’s largest electronic collection of science, technology and medicine full text and bibliographic information.” 网址是：

<http://www.sciencedirect.com/science/journals>

(b) SpringerLine（Springer 和 Kluwer Academic Publishers 出版社）：“As of January 2005 Springer-Link offers more than 1,250 journals and over 2,500 books from our online book series. All former Kluwer Academic journals are available on SpringerLink.”：网址（清华大学）是：

<http://springer.lib.tsinghua.edu.cn/>

(c) Wiley InterScience（John Wiley and Sons（美国）出版）：“It features over 1,000 journals, major reference works, online books, Current Protocols laboratory manuals, and databases as well as a suite of professional and management resources. The site was launched in 1997 and currently caters to over 12 million users in 87 countries.” 网址是：

<http://www3.interscience.wiley.com/aboutus/>

3. 通过一些著名学术团体或者组织的网页来搜索

考虑到我们专业与计算机有密切联系，可以在下列两个网页查到我们需要的信息。

(a) 美国的 IEEE（Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.）的“IEEE Xplore”：“It provides full-text access to IEEE transactions, journals, magazines and conference proceedings published since 1988 plus select content back to 1950, and all current IEEE Standards.” 它的网址是：

<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/periodicals.jsp>

校图书馆都已经买下“IEEE Xplore”中绝大部分杂志和会议录的浏览权，能搜索到的文章都能免费全文浏览和打印。

(b) 美国的 SIAM（Society for Industrial and Applied Mathematics）的“SIAM Journals Online”：“SIAM has a comprehensive publishing program in applied and computational mathematics. In addition to SIAM News, SIAM Review, and Theory of Probability and Its Applications, SIAM publishes eleven peer-reviewed research journals.” 它的网址是：

<http://www.siam.org/journals/journals.htm>

SIAM数据库中提供全部13种期刊的访问,其中11种期刊提供全文,全文回溯到1997年,文摘最早回溯到1994年。校图书馆已买下试浏览权(2005-03-30到2005-05-31),能搜索到的文章都能免费全文浏览和打印。

4. 利用现有的搜索引擎进行搜索

如:

“Google”: <http://www.google.com/> 或者

“Google Scholar”: <http://scholar.google.com/>

这个搜索词条很多,也不集中,很难判断。我也只是偶尔用它们来搜索一些资料,不太用它们。

5. 顺藤摸瓜

找一篇与所选择主题有关的最近文章,认真阅读“Introduction”部分,再顺着该文章提供的参考文献,利用上面提供的搜索途径进行查找。也可以搜索某些在此领域作出重要贡献作者的所有文章。

6. 查阅文献

利用图书馆和资料室馆藏的杂志,查阅与选题有关的杂志。这就需要对本专业和相关的杂志有个了解。网上提供的文章全文资料大部分是1995年以后的。对于1995年的资料只有通过馆藏杂志来得到。

7. 函索

如果网上或者馆藏杂志都找不到,可以通过函索。有三个途径:

(a) 校图书馆提供有偿服务,帮你到别的图书馆查找复印,费用较贵。

(b) 托亲朋好友到别的图书馆查找复印。

(c) 向作者本人函索。本人已经函索过多篇文章,很多作者是非常友好的,他会很高兴地提供给你。当然,等你收到材料,发个感谢信是必要的,也是应该的。如果知道作者的Email地址,就直接发个Email就可以了。索函样本:

Dear Sir,

I am very interested in your article entitled I would greatly appreciate if you can send me a (pre)reprint or a pdf-file of your article and any other papers of similar nature.

Than you every much.

Yours sincerely,

Your Name

Your detail address (考虑到作者会邮件给你)

8. 出席会议,参加报告会,同行交流

争取一些可能的机会参加一些专业会议、学术报告会和学术研讨会,与同行多多交流,也是获得信息的一个主要途径。老朋友在一起研讨学术问题,交流研究进展,同时也结识一些新朋友。与同行交流,在介绍自己成果时,态度要谦虚;在请教同行时,态度要诚恳。切勿狂妄自大,目中无人。

9. 审稿

从稿件中可以获得一些第一手的最新研究信息。

二、资料的搜集和积累

利用上面介绍的方法怎么来对资料进行收集和积累呢。现在有电脑了，这些资料处理起来都比较方便（利用公用电脑的同学，要准备一个容量稍大一些的优盘）。我的体会是下面几点。

1. 建立专业的文档（用 Latex）。

在搜索的过程中摘录下所有搜索到的信息，包括作者，文章标题，杂志，卷（期）（年份），起止页，摘要（必要时，记下作者的通信地址，特别是 Email）。这些项目一个不能少。这些都很容易做到。只要是在网上搜索到的，无论是《数学评论》，还是杂志，直接拷下就可以了。按作者的姓氏排序，随时发现新资料，随时补充。最后也应该形成一个参考文献。将来写文章，你会反覆用到这些参考文献的。

2. 另建文档储存一些重要文章和资料

对于一些重要文章，我们必须查找原文，将它拷贝下来，不一定都要打印出来，除非你要认真读它。摘录下该文的重要结论，如定理，放在相应文章的摘要下面。

3. 再建一个文档或者笔记本

有些材料，比如图形，如果不便复印，可以通过打开 PDF 文件，将它裁剪复制下来，贴到画图板上，存在文档里，以备后用。也应该准备一个笔记本，对一时难以处理资料，先记录下来，以后处理或者参考。

4. 泛读文献

泛读一些已经搜集到的主要文献，着重是“Introduction”和文中的主要结论，并作些摘录。阅读文献中的 Introduction 一节是重要的，它可以帮助你了解问题的背景和进展情况。

5. 其它

不必打印或者复印每篇文献，除非你打算精读这篇文章。

三、资料的整理—写出文献综述

当资料的收集和积累到一定的时候，就需要对资料进行整理。资料整理的最有效方法是用自己的想法写出文献综述（假定此专题还没有近期的综述文章）。写综述之前，至少要阅读所有搜索到的文献的摘要，大部分文献的“Introduction”和文中的主要结论。这些材料是综述的原始素材和主要依据。综述全文条理要清晰，语言要简洁，概念、术语和记号要统一。写文献综述，注意以下几点。

1. 问题背景和目研究意义

问题提出的背景和目的，它决定研究的意义。无论是从事理论研究，还是应用研究，这一点都是重要的，因为它可以看出该选题的研究意义。这就是通常人们所问的：“此项研究有什么意义？”写好这部分，这就需要读到并理解最原始文献。问题的提出也可能是从理论和应用两方面提出来的。常常出现这种情况，特别是应用基础研究，当实际问题抽象成数学问题后，原始的应用背景已经无踪无影了。对于应用背景较强的选题，知道一点应用背景还是必要的。

2. 弄清概念和研究目标

要清楚地叙述问题是怎么形成数学（图论）概念的，它要解决的是什么问题，最终达到什么目标。概念和目标叙述要准确，尽可能用数学（图论）语言来叙述。包括原始概念，推广的概念。全文术语和记号要统一，并做到尽可能规范。

3. 研究进展

这是综述的主体，在理解概念的基本上，对文献中报道的困难程度、基本结果、进展情况，存在问题进行综合论述，也应该包括自己的见解。根据内容和研究的范围，这部分可能要分几个小节来写。写好这一部分，需要阅读一些重要文献。在写之前，可以找一篇其它专题的综述文章借鉴一下。

4. 完整规范的参考文献

比较完整的，格式规范的参考文献。

5. 调整、修改和补充

不断对综述内容进行调整、修改和补充。

四、资料的分析研究

通过文献综述，对此专题的研究进展有个大概的了解。接下来就是仔细分析研究可供进一步研究的方向和具体研究内容。预测结果，可能出现的困难和采取的研究措施。我们可以从以下几个方面考虑。

1. 从整体看问题的难度

图论里许多的研究目标归结为一个图论参数的确定。要看问题的难度就是看这个问题是不是一个 NP-hard 问题。图论有许多这样的问题，问题一提出就被证明是 NP-hard 的。了解这一点是有好处的，避免一些不必要的努力。

2. 从纵向看问题的深度

分析已知的主要结论，找出核心结论是什么。它们将问题解决到什么程度，与目标相差多远，用到什么方法和结论。分析已知结论之间的相互联系，寻找解决问题的主要困难在什么地方。

3. 从横向看问题的广度

分析此问题与其它图论概念之间的联系，问题是否可以转换成其它等价问题。

4. 从深度上提出自己的见解

从深度上提出自己的见解，进一步研究的方向和具体研究内容，预测结果和可能遇到的困难。

5. 从方法上是否可以借鉴

了解和分析文献的研究方法，该方法是否可以改进，是否借鉴该方法来解决其它问题。

§3 怎样阅读文献

在资料的研究分析之后，开始进行研究之前，读一些文献是必要的。按照“摘要 → 引言 → 主要结果”这个线索将所有得到的文献大略浏览一下。然后，将所有文献进行认真筛选，筛去一些没有什么价值的文献。将剩下的文献分成两类：一类泛读，另一类则必须精读。

精读一些经典文献是必要的。这样的文献往往也不会太多，起关键作用的文章也就那么几篇。精读文献的主要重点在主要结论的证明方法上。如果是新方法，不但要认真读懂，更要掌握。大凡得到一个重要结论，都有一套独特的方法。每个研究专题都是这样，无不例外。例如，在点可迁图连通度研究中，我很欣赏 Watkins [17] 和 Mader [15] 独立提出的原子方法。这种方法获得原子分解等重要定理，而且至今仍是我们研究限制图的限制连通度的重要方法。

阅读文献的目的无非是了解问题的背景，结论和证明方法。重点是方法，“为我所用”。我的体会是：

1. 阅读摘要

一般文章只看摘要。觉得有兴趣才继续看一下引言，了解一下问题背景和研究进展和证明的大致方法。

2. 了解问题背景

读原始文献了解问题提出的背景,回答“为什么要进行此类研究”之类的问题,避免研究的盲目性。应用基础性研究特别要注意这一点。

3. 粗读 不必细读常规方法的证明。比如归纳证明,只需了解其归纳过程这关键一步是怎么过去的;如果是构造(包括计算)证明,只需大致了解其构造方法,不必去读验证构造(计算)过程,除非你对结论产生怀疑,或者对其中某种构造产生兴趣想改进其中的结果。

4. 精读

精读某些原始文献,了解和掌握具有独特的研究方法。思考为什么会想到这种方法,从中可能会得到启发。精读文献也不必从头到尾的顺序。可以先读证明,了解其证明思路。如果必要,再读引理或者其它部分。

§4 怎样开展研究

在怎么选择课题一节,我已经说过,依我的理解,研究基本上可以分为两种类型的研究,一是开创性研究,二是发展性研究或者叫跟踪性研究。我主要从事的是跟踪性研究,谈谈我对跟踪性研究的体会。

一、知己知彼,了解一些基本的研究套路

所谓“知己知彼”就是了解问题的困难性和解决的可能性。分析问题的性质,难易程度,掌握基本的研究套路。然后根据自身的能力和经历,预测一下问题解决是否在力所能及的范围内。我认为从以下几个方面考虑。

1. NP-hard 问题 有些图论参数的确定,已经知道是NP-hard问题,有人可能认为没有什么好做的了。其实却恰恰相反,有许多工作可做,大有用武之地。基本的研究套路是这样:

- (a) 寻找性能比尽可能小的多项式近似算法。
- (b) 寻找尽可能紧的上下界,或者添加限制条件寻求子问题的解。
- (c) 确定特殊的图类的参数值。

(b)和(c)也适合那些非NP-hard问题。比如,限制连通度的研究。我们目前从事的研究大部分是属于这两类。

对于(b),如果已知某些界,我们试图改进这些界,或者建立新的更紧的上下界。也可以通过添加若干图论参数寻找更紧的界,甚至确定一些具体的参数值。这里是大有作为的研究领域。

比如,Chung and Garey [2]提出的直径为 d 的路添加 t 条边的最小直径 $P(t, d)$ 问题。已知的上下界都不是最好的,而且是非常的粗糙。我们可以通过努力得到更好更紧的上下界。邓志国 [3]等做了这方面的工作,改进了上下界。Alaa和吴叶舟也做了这方面的研究工作。

又比如,图的路由边转发指数 $\pi(G)$,原始定义中的变量是图的顶点数 n 。Heydemann等人 [9]通过添加图的最大度 Δ 作为参数,定义了一种边转发指数 $\pi_{\Delta, n}$ 。这样一来,对于某些 Δ 的值,比如, $\Delta = n - 2p - 1$, $\pi_{n-2p-1, n}$ 的值对许多 p 是能确定出来的。徐敏 [32]的博士论文中部分内容就是做这个内容的。也可以条件连通度条件来研究转发指数问题。

对于(c),特殊的图类是指在理论和应用中有一定的知名度的图类,所要求的参数有一定的难度,否则就没有什么意义。如平面图,点可迁图,线图,笛卡儿乘积图,de Bruijn和Kautz图等。网络里还有超立方体及其各种各样的变型等,因为它们有实际应用背景。徐敏 [32]的博士论文中部分内容就是确定特殊图类的转发指数。吕敏确定了de Bruijn和Kautz图等的限制连通度和马美杰对泛圈问题的确定都属于这方面的研究。

有些图论参数对具体图类的确定也很困难,比如图论中独立数,控制数,厚度,交叉数,色数,反馈数等等。这是为什么?原因是我们目前还没有找到一个合适的方法来确定这些参数。这些都给图论工作者留下最困难的研究课题。

2. 类比研究 类比研究是最常用的方法之一,而且在很多情况下这种研究是很自然的。

(a) 点概念与边概念之间的类比。图论中很多概念,起初是对点提出来的,后来对边也提出类似的概念,也有起初对边提出来的,后来对点也提出类似的概念。如染色概念,连通度概念,独立集概念,转发指数概念,与容错有关的概念。某些概念,点边情形困难性相等,如染色问题,转发指数问题。在大多情形下,边的情形比点的研究得彻底。如,匹配问题比独立集问题,Euler问题比Hamilton问题,边限制连通度比点限制连通度。

图论中许多点边概念往往可以用线图来建立起它们之间的关系。例如,我们可以建立图的边染色与线图的点染色之间的关系,也可以建立图的匹配与线图独立集之间的关系。但这种关系的建立没有带来任何令人满意的结果。但建立图的边连通度与线图的点连通度能得到令人满意的结果来,原因是由于图中 k 条边不交路对于线图图中 k 内点不交的路。基于这样一个事实,吕敏通过建立平衡有向图的限制边连通度与线图的点限制连通度之间的关系,确定de Bruijn和Kautz有向图的点限制连通度。

有些点边概念,我们还没有通过线图建立它们之间的关系。比如,点转发指数与边转发指数。注意,有些图论概念,对边有意义,但对点却意义不大。如“边添加”和“边减少”问题,但点添加和点减少就没有什么研究价值。

(b) 同一概念在不同研究对象之间的类比。这是初次介入科研的人,尤其是学生常常采用的研究方法。比如,文献中对宽直径、转发指数、限制连通度,泛圈性等概念的研究就是这样的。某些概念的研究开始总是致力某些特殊的图类(比如超立方体),这类图解决了,试图看看另一类图(超立方体的各种变型)是否可以解决。这类研究在组合网络理论中尤为突出,这几年,我的学生大多在做这方面的类比研究。

(c) 概念推广了,原概念中的已知结果是否可以类似推广到新概念中。例如,已有的关于连通度的结果是否可以推广到限制连通度;已有的控制数结果是否可以推广到距离控制数等等。田方关于距离控制数的部分工作基本上属于这一类。

3. 跟踪研究 跟踪研究是常用的研究方法。

跟踪已有结果,作出新结果,我们的很多研究工作都是属于这一类。有以下几种跟踪方式:

(a) 研究已知结论的条件是否可以减弱,结论是否可以加强,是否可以得到更深刻的结论等。

(b) 借用已有的结果作为引理,在这些引理的基础上得到新的结果。

(c) 受已有方法的启发得到更深刻的结果,将已有的某些结果作为推论。田方和黄佳的目前部分研究属于这一类研究。

(d) 总结某些特殊图类已有结果和方法,将它们推广到更一般的图类(比如,置换图,线图,笛卡儿乘积图,可迁图等),获得更一般的结果。比如,徐敏,吕敏,朱强,马美杰和杨超的部分工作就属于这类研究。

4. 拓展研究 拓展研究是指对已有概念的推广,提出新的研究领域。有无向图的概念推广到有向图的情形,某一类图的结论是否可以推广到更广泛的一类图上去。连通度推广到限制连通度,直径推广到宽直径、容错直径,控制推广到距离控制、甚至 (d, m) -控制,泛圈推广到泛连通等等。

田方把控制数的结果推广到距离控制数,杨超把无向图笛卡儿乘积连通度的结果推广到有向图,推广笛卡儿乘积连通度的结果到更广泛乘积图工作就属于这类研究。

二、借船出海,模仿吸收,为我所用

要想借船出海，就必须了解船的种类，针对出海的目的借用不同的船。这就需要我们了解和掌握一些所研究问题的基本研究方法。这里仅仅是借船，因此在方法无须创新。下面，我们以连通性问题为例。在确定图的连通度问题时，主要有以下几个方法。

1. 根据 Menger 定理, Menger-Whitney 判定定理和 Whitney 不等式 $\kappa \leq \lambda \leq \delta$, 或者构造出 δ 条内点 (或者边) 不交的路来 (直接证明), 或者证明在图任意去掉 $\delta - 1$ 个点 (或者边) 后仍然是连通的 (间接证明)。这种方法需要对图的结构有非常清楚的了解, 因此适合于考虑一些具体图的连通度。事实上, 很多具体图类的连通度几乎都通过这种方法确定的。
2. 根据 Watkins [17] 和 Mader [15] 提出的原子概念和原子分解定理。利用这个定理得到边迁图有 $\kappa = \delta$ 。这种方法考虑图的整体性质, 如果原子数为 1, 那么 $\kappa = \delta$ 。后来, Hamidoune [8] 推广这个概念到边原子, 得到点迁图有 $\lambda = \delta$ 。
3. Imase 等人 [10] 提出的整体分析方法。这种方法考虑有向图的连通度 κ (或者边连通度 λ), 直径 d , 正则度 k 和阶数 n 之间的关系。
4. 直接分析分离集的性质, 这种方法对分析边连通度是很有效的。如图论中一个著名结果“直径不超过 2 的简单图必有 $\lambda = \delta$ ”就是采用这种方法 (参见 [23] 中例子 4.3.1)。但对点连通度情形很少用。最近, 杨超 [35, 36] 利用直接对分离集进行分析的方法得到笛卡儿乘积图的点和边连通度的精确表达式, 例如: $\kappa(G_1 \times G_2) = \min\{\kappa_1 v_2, \kappa_2 v_1, \delta_1 + \delta_2\}$ 。
5. 根据其它方法。比如, 利用图的边连通度和线图的点连通度之间的关系。吕敏利用这个方法得到限制点连通度与线图边连通度之间关系的系列结果 [27, 28]。

在了解了这些方法之后, 我们就可以考虑这些方法是否可以用来解决图的限制连通度问题。事实说明, 其中的某些方法用在限制连通度问题上成功的。

例如, 我们在获得超立方体网络及其各种变型网络的限制连通度, 笛卡儿乘积图的连通度, de Bruijn 和 Kautz 无向图的限制连通度, 都是采用第一种方法来证明的。这就要求对图的结构性质有充分地揭示。我有一个不成熟的想法。Menger 定理对任意两个子集 (不一定是两个点) 是成立的, 从这里我们能否得到一些关于限制连通度的一些结果呢? 目前, 文献中还没有考虑这个问题, 我们是否可以考虑一下。

我们在考虑图的限制边连通度时, 仿照 Hamidoune 的边原子概念, 定义限制边原子。利用这个, 我先后写了几篇关于限制边连通度的文章。特别是在文章 [31] 中, 利用限制边原子概念。证明了 λ' -nonoptimal 图中的两个不同的 λ' 边原子是不交的, 并获得原子分解定理, 也得到边可迁图是 λ' -optimal 的结果。这种方法, 先后被许多作者采用。其中, 孟吉祥 [16] 也利用 λ' 边原子概念, 证明了: 如果 d 正则 d 边连通图 G 中的边原子数 $a'(G) \geq 3$, 那么两个不同的 λ' 原子是不交的。这个结论显然是我们结果的推论, 因为在 [31] 中, 我们证明了: λ' 图 G 是 λ' -optimal 当且仅当 $a'(G) = 2$ 。这个结果意味着, 如果 $a'(G) \geq 3$, 那么 G 是 λ' -non-optimal。关于点可迁图的限制边连通度有一个猜想没有解决, 即“ n 阶 k 度点可迁图的限制边连通度只可能为 $k, 2k - 2$ 或者 $\frac{n}{2}$ ”。点原子能导出点可迁图连通度的许多结果, 如果我们引进限制点原子概念, 将会对点可迁图的点限制连通度会有什么结果?

在 [21] 我们利用了 Imase 等人 [10] 的分析方法证明了: 当图的点数时大于 d^k 时, 它的连通度一定是 d ; 当点数时大于 $d^k - (d^{k-1} + d^{k-2} + \dots + d) + 2$ 时, 它的连通度一定是 $d - 1$ 。根据这个结果可以断定 Kautz 有向图 $K(d, k)$ 的连通度是 d ; De Bruijn 有向图 $B(d, k)$ 的连通度是 $d - 1$ 。在 [25, 26] 中, 我们利用这个分析方法, 得到有向图的限制连通度 κ , 直径 d , 正则度 k 和阶数 n 之间的关系, 作为推论分别获得了 de Bruijn 和 Kautz 及其广义有向图的限制边连通度。为什么不用类似的方法来考虑限制点连通度? 为什么不用类似的方法来考虑无向图的限制连通度?

在 [27] 中, 我们借用了线图, 导出了图的限制边连通度和线图的限制点连通度之间的关系, 获得

了 de Bruijn 和 Kautz 有向图的限制点连通度。在 [28] 中, 我们获得 “ $\kappa'(L(G)) = \lambda'(G)$ if and only if G is not super- λ' ”。作为推论我们得到 Hellwig 等人的结果 “ $\kappa(L(G)) = \lambda'(G)$ ”。这里面的工作主要是吕敏做的, 我先前也曾叫别的同学做过, 但没有得到任何结果。归根结蒂是功夫花得不够。

最近, 杨超 [35, 36] 利用直接对分离集进行分析的方法得到笛卡儿乘积图的点和边连通度的精确表达式, 例如: $\kappa(G_1 \times G_2) = \min\{\kappa_1 v_2, \kappa_2 v_1, \delta_1 + \delta_2\}$ 。

从这些例子可以看出, 了解各自研究领域中的方法是非常必要的。我也希望同学们认真总结一下各自课题的研究方法。一旦掌握了一种好的方法, 能写出的文章可能就不是一篇两篇的问题了。

最近, 黄佳在考虑 Bondage 数时, 推广平面图的结果到一般图; 马美杰, 徐敏和杜正中关于泛圈和泛连通性研究工作, 田方在做距离控制数方面的研究工作所用的方法也基本上属于这一类。当然, 要得到好的结果, 特殊的技巧是少不了的。

三、顺藤摸瓜, 发现和提出问题

顺藤摸瓜就是沿着已有的思想和方法继续研究下去, 这是跟踪研究的最常用方法之一, 也是初次介入科学研究的人最先接触到的方法。这就要求对这个研究课题的基本思想和方法有个深入的理解。明确研究目标, 理顺研究思路, 寻找理论和方法上的突破口。

受文献 [1] 的影响, 我从上世纪 80 年代末开始研究循环网络。起初, 我做了一点有关循环有向图连通度的工作。1991 年, 许德标应邀来我校讲学, 讲的是互连网络中的图论问题。他给我们带来一篇有关循环网络最原始的文章 [18], 并希望我们作些无向双环网络的直径工作。后来, 我们几人合作完成了一篇文章 [4], 我们用的方法基本上是组合法。那时, 我们想做有向双环网络的直径。当时的文献极少, 除了文献 [18] 外, 我们读到另一篇文章 [6]。这两篇文章都提到几何方法, 即利用欧氏空间坐标, 建立了有向双环网与 L 形的关系。文献 [6] 还建立了 L 形可用有向双环网实现的充分必要条件, 并利用已经建立的 n 个点有向双环网的直径下界 $lb(n) = \lceil \sqrt{3n} \rceil - 2$, 得到几类紧优有向双环网。

容易看到, 对某些 n 个点有向双环网的直径不一定能达到下界。我们利用 “ $lb(n) + k$ ” 给出 k 紧优有向双环网的定义。对任何 $k \geq 1$, 已有的方法不能构造出 k 紧优有向双环网。我们的研究目标是: 设计一个方法, 对于给定的 $k \geq 0$, 它能构造出无穷个 k 紧优有向双环网来。因此, 在理论和方法上必须有所突破。我们决心以次为突破口, 通过仔细研究和分析有向双环网与 L 形的关系。我们引进 k 紧优 L 形瓦的概念。终于得到一个 L 形瓦是 k 紧优的充分必要条件是一个关于多元不定方程有整数解。这个结论的证明非常简单。基于这样一个简单结论, 我们提出一个设计方法, 并设计出许多紧优和几乎紧优的双环网来。这篇文章发表在《中国科学》上 [13], 整整花了我 1 年多时间, 文稿初稿就有 200 多页。这样一个简单发现是非常重要的, 由它找出了一系列 2 紧优和 4 紧优双环网来, 完成了 7 篇论文。

当我们在顺藤摸瓜, 在寻找 4 紧优双环网络时, 在解不定方程时到了极大的困难, 无穷无尽的选取带来无穷无尽的验算, 总达不到目的。通过一些参数分析, 我们找到一个突破口, 通过苦苦思索和分析, 利用数论方法终于发现了一个必要条件。有了这样一个必要条件, 我们构造出几类 4 紧优双环网络来, 这篇文章发表在《中国科学》上 [24]。后来, 我在审稿和国内杂志上看到几篇构造紧优双环网络的文章, 都是利用了我们的思想, 理论和方法上还没有根本的突破。

这是要注意的是, 顺藤摸瓜的研究方法虽然是建立在已有思想和方法的基础上, 但要摸到好瓜, 一定要对原有理论和方法必须有所突破。

四、认准目标, 一竿子到底, 然后扫清障碍

所谓认准目标是在大量调查研究 and 数据分析的基础上猜想的一个结论, 顺其自己的思路证明下去, 遇到障碍就假设为 “引理”, 直到结论的 “证明”。在回过头来, 一个一个地扫清障碍, 即证明 “引

理”。或许在扫清的过程中会出现新的障碍，得到新的结果。如果障碍扫清了，结论也就成立了。这种方法，我相信很多人都试过。不同的是，有人继续研究下去，有人却半途而废。

比如，在 [12] 中，我们证明了：二元 de Bruijn 无向图 $UB(2, n)$ 的宽直径 $D_2(UB(2, n)) = n$ 。这个结果令人出乎意外。我们采取的就是方法，调查了大量事实说明这个结论是对的。为了证明这个结论，就需要在 $UB(2, n)$ 中任何两顶点 x 和 y 之间构造两条内点不交且长度不超过 n 的 xy 路来。我们借助于 de Bruijn 有向图 $B(2, n)$ 的最短路。因为 $B(2, n)$ 的直径为 n ，连通度为 1，如果 $B(2, n)$ 中的最短 (x, y) 路 P 和最短 (y, x) 路 Q 内点不交，结论就成立了。但事实上，很容易找到这样的两顶点， P 和 Q 内点相交，但找到的例子都是最多交于一个内点。如果能证明“最多交于一个内点”（作为引理），我们就能证明结论。

当时，法国巴黎南大学的 Sotteau 正在我们系访问，我向她报告了这个工作。余下的时间就是集中精力去攻克那个“引理”。在证明的过程中，发现过不去，并从过不去的地方找到一个反例，就是我写在讲义中的那个例子。 $x = 00010001$ 和 $y = 10010010$ ， $P \cup Q$ 有两个内部交点。这个例子的发现使我们很失望，但我们没有放弃。后来，我们证明了“最多交于两个内点”。在这个条件下，我们通过复杂的构造终于成功地证明了我们的初始猜想的结论。这个结论的证明，前后花了我们两年的时间。

这种方法不能解决三元 de Bruijn 无向图 $UB(3, n)$ 的宽直径，因为 $UB(3, n)$ 的连通度为 4。4 条内点不交的路构造起来就困难多了。事实上，当 $d \geq 3$ 时，de Bruijn 无向图 $UB(d, n)$ 的宽直径至今仍未解决。

五、顺手牵羊，牵一个是一个

顺手牵羊不是一种主流的研究方法，是指我们在阅读文献时，偶然发现的一个问题，觉得很有趣，试图解决它，果然解决了。这里的问题大部分指的是文章中提出的新猜想，新问题，或者发现其主要结果证明中的漏洞，或者对其中的某些重要结果的证明不满意。这些问题可能与自己的研究主题可能没有什么关系，也可能是自己熟悉的问题。初次步入研究时，往往对各种问题产生好奇和遐想，会迸发新思想的火花。我们在阅读文献和研究过程中也顺手牵到几只这样的羊。

1. 试图解决最新提出的猜想。最早是我读到 Boesch 和 Tindell 发表在《J. Graph Theory》上的文章 [1]，其中有个猜想“All connected circulant graphs are hamiltonian”。我考虑了一段时间，证明了这个猜想 [20]。后来我们又解决一个《Networks》杂志上提出的一个“Set to Set Broadcasting”的猜想 [14]。更有趣的是印度人在《J. Graph Theory》上通过顶点标号引进算术图和平衡图的概念，其中提出 3 个猜想。当时，我把这 3 个猜想交给本科生毕业论文的研究课题，结果都被解决了 [29]。我也有解决猜想失败的教训。如 [19] 中所谓的关于 Simon 和 Murty 猜想的证明是失败的。徐敏在 [33] 中解决的 Bouabdallah and Sotteau 猜想不算是顺手牵羊，因为攻克那个猜想的目的是为了解决一类图的路由转发指数问题。

2. 发现漏洞，寻找补救漏洞的方法。这里“漏洞”是指经典文献和重要专业杂志上发表的有较大影响的结果或者其证明出现严重，甚至致命的问题，而且，要纠正这个漏洞需要付出很大的努力，需要有新的思想和方法才能做到。

当我们在读到发表在《Discrete Mathematics》上文献 [5] 时，发现文末列举的几类最优双环网络无限族，但没有给出证明。这些例子是为了说明最优双环网络 $G(n, s_1, s_2)$ 的最小直径在 $s_1 = 2$ 达到，而在 $s_1 = 1$ 达到。例子是有趣的，但我们发现，这些例子中某些图不是强连通的。这显然是个漏洞。为了弥补这个漏洞，我写了一篇文章，提出一个设计方法，发表在《中国科学》上 [22]。我还写过几篇补漏的文章。注意，写补漏的文章，不要为补漏而写，应该在结果上应有所创新，将其证明有漏洞的结果作为推论而得到。这样的文章比较容易发表。国外杂志不轻易发表单纯的补漏文章，一般由作者本人写个“Corrections”。

最近, 徐敏发现 $C_4 \times C_4$ 的 3 容错直径为 5, 说明了 Krishnamoorthy 和 Krishnamurthy [11] 关于笛卡儿乘积图的容错直径的结果 “ $D_{\kappa(G_1)+\kappa(G_2)}(G_1 \times G_2) \leq D_{\kappa(G_1)}(G_1) + D_{\kappa(G_2)}(G_2)$ ” 是不对的。她修正为 “ $D_{\kappa(G_1)+\kappa(G_2)}(G_1 \times G_2) \leq D_{\kappa(G_1)}(G_1) + D_{\kappa(G_2)}(G_2) + 1$ ”。这个结果被接收发表了 [34]。

3. 寻找重要定理的最短证明。我也曾经给过一些图论中重要定理的 (自以为) 简短证明, 其中令我满意的是给出 de Bruijn 有向图的宽直径的最短证明 [30]。但我们试图利用同样的方法给出 Kautz 有向图的宽直径的最短证明, 但至今没有成功。

参考文献

- [1] F. Boesch and R. Tindell, Circulants and their connectivity. *Journal of Graph Theory*, **8**(4)(1984), 487-499.
- [2] F. R. K.Chung and M. R. Garey, Diameter bounds for altered graphs. *Journal of Graph Theory*, 1984, **8**(4), 511-534.
- [3] 邓志国, 徐俊明, On diameters of altered graphs. *数学研究*, **37** (1) (2004), 35-41.
- [4] D. Z. Du, D. F. Hsu, Q. Li and J.-M. Xu, A Combinatorial Problem Related to Distributed Loop Networks. *Networks*, **20** (2) (1990), 173-180.
- [5] P. Esqué, F. Aguiló and M. A. Fiol, Double commutative-step digraphs with minimum diameters. *Discrete Mathematics*, **114**(1993), 147-157.
- [6] M. A. Fiol, J. L. Yebra, I. Alegre and M. Valero, A discrete optimization problem in local networks and data alignment. *IEEE Transactions on computers*, **36** (1987), 702-713.
- [7] F. Harary, *Graph Theory*. Addison-Wesly Publishing Company, 1969.
- [8] Y. O. Hamidoune, Quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **30** (1981), 1-10
- [9] M. C. Heydemann, J. C. Meyer and D. Sotteau, On forwarding indices of networks, *Discrete Applied Mathematics*, **23** (1989), 103-123.
- [10] M. Imase, T. Soneoka and K. Okada, Connectivity of regular digraphs with small diameters. *IEEE Transactions on Computers*, **34** (1985), 267-273
- [11] M.S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, Fault diameter of interconnection networks, *Computers and Mathematics with Applications*, **13** (5/6) (1987), 577-582.
- [12] Q. Li, D. Sotteau, and J.-M. Xu, 2-diameter of diameter of de Bruijn graphs. *Networks*, **28** (1) (1996), 7-14
- [13] Q. Li, J.-M. Xu and Z. L. Zhang, The infinite families of optimal double loop networks (in Chinese). *Science in China*, **23A** (9) (1993), 979-992. *Discrete Applied Mathematics*, **46** (1993), 179-183.
- [14] Li, Q., Zhang, Z.-L. and Xu, J.-M., A Very short proof of a conjecture concerning set to set broadcasting. *Networks*, **23** (4) (1993), 449-450.
- [15] W. Mader, Eine Eigenschaft der Atome andlicher Graphen. *Archives of Mathematics* (Basel), **22** (1971), 333-336.
- [16] J.-X. Meng, Optimally super-edge-connected transitive graphs. *Discrete Mathematics*, **260** (2003), 239-248.
- [17] M. Watkins, Connectivity of transitive graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **8** (1970), 23-29.
- [18] G. K. Wong, and D. Coppersmith, A combinatorial problem related to multimodule memory organization. *Journal of Association for Computing Machinery*, **21** (1974), 392-401.
- [19] 徐俊明, 关于 Simon 和 Murty 猜想的证明. *数学研究与评论*, **4**(4)(1984), 85-86. Erratum, **5**(4) (1985), 38; **7**(2) (1987), 198.
- [20] J.-M. Xu, All connected circulants are hamiltonian. *Northern Mathematics*, **7**(1) (1991), 33-34.
- [21] J.-M. Xu, An inequality related the order, maximum degree, diameter and connectivity of a strongly connected digraph. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **8** (2) (1992), 144-152.

- [22] 徐俊明, 计算机互连双环网络的最优设计. 《中国科学》, E辑, **29** (3) (1999), 272-278. 38. Designing of optimal double loop networks. *Science in China, E*, **29** (5) (1999), 462-469.
- [23] 徐俊明, 图论及其应用 (第二版), 中国科学技术大学出版社, 合肥, 2004.
- [24] J.-M. Xu and Q. Liu, An Infinite Family of 4-Tight Optimal Double Loop Networks (in Chinese). *Science in China*, **33A** (1) (2003), 71-74. An English version in *Science in China*, **46A** (1) (2003), 139-143.
- [25] J.-M. Xu and M. Lü, On restricted arc-connectivity of regular digraphs. *Taiwan Journal of Mathematics*, **9** (4) (2005), 661-670.
- [26] J.-M. Xu and M. Lü, The restricted edge-connectivity of de Bruijn and Kautz networks, *Ars Combinatoria*, to appear.
- [27] J.-M. Xu and M. Lü, Super connectivity of line graphs and digraphs, *Acta Math. Appli. Sinica*, **22** (1) (2006), 43-48.
- [28] J.-M. Xu and M. Lü, M.-J. Ma and A. Hellwig, Super Connectivity of Line Graphs. *Information Processing Letters*, **94** (4) (2005), 191-195.
- [29] J.-M. Xu, J. Shen and Z.-Z. Li, Some Results of Arithmetic and Balanced Graphs. *J. China Univ. Sci. Tech.* **28** (2) (1998), 183-193.
- [30] J.-M. Xu, Y.-F. Tao and K.-L. Xu, Note on Bounded Length Paths of De Bruijn Digraphs. *J. China Univ. Sci. Tech.* **32** (1) (2002), 19-21.
- [31] J.-M. Xu and K.-L. Xu, On restricted edge-connectivity of graphs. *Discrete Math.*, **243** (1-3) (2002), 291-298.
- [32] 徐敏, 互连网络转发指数的研究. 博士论文, 中国科学技术大学, 2004年10月.
- [33] M. Xu, X.-M. Hou and J.-M. Xu, The proof of a conjecture of Bouabdallah and Sotteau. *Networks*, **44** (4) (2004), 292-296.
- [34] M. Xu, J.-M. Xu and X.-M. Hou, Fault diameter of cartesian product graphs. *Information Processing Letters*. **95** (5) (2005), 245-248.
- [35] J.-M. Xu and C. Yang, Connectivity and super connectivity of Cartesian product graphs. Submitted to *Ars Combinatoria*.
- [36] 徐俊明, 杨超, 笛卡尔乘积有向图的连通度, 投《中国科学》, 2006.