《组合网络理论》读书报告

黄佳

PB99001020

June 22, 2003

一. 书中存在的问题

1. 控制集

§1.2.4的最后定义了控制集，接着给出以下结论：如果S是最小控制集，则$V(G-S)$也是控制集。实际上，S只需是极小控制集，就有上述结论。由此得到$\gamma(G) \le \lfloor \frac{1}{2}\nu(G) \rfloor$，这里少了$G$不含孤立点的条件。设G的连通分支为$H_1, H_2, \ldots, H_n$，则G的最小独立集S为$H_1$, $H_2, \ldots, H_n$的最小独立集$S_1, S_2, \ldots, S_n$之并。如果每个H_i都不为孤立点，则

$$\gamma(H_i) \le \lfloor \frac{1}{2}\nu(H_i) \rfloor.$$

从而

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(H_i) \le \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2}\nu(H_i) \rfloor \le \lfloor \frac{1}{2}\nu(G) \rfloor.$$

如果有某个分支H_i为孤立点，则

$$\gamma(H_i) = 1 > 0 = \lfloor \frac{1}{2}\nu(H_i) \rfloor.$$

因此，若G含足够多的孤立点，则$\gamma(G) > \lfloor \frac{1}{2}\nu(G) \rfloor$。

2. 线图的Euler性和Hamilton性

Theorem 2.1.6的条件“G is a strongly connected digraph”可以减弱为“G is a connected digraph”。

(a)If G is a connected digraph,then

$$\begin{aligned} d_G^-(x) = d_G^+(y) \ for\ any\ (x,y) \in E(G) \quad &\Leftrightarrow \quad L(G)\ is\ a\ balanced\ digraph. \\ &\Leftrightarrow \quad L(G)\ is\ eulerian. \end{aligned}$$

(b)书上的证明在G连通的条件下仍然成立。

($\Leftarrow$)同书上的证明。

($\Rightarrow$)因G为Hamiltionian，故G强连通。

3. 多重线图

P47,L16:"This fact shows that there is at most one directed path of length h between any two vertex in $L^n(G)$ since the sequence $(x_0x_1\dots x_nx_{n+1}\dots x_{n+h})$ is a vertex of $L^{n+h}(G)$ for $n\geq 1$."

这句话有问题。$L^n(G)$中的两点间可以有两条有向路，这两条路对应L^{n+h}中两个不同的点。

4. Edge-Transitive Graphs

Theorem 2.2.3 Every edge-transitive graph G with $\delta(G)>0$ is vertex-transitive or bipartite.

这个定理对无向图是对的，但有向图的情形有问题，只能得到G为点可迁的，不能得到G为点可迁图或二分图。

设G为边可迁有向图，$\delta(G)>0$，则对$\forall x\in V(G)$，$d^+_G(x)\geq\delta(G)>0$，$d^-_G(x)\geq\delta(G)>0$。根据书中的证明，有$x\in V_1,x\in V_2$，从而$V_1=V_2=V(G)$。于是G为点可迁。

应将条件"$\delta(G)>0$"改为"G连通"。对于无向图，G连通$\Rightarrow\delta(G)>0$，故定理结论仍成立。对于有向图，G连通并不比$\delta(G)>0$强。下面证明有向图的情形。

因G连通，故$V(G)=V_1\cup V_2$。若$V_1\cap V_2=\emptyset$，则G为二分图。否则，$V_1\cap V_2\neq\emptyset$。

$1^\circ x,y\in V_1$，则有$(x,u)\in E(G),(y,v)\in E(G)$，故$\exists\theta\in Aut(G)$，使得$\theta(x)=y$。

$2^\circ x,y\in V_2$，同1°。

$3^\circ x\in V_1,y\in V_2$，因$V_1\cap V_2\neq\emptyset$，设$z\in V_1\cap V_2\neq\emptyset$，则x与z相似，z与y相似，从而x与y相似。

由$1^\circ,2^\circ,3^\circ$得，G为点可迁的。

该定理的推论也要做相应的修改。

5. Diameter of Cartesian Products

Theorem 2.3.3 The diameter $d(G_1\times G_2\times\cdots\times G_n)=d(G_1)+d(G_2)+\cdots+d(G_n)$.

书上的证明不对。如第一个式子中的"$d(G_1\times G_2)\leq d(G_1\times G_2;x,y)$"，因x,y为$G_1\times G_2$中任意两点，故$d(G_1\times G_2)\geq d(G_1\times G_2;x,y)$。最后一个式子中的"$d(G_1;x_1,y_1)+d(G_2;x_2,y_2)\geq d(G_1)+d(G_2)$"也不对，应为"$\leq$"。现证明如下。

取$x,y\in V(G_1\times G_2)$，使得$d(G_1\times G_2)=d(G_1\times G_2;x,y)$。设$x=x_1x_2,y=y_1y_2$，其中$x_1,y_1\in V(G_1),x_2,y_2\in V(G_2)$。P为最短$(x_1,y_1)$-path，Q为最短$(x_2,y_2)$-path。

1° $x_1=y_1$，则x_1Q为最短(x,y)-path，故

$$d(G_1\times G_2)=d(G_1\times G_2;x,y)=d(G_2;x_2,y_2)\leq d(G_2)\leq d(G_1)+d(G_2).$$

2° $x_2=y_2$，则Px_2为最短(x,y)-path，故

$$d(G_1\times G_2)=d(G_1\times G_2;x,y)=d(G_1;x_1,y_1)\leq d(G_1)\leq d(G_1)+d(G_2).$$

3° $x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$，则$x_1Q \cup Py_2$为最短(x,y)-path。否则，存在一条更短的(x,y)-path $W = (x_1x_2, u_1u_2, \ldots, v_1v_2, y_1y_2)$。W的第一个分量$x_1, u_1, \ldots, v_1, y_1$按原来的顺序（去掉其中的重复点）决定了一条$(x_1, y_1) - path\ W_1$，第二个分量$x_2, u_2, \ldots, y_2, y_2$决定了一条$(x_2, y_2) - path\ W_2$。易见$\varepsilon(W) = \varepsilon(W_1) + \varepsilon(W_2) \geq \varepsilon(P) + \varepsilon(Q) = \varepsilon(x_1Q \cup Py_2)$，这与W更短矛盾。于是

$$d(G_1 \times G_2) = d(G_1 \times G_2; x, y) = \varepsilon(x_1Q \cup Py_2) = \varepsilon(P) + \varepsilon(Q) \leq d(G_1) + d(G_2).$$

由$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$得，$d(G_1 \times G_2) \leq d(G_1) + d(G_2)$。

另一方面，取$x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$，使得$d(G_i) = d(G_i; x_i, y_i), i = 1, 2$。令$x = x_1x_2, y = y_1y_2$，设P为最短$(x_1, y_1)$-path，Q为最短$(x_2, y_2)$-path，由$3^\circ$知，$x_1Q \cup Py_2$为最短(x,y)-path。因此

$$d(G_1 \times G_2) \geq d(G_1 \times G_2; x, y) = \varepsilon(x_1Q \cup Py_2) = \varepsilon(P) + \varepsilon(Q) = d(G_1) + d(G_2).$$

The theorem follows.

6. Undirected toroidal meshes

书中给出的第一个定义为：$V = \{x_1x_2 \ldots x_n : x_i \in \{0, 1, \ldots, d_i - 1\}\}$，$x = x_1x_2 \ldots x_n$与$y = y_1y_2 \ldots y_n$相邻当且仅当$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1$。按此定义，点$0 \ldots 00$与$0 \ldots 0(d_n - 1)$不相邻，但0和$d_n - 1$在$C_{d_n}$中是相邻的，从而$0 \ldots 00$与$0 \ldots 0(d_n - 1)$在$C_{d_1} \times \cdots \times C_{d_n}$中是相邻的。可作如下修改：

$V = \{x_1x_2 \ldots x_n : x_i \in \{0, 1, \ldots, d_i - 1\}\}$，$x = x_1x_2 \ldots x_n$与$y = y_1y_2 \ldots y_n$相邻当且仅当$\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得

$$\begin{cases} x_j = y_j, & j \neq i \\ x_j - y_j \equiv 1\ or\ d_{i-1} \mod d_i, & j = i. \end{cases}$$

7. Theorem 4.2.7

证明中取X,Y,R,S,T如下：

$$X = N_H^+(x) \setminus \{x_1\}; Y = N_H^-(y) \setminus \{x_{h-1}\};$$

$$R = N_H^+(X \cup \{x_1\}) \setminus \{x_0, x_1, x_2\};$$

$$S = N_H^-(Y \cup \{x_{h-1}\}) \setminus \{x_h, x_{h-1}, x_{h-2}\};$$

$$T = V(G) \setminus (X \cup Y \cup R \cup S \cup V(P)).$$

它们应该是两两不交的。但R与S可能有交，S与Y也有可能有交，应将R,S改为

$$R = N_H^+(X \cup \{x_1\}) \setminus (\{x_0, x_1, x_2\} \cup X);$$

$$S = N_H^-(Y \cup \{x_{h-1}\}) \setminus (\{x_h, x_{h-1}, x_{h-2}\} \cup Y).$$

8. Edge-Forwarding Index of Routing

书上P196的定义有误，应为

$$\pi(G) = min\{\pi(G,\rho) : \forall \rho\}.$$

后面Theorem 4.1.4 的证明中的

$$\pi(G) \le \pi_e(G,\rho) \le 2q(n-q) \le \lfloor \frac{1}{2} n^2 \rfloor$$

也有问题。e是任取的，不能得到$\pi(G) \le \pi_e(G,\rho)$。应该先得出

$$\pi_e(G,\rho) \le 2q(n-q) \le \lfloor \frac{1}{2} n^2 \rfloor,$$

再由e的任意性得$\pi(G,\rho) \le \lfloor \frac{1}{2} n^2 \rfloor$，从而有

$$\pi(G) = min\{\pi(G,\rho) : \forall \rho\} \le \pi(G,\rho) \le \lfloor \frac{1}{2} n^2 \rfloor.$$

后面的

$$\pi(G) \ge \pi(G,\rho) \ge \frac{1}{\varepsilon} \sum_{(x,y) \in V \times V} d(G;x,y)$$

也不对。应改为

$$\pi(G,\rho) \ge \frac{1}{\varepsilon} \sum_{(x,y) \in V \times V} d(G;x,y),$$

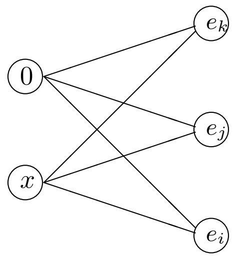
再由ρ的任意性得

$$\pi(G) \ge \frac{1}{\varepsilon} \sum_{(x,y) \in V \times V} d(G;x,y).$$

9. Theorem 4.4.3

证明的最后为了说明定理的条件是紧的，举了一个例子。"the sum of degrees of any two vertices in G is equal to $2\omega = n + \omega - 2$"这句话有误。$G = W(\omega - 2, 4)$中在外面的4个点x_1, x_2, x_3, x_4的度是ω，在里面的$\omega - 2$个点$y_1, y_2, \ldots, y_{\omega-2}$的度是$\omega + 1$。

$$d_G(x_i + y_j) = 2\omega + 1, i = 1,2,3,4, j = 1,2,\ldots,\omega - 2$$



$$d_G(x_i + x_j) = 2\omega, i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$$

$$d_G(y_i + y_j) = 2\omega + 2, i, j = 1, 2, \ldots, \omega - 2, i \neq j$$

因此只能说存在两个点的度之和为$2\omega = n + \omega - 2$。事实上这已经足够说明定理的条件是紧的。

10. Theorem 4.4.11

证明有问题。开始取x,y使得$d_\omega(G; x, y) = d_\omega(G)$，后来又说"By the arbitrariness of x,y..."，矛盾。应先任取$x, y \in V(G)$，则存在(x,y)-container $C_\omega(G; x, y) = \{P_1, P_2, \ldots, P_\omega\}$，使得$\varepsilon(P_i) \leq d_\omega(G; x, y) \leq d_\omega(G)$。对$\forall F \subset V(G), d(G - F; x, y) \leq \varepsilon(P_i) \leq d_\omega(G; x, y) \leq d_\omega(G)$。再由x,y和F的任意性得，$D_\omega(G) \leq d_\omega(G)$。

后面证明$d_\omega(G) \leq r_\omega(G) + 1$时则应取x,y使得$d_\omega(G; x, y) = d_\omega(G)$。

二． 补充的证明

1. $K_{2,3}$不能嵌入到Q_n中

证明：假设$K_{2,3}$可嵌入到Q_n中。如图所示，由Q_n的点可迁性，可任取一点为$0 = 0 \ldots 0$。则与它相邻的三点分别为e_i, e_j, e_k，i,j,k两两不同，其中e_i表示第i个分量为1，其余为0。剩下一点x与e_i, e_j相邻，则$x = e_{ij}$（第i,j个分量为1，其余为0）。同理，有$x = e_{ik}$，$x = e_{jk}$。矛盾！

2. FQ_n是Cayley图

令$\Gamma = Z_2^n$，$S = \{e_1, \ldots, e_n, \sum_{i=1}^n e_i\}$，则$FQ_n = C_\Gamma(S)$，其中$e_i$表示第i个分量为1，其余为0。证明如下。

显然$V(FQ_n) = \Gamma$。$\forall x, y \in \Gamma, x = x_1 x_2 \ldots x_n, y = y_1 y_2 \ldots y_n$，

$$\begin{aligned} (x,y) \in E(FQ_n) &\Leftrightarrow (x,y) \in E(Q_n) \ or \ x_i = \bar{y}_i \ for \ all \ i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y = e_j \ for \ some \ j, \ or \ x^{-1}y = \sum_{i=1}^n e_i \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y \in S. \end{aligned}$$

三.能做的工作

1. Connectivity of Line Graphs

Theorem 2.1.4 证明了$\lambda(G) \le \kappa(L)$。由一道作业题，要举一个例子说明严格不等号成立。但我一直想不出。于是我就想能不能证明$\lambda(G) \ge \kappa(L)$。

$\forall x, y \in V(G)$，存在$u, v \in V(G)$，使得$a = (u, x) \in E(G), b = (y, v) \in E(G)$。因$a, b \in L(G)$，故存在$\kappa = \kappa(L)$条内点不交的(a,b)-path：$P_1, P_2, \ldots, P_\kappa$。由此可构造出$\kappa$条(x,y)-path $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\kappa$ in G。

若存在i, j使得Q_i, Q_j相交于某一条边c，则P_i, P_j在L(G)中相交于点c，矛盾。因此Q_1, $Q_2, \ldots, Q_\kappa$是边不交的，从而$\lambda(G) \ge \kappa(L)$。

2. CQ_n的点转发指数

CQ_1, CQ_2, CQ_3是Cayley图，CQ_4是点可迁的，当$n > 4$时CQ_n不是点可迁的。

对于Cayley图，可以利用Theorem 4.1.2来计算$\tau(G)$。Q_n是Cayley图，求得$\tau(Q_n) = 2^{n-2} + 1$。

CQ_2与Q_2同构，故$\tau(CQ_2) = 1$。CQ_3为Cayley图，求得$\tau(CQ_3) = 4 < 5 = \tau(Q_3)$。$CQ_4$还不知道是不是Cayley图，须另行计算。

由Theorem 4.1.1可得，

$$\tau(CQ_4) \ge \frac{1}{16} \sum_{y \in V} \sum_{x(\neq y) \in V} (d(CQ_4; x, y) - 1) = 14.$$

另一方面，可以设计一个路由ρ，使得$\tau(CQ_4, \rho) = 14$，从而$\tau(CQ_4) \le 14$。设CQ_4的标号为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & a & b & c \\ d & e & f & g \end{pmatrix}$$

$\rho(1,2) = 12$, $\rho(1,3) = 123$, $\rho(1,4) = 14$, $\rho(1,5) = 15$, $\rho(1,6) = 156$,
$\rho(1,7) = 157$, $\rho(1,8) = 148$, $\rho(1,9) = 1d9$, $\rho(1,a) = 15a$, $\rho(1,b) = 1d9b$,
$\rho(1,c) = 14gc$, $\rho(1,d) = 1d$, $\rho(1,e) = 12e$, $\rho(1,f) = 12ef$, $\rho(1,g) = 14g$.

我在论文中证明CQ_4的点可迁性时，给出了$CQ_4 - x (x \neq 1)$到$CQ_4 - 1$的同构映射，记为σ_x。则令$\rho(x,y) = \rho(1, \sigma_x(y))$，$x \neq 1$。这样定义的$\rho$是一个最短路由。下面计算它的转发指数。

先考虑$\rho_1 = \{\rho(1,y) : y = 2, 3, \ldots, g\}$。$CQ_4$中各点限制在$\rho_1$（尽管$\rho_1$并非一个路由，

但仍可类似处理）上的负载为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同理可求出$A_x, x = 2, 3, \ldots, g$。

$$A = \sum_{i=1}^{g} A_i = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 \end{pmatrix}$$

这说明每个点的限制在ρ上的负载均为14，故$\tau(CQ_4, \rho) = 14$。

至此已证明$\tau(CQ_4) = 14 < 17 = \tau(Q_4)$。而用Theorem 4.1.2算出来的（如果$CQ_4$是Cayley 图的话）$\tau(CQ_4)$也为14，由此可猜测$CQ_4$是Cayley图。

对于$CQ_n, n > 4$，由于没有点可迁性，因此可能有一定困难。

3. 小阶CQ_n的点和边可迁性

这部分的讨论需要一定的篇幅，将另写成论文，这里省略。

上课时讲到第4章有不少结果还可以改进，但限于时间，还没有仔细考虑。

四. 勘误表

（转载时省略。）

转载者附注：

论文"Multiply-twisted hypercube with four or less dimensions is vertex-transitive"已于2003年7月16日完成。该文证明了当$n \leq 4$时, CQ_n是Cayley图，因而是点可迁的；当$n \geq 2$时, CQ_n不是边可迁的.