《互连网络拓扑结构分析》读书报告

杨超
PB99001009

June 24, 2003

§1 全书内容梗概

《互连网络拓扑结构分析》一书共分四章。

第一章介绍了互连网络和图论的基本概念和定理。随着计算机技术的发展，在现有制造工艺下，处理器的速度几乎达到了极限。为了制造速度更快的计算机，只能把多个处理器连接成一个网络。处理器之间如何连接，对整个系统的速度有着至关重要的影响。为此，对网络的拓扑结构的研究就有很有意义。因为图可以视为对网络的拓扑结构的一种抽象，所以图论就成为了研究网络性能和网络设计的强有力的数学工具。小延迟和高容错性是我们对网络的其中两个基本要求，这反映在图论里，就是图的直径和连通度。该书关注的网络性能大多与连通度有密切的关系。于是，图论里的Menger定理成为我们的理论基础，贯穿全书。

第二章介绍了构造图的三种常用方法：线图方法，Cayley方法和笛卡尔乘积方法。实际上，对规则和具有较强对称性的图，我们比较容易求得它们的一些常见参数。对于一般的图，则显得束手无策。

第三章介绍了一些常见的网络及它们的性质。主要介绍了超立方体网络，De Bruijn网络和Kautz网络。作为第二章的三种构造方法的应用，我们可以较为容易地确定上述这些特殊的网络的参数。介绍这些特殊的网络的目的是使我们的脑袋里有一些网络的模型，更好的理解下一章提出的一些图的参数。

第四章是全书的重点，主要讨论了图的一些更深入的参数，如容错直径，宽直径，有界连通度等等，都和连通度关系紧密。这些参数大多是计算机学者为了衡量计算机网络的性能而提出来的，因而对这些参数的研究具有较强的实用性。这一章把我们带到图论研究的前沿。这些参数的分析是图论目前较为活跃的领域，在理论和应用上都有较大意义。

关于网络的拓扑结构的内容不限于此书所提及的。本书所涉及的是我们比较感兴趣的一些内容。

下面几部分是我阅读教材时的一些想法。

§2 关于第57页定理2.2.3

第57页的定理2.2.3如下。

定理2.2.3 每个$\delta(G)>0$的边可迁的图G都是点可迁图或者二部分图。

书中对有向图的情况证明了上述定理。边可迁的概念对于有向图和无向图是不太一样的。一个无向图是边可迁的，但作为有向图却不一定边可迁。最简单的一个例子就是无向路P_2边可迁，视为有向图不是边可迁。此定理有些细节没有讲清楚，我试图把这些细节说一下。

定理 1 *无孤立点的边可迁有向图G都是点可迁图或者二部分图。*

证明：因为图G无孤立点，所以对任意的$x\in V(G)$,有$d_G^+(x)$和$d_G^-(x)$不同时为0。令

$$V_1=\{x\in V(G)|d_G^+(x)\neq 0\}$$
$$V_2=\{x\in V(G)|d_G^-(x)\neq 0\}$$

显然$V_1\cup V_2=V(G)$,且由边可迁性，V_1中的点互相相似，V_2中的点也互相相似。

i)若$V_1\cap V_2=\emptyset$,则G为二部分图。

ii)若$V_1\cap V_2\neq\emptyset$,则G点可迁。 □

注1 由定理1,定理2.2.3中的条件$\delta(G)>0$应该为G无孤立点。因为对有向图，$\delta(G)>0$意味着对任意的$x\in V(G)$,有$d_G^+(x)\neq 0$和$d_G^-(x)\neq 0$，也就是$V_1\cap V_2\neq\emptyset$，所以G一定点可迁。

注2 定理1中证明比书中简单，但如前所述，边可迁的无向图视为有向图不一定仍然边可迁，故对于无向图的情形，仍需给出独立证明。

§3 关于第114页定理3.1.6

第114页定理3.1.6如下。

定理3.1.6设T_n是高为n的完全二叉树$(n\geqslant 2)$,则
(a) T_n不能以膨胀数1嵌入Q_{n+1}
(b) $2T_{n-1}$能以膨胀数1嵌入Q_{n+1}
(c) T_n能以膨胀数2嵌入Q_{n+1}

书中为了证明定理3.1.6的(b)(c)，用归纳法证明了双根完全二叉树DT_n是Q_{n+1}的支撑子图。书中写道"Because of vertex-transitivity of Q_{n+1}, we can, without loss of generality, the double roots of $0DT_{n-1}$ are $x=000...0$ and $y=010...0$,the double roots of $1DT_{n-1}$ are $u=10...0$ and $v=1010...0$."由于双根是一条边，故点可迁并不能保证双根可以随便取，

边可迁才能保证。而书中没有提到过Q_n的边可迁性。书中又继续写道“Let $z = 0010...0$, and $w = 110...0$. Then z is in $0DT_{n-1}$ and adjacent to x, w is in $1DT_{n-1}$ and adjacent to u.”但实际上，$z \in V(0DT_{n-1})$,但不一定有$zx \in E(0DT_{n-1})$。为了$zx \in E(0DT_{n-1})$，需要以下更强的对称性。

定理 2 $P_1 = (x_1, x_2, x_3)$和$P_2 = (y_1, y_2, y_3)$是$Q_n(n \geqslant 2)$ 中任意两条长为2的路。则存在Q_n的自同构σ, 使得$\sigma(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$。

证明：记e_i是这样的Q_n的顶点，第i个分量为1，其余为0。只需证明存在自同构σ_0,使得

$$\begin{aligned}\sigma_0(x_1) &= e_1\\ \sigma_0(x_2) &= 00...0\\ \sigma_0(x_3) &= e_2\end{aligned}$$

因为Q_n点可迁，故存在自同构σ_0',使得

$$\begin{aligned}\sigma_0'(x_1) &= e_i\\ \sigma_0'(x_2) &= 00...0\\ \sigma_0'(x_3) &= e_j\end{aligned} \tag{1}$$

记σ_{ij}是这样的Q_n的自同构，它把Q_n的每个顶点映射为第i和第j个分量互换后的顶点。易见σ_{ij}确实是自同构，且有

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(00...0) &= 00...0\\ \sigma_{ij}(e_i) &= e_j\\ \sigma_{ij}(e_j) &= e_i\\ \sigma_{ij}(e_k) &= e_k, k \neq i, j\end{aligned}$$

在(1)式中，

i) 若$i = 1$,$j = 2$,取$\sigma_0 = \sigma_0'$。

ii) 若$i = 1$,$j \neq 2$,取$\sigma_0 = \sigma_{2j}\sigma_0'$。

iii) 若$i \neq 1$,$j = 2$,取$\sigma_0 = \sigma_{1i}\sigma_0'$。

iv) 若$i = 2$,$j = 1$,取$\sigma_0 = \sigma_{ij}\sigma_0' = \sigma_{12}\sigma_0'$。

v) 其他情况,取$\sigma_0 = \sigma_{2j}\sigma_{1i}\sigma_0'$。

同理，存在自同构σ_1,使得

$$\begin{aligned}\sigma_1(y_1) &= e_1\\ \sigma_1(y_2) &= 00...0\\ \sigma_1(y_3) &= e_2\end{aligned}$$

于是$\sigma = \sigma_1^{-1}\sigma_0$为所需的自同构。 □

由定理2，立即得到以下推论。

推论 1 Q_n边可迁。

§4 其他

§4.1 第43页

第43页最后一段话说：“It is clear from the definitions that the concept of line graph for undirected case is a special case of digraph.”无向路P_2的线图是P_1,若把其视为有向图，则其线图如下所示。如何将其无向图视为有向图的特殊情况呢？

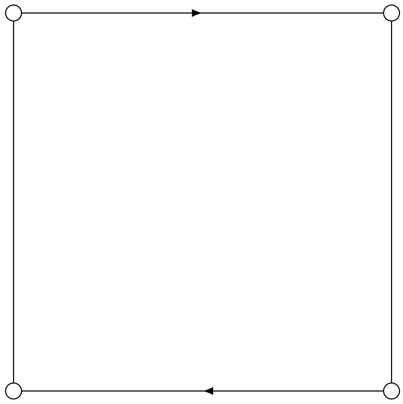

图 1: 一个例子

§4.2 第90页例3

例3所在这一小节的标题是“Cartesian Product of Cayley Graphs”。但这个例子本身是一个Cayley图，但不是Cayley图的笛卡尔乘积，把它放在这一小节似乎不太恰当。

§4.3 关于笛卡儿乘积图的连通度

书中关于笛卡儿乘积图的连通度定理2.3.4是可以改进的。详细结果参见已完成的论文“笛卡尔乘积图的连通度”。

转载者附注：

论文“笛卡尔乘积图的连通度”已于2003年5月18日完成。该文证明了：如果G_1 和G_2是无向图,那么$\kappa(G_1 \times G_2) \geqslant \min\{\kappa_1+\delta_2,\ \kappa_2+\delta_1\}$; $\lambda(G_1 \times G_2) = \min\{\delta_1+\delta_2, \lambda_1 v_2, \lambda_2 v_1\}$; 如果$G_1$ 和G_2 是有向图,那么$\kappa(G_1 \times G_2) \geqslant \min\{\kappa_1+\delta_2,\ \kappa_2+\delta_1,\ 2\kappa_1+\kappa_2,\ 2\kappa_2+\kappa_1\}$. 这些结果也被推广到$n$个连通无向图和$n$个强连通有向图的笛卡尔乘积.