图论证明中的一个无效反例

余璆
（上海工程技术大学电子电气工程学院，上海 201620）

摘要：文章给出了一种较为简单的方法，既通过拓扑图的内外可换性，以圈为边界把图分为都包含同一圈的内外两部分，然后利用色交换技术和顶点合并的方法，使得两部分图在圈上相同位置的顶色取得一致，这样两图又可以合并为一个四色图。从而证明了内外有顶的 3 圈和 4 圈构型的可约性。指出了 Heawood 反例是无效的，也就说明了 Kemple 的证明正确与否应该被认为是悬而未决，而 Heawood 给出的反例很明显是一个错误。

关键词：拓扑图；可约性；反例图

中图分类号：O157.5

Invalid Conterexample in the Proof of Graph Theory

Yu Qiu
(Department of Electronic Engineering,Shanghai University of Engineering Science,
ShangHai 201620)

Abstract: By using the convertible property of the topological graph for inside cycle and outside, the graph is divided into two parts which both contain the same cycle. Then using the method of color exchange, the vertex color on the cycles of two parts in the same position can be corresponded with each other. Thus the reducibility of the 3- cycle and 4-cycle with both vertexes inside and outside can be proved. Meanwhile, point out the invalid counterexample of the “Heawood graph”, then come to the conclusion that whether the proof by Kemple is right or wrong still remains in suspense, while the counterexample by Heawood is on doubt a mistake.

Keywords:topological graph;reducibility;counterexample graph

0 引言

一般在地图四色的证明中引入一个平面三角剖分图T，每个比T顶点数少的平面图皆为四色的，既着色数$\chi(T-v)\leq 4$,而T不是[1]。同时给出一组不可避免集[1],[2]，如图 1 所示。

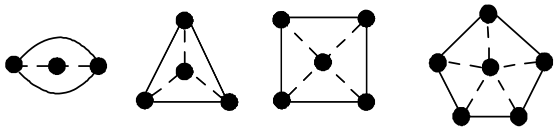

图 1 不可避免集
Fig.1 Unavoidable complete se

可以证明（a），（b）和（c）都是可约的[1],[2]，所以它们在T图中不存在。图 1（a）到（d）的每个图的外部顶和边形成一个圈，圈上有 n 个顶就称为 n 圈。这里把由某个圈内外顶导出的图称为一个构形（configuration）。

1 颜色交换技术

颜色交换技术是图论中为了解决着色冲突而采取的方法，如图 2(a)，（b）。图中如果没有①色和④色的链路，那么就可以解决着色冲突，如图 2(b)中的①色顶的颜色可以和④色

作者简介：余璆（1954-），男，副教授，主要研究方向：图论. E-mail: yuqiu@vip.citiz.net

交换，交换以后不会引起其它地方的着色冲突，同时也解决了与圈内顶的颜色冲突。而图2(a)的④色顶无法通过交换④色和①色来解决着色冲突，而这里把5圈上的④色顶和①色顶称为色关联。但是，由于图2(a)的④色顶和①色顶色关联，它们之间形成链路，就必然使得靠上的②色顶的颜色就可以和③色交换。这里把②色顶称为“色可交换顶”。

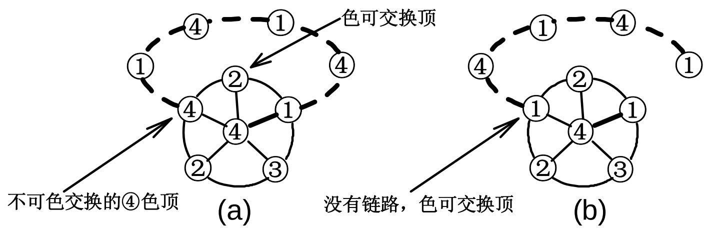

图2 使用色交换技术解决着色冲突
Fig.1 Solve the color conflict by using the color exchange method

2 3圈内外都有顶的构形是可约的

由于T图可以看作为球面上的拓扑图，内外只是相对而言的。先假设T图内含有内外都有顶的3圈，这时可以把T图绘成两张图，如图3（a）和（b）所示（3圈外用虚线加空心顶的图表示没有画出的任意结构的顶点和边的组合），其中图3（a）为去掉圈的内部顶和边的图，而图3（b）是去掉圈的外部顶和边，然后把内部顶和边按相同的结构绘制到圈外的图。这样两个图由于顶数都比T图少，所以都为四色图。

当图3（b）圈上3个顶的颜色和图3（a）圈上的对应3个位置上顶的颜色不一致时，总是可以通过颜色交换技术取得一致。方法为：先把（b）图中有的④色顶而在（a）图中没有的④色顶，通过色交换使得（a），（b）图中都有只①，②和③三种顶色，然后通过对圈上的顶色两两相互进行颜色交换使得两个图对应位置上的顶色一致。这时图3（b）的外部绘到内部，两个图对应位置上的颜色一致，所以可以合并为一个T图，并且没有着色冲突。因此3圈内外都有顶的图为四色图，而这和T图为非四色图矛盾，所以T图中没有这样的构形，或称3圈内外有顶的构形是可约的。

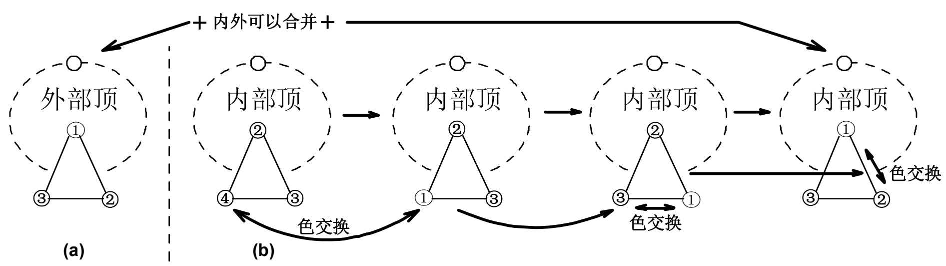

图3 3圈内外有顶的构形是可约的
Fig.3 3-cycle with vertex both inside and outside is reducible

结论：两个3圈对应位置顶的颜色可以取得一致，3圈内外有顶的构形是可约的，或称T图中没有3圈内外有顶的构形。

3 4圈内外有顶的构形是可约的

假设T图内含有内外都有顶的4圈。使用同样的方法，把4圈内外有顶的图绘成两张图，如图4所示，其中图4[（a）（1）]为去掉圈的内部顶和边，形成的4圈内无顶的三角剖分图（外部），而图4[（b）(1)]是去掉圈的外部顶和边，然后把内部顶和边按相同的结

构绘制到圈外，形成的圈内无顶的三角剖分图（外部）。这样两个图由于顶数都比 T 图少，所以都为四色图。

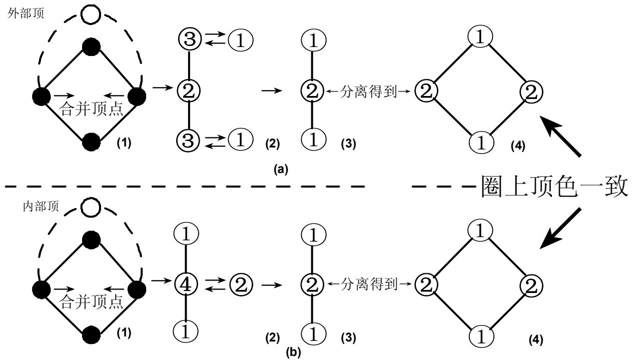

图 4 图（a）和（b）的 4 圈上的顶色可以取得一致的情况 1
Fig.4 The colors can be corresponded with each other on the 4-cycle of fig.4 (a) and (b) in case one

接下来，第一步，把图 4 的[（a）（1）]和[（b）（1）]的 4 圈中间的两个顶点合并，得到两个 4 色图，如图[（a）（2）]和[（b）（2）]所示。如果 4 圈上只有两种顶色，那么一定可以如图 4[（a）（2）]到[（a）（4）]的 1 步骤，和[（b）（2）]到[（b）（4）]的步骤那样，既通过颜色交换使得（a）图和（b）图的 4 圈上的颜色取得一致。

同样如果合并以后 4 圈上都有三种顶色的情况，也可以如图 5 所示，通过颜色交换使得（a）图和（b）图的 4 圈上的颜色取得一致。

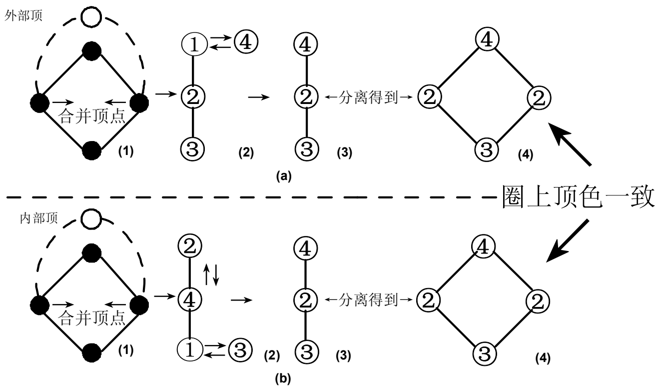

图 5 图（a）和（b）的 4 圈上的顶色可以取得一致的情况 2
Fig.5 The colors can be corresponded with each other on the 4-cycle of fig.4 (a) and (b) in case two

但是，如果如图 6（a）和（b），合并以后图 6[(a)(2)]的 4 圈上有三种顶色，图 6[(b)(2)]的 4 圈上有两种顶色的情况。这时图 6[(a)(2)]和图 6[(b)(2)]的上下顶点都必须存在颜色链路（否则就可以通过颜色交换得到图 4 或图 5 的情况）。

当存在颜色链路时，图 6[（b）（2）]中间的②色顶分离以后得到图 6[（b）（3）]。这时由于图 6[（b）（3）]存在上下顶的①色和③色的颜色链路，所以图 6[（b）（3）]中间的②色顶就是“色可交换顶”；这时可以把图 6[(a)(3)]的上下顶合并后再分离，得到一个 4 色图，既图 6[(a)(4)]。如果图 6[(a)(4)]和图 6[(a)(3)]对应位置的顶色不一致，那么可以如图 6[（b）（3）]到图[（b）（4）]的步骤通过颜色交换达到内外两图圈上的顶色一致的结果。

接下来内外两图合并就是四色 T 图。这也和 T 图为非四色图矛盾，所以 T 图中没有这样的构形，或称 4 圈内外有顶的构形是可约的。

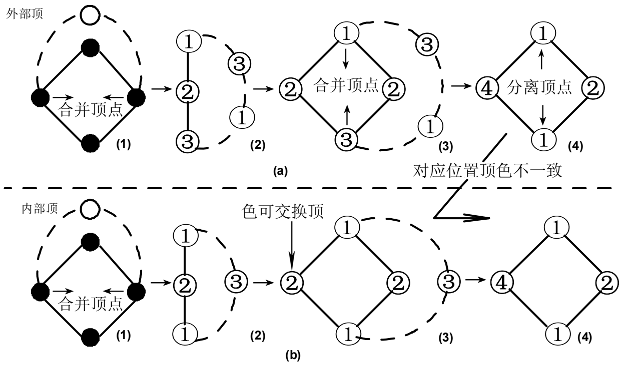

图 6 图（a）和（b）的 4 圈上的顶色可以取得一致的情况 3

Fig.6 The colors can be corresponded with each other on the 4-cycle of fig.4 (a) and (b) in case three

结论：两个 4 圈对应位置顶的颜色可以取得一致，4 圈内外有顶的构形是可约的，或称T图中没有 4 圈内外有顶的构形。

4 无效的否定

T 图中 5 圈内有一顶的构型是不可避免的。由于 5 圈上的顶色可能存在交错关联的情况，而且某个“色可交换顶”的颜色交换会使其它两个顶由原来不关联成为关联。典型的例证就是 Heawood 所给出的不可以通过颜色交换使 5 圈内有一顶的构型成为可约构型的平面三角剖分图[3],[4],[5]。如图 7 所示（其中对原图的顶色重新进行了颜色编号）：

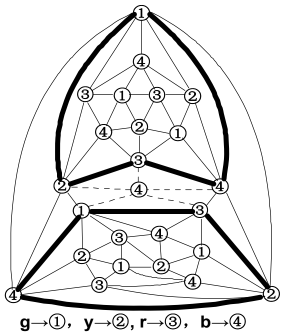

图 7 Heawood 给出的不可以通过色交换解决着色冲突的反例

Fig.7 The counterexample given by Heawood

一般在数学证明中只要给出一个反例，就足以否定证明的成立。但是仔细观察图 7 可以看到粗线画出的是两个内外有顶的 4 圈，按照前面已经得到的结论，它们是可约的，在T图中不存在这样的构形。也就证明 Heawood 所给出的反例是无效的。把图 7 重新画在图 8 中，如图 8（a）所示，按照前面的方法把 4 圈上的两个色关联顶（由内部顶和边关联）用一条边替代就得到图 8（b）。对于图 8（b），它也是不能通过简单的色交换来解决着色冲突的图。把图 8（b）改画成图 8（c）（只改变了线条的粗细），由图 8（c）可以看出图 8（b）还存在可约构形，而图 8（c）上下的 4 圈内只有一个顶[图 8（c）右下角②色顶为大的 4 圈外的一个顶]。观察图 8（c）就比较明显地看出，这种不能用色交换技术解决着色冲突的构形主要由内外有顶的 4 圈形成，这是最小的能够组成交错关联的圈，如果用更大圈去形成，也就有更多的顶色交换去破坏它们的关联，所以这样的反例不一定存在，当然还需要进一步证明。

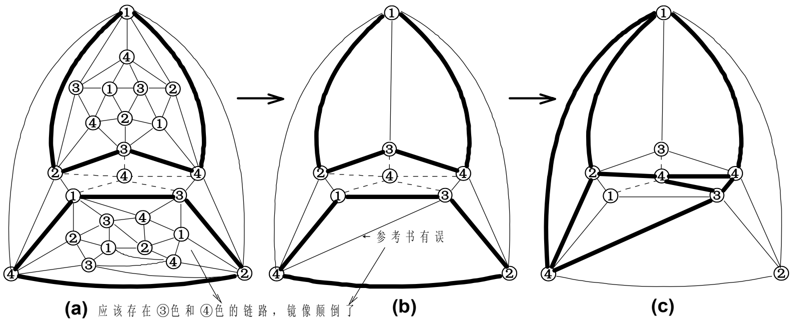

图 8 不可通过颜色交换解决颜色冲突图的简化
Fig.8 Simplifying the graph with color conflict

结论：尽管在数学证明中只要给出一个反例，就足以否定证明的成立。但是，它必须是有效的，Heawood 所给出的反例是作为T 图中的 5 圈中有一顶，并且不能通过色交换而成为可约构形提出的。可是T 图中不存在 Heawood 反例图中的 4 圈内外有顶这样的构形，所以是无效的。接下来需要寻找没有已知可约构形的，同时不能通过色交换技术解决着色冲突的反例图。这样的反例图是否存在还需要进一步的深入研究和证明，所以应该说当年 Kemple 的证明正确与否悬而未决，而 Heawood 给出的反例可以肯定是一个错误。

[参考文献] (References)

[1] 王树禾, 图论[M].北京：科学出版社，2004.1：96~98
[2] 孙惠泉, 图论极其应用[M].北京：科学出版社，2004.9: 132~133
[3] 徐俊明, 图论极其应用[M].合肥：中国科学技术大学出版社，2004.8: 230
[4] Gary Chartrand, Ping Zhang[M]. 范增益，汪毅 等 译.北京：人民邮电出版社，2007.9:256
[5] Wilson R. Four Colors Suffice: How the Map Problem was solved. Princeton University Press, Princeton, NJ (2002)
[6] AlainDoyon, G.Hahn, Ander Raspaud, Some bounds on the injective chromatic number of garphs, Discrete Math.2009,1-6.