拓扑空间的局部紧性.

定义：拓扑空间 X 称为局部紧的，如果 $\forall x\in X$，存在 x 的一个紧邻域，即 $\forall x\in X$，存在 $U\subseteq K\subseteq X$，使得 $x\in U$，且 U 为 X 中开集，K 为 X 中紧集.

命题1：设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间，则 $\forall x\in X$，存在 x 的开邻域 U，使得 $\overline{U}$ 为紧集.

证：由局部紧的定义，$\forall x\in X$，存在开集 U 和紧集 K，使得 $x\in U\subseteq K$. 由于 X 为 Hausdorff 空间，从而 K 为闭集，故 $\overline{U}\subseteq K$. 从而由 K 紧知 $\overline{U}$ 紧. #

~~命題~~

注1：我们采用的定义为课本上的定义，而命题1中的性质比课本上的定义更强，这是我在课上采用的定义. 在 Hausdorff 空间上，这两个定义等价.

命题2：设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间，$x\in X$，U 为 x 的开邻域，则存在 x 的开邻域 V 满足 $\overline{V}\subseteq U$ 且 $\overline{V}$ 为紧集.

证：由命题1，我们可以适当将 U 缩小使得 $\overline{U}$ 紧，从而不妨设 $\overline{U}$ 为紧集，从而闭集 $\partial U=\overline{U}\setminus U$ 也为紧集. 由于 $x\notin\partial U$，且 X 为 Hausdorff 空间，知 $\forall y\in\partial U$，存在 y 的开邻域 U_y 和 x 的开邻域 $V_y\subseteq U$ 使得 $U_y\cap V_y=\emptyset$. 由于 ∂U 紧，且 $\partial U\subseteq\bigcup_{y\in\partial U}U_y$ 为 ∂U 的一个开覆盖，从而存在有限个 $y_1,\cdots,y_n\in\partial U$，使得 $\partial U\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}$.

令 $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{y_i}$，则易验证 $\overline{V}\subseteq U$，且 $x\in V$. 由于 $\overline{V}\subseteq\overline{U}$ …，从而 $\overline{V}$ 紧

定义：拓扑空间 X 称为局部紧的，如果 $\forall x\in X$，存在 x 的一个紧邻域，即 $\forall x\in X$，存在 $U\subseteq K\subseteq X$，使得 $x\in U$，且 U 为 X 中开集，K 为 X 中紧集.

命题1：设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间，则 $\forall x\in X$，存在 x 的开邻域 U，使得 $\overline{U}$ 为紧集.

证：由局部紧的定义，$\forall x\in X$，存在开集 U 和紧集 K，使得 $x\in U\subseteq K$. 由于 X 为 Hausdorff 空间，从而 K 为闭集，故 $\overline{U}\subseteq K$. 从而由 K 紧知 $\overline{U}$ 紧. #

~~命题~~
注1：我们采用的定义为课本上的定义，而命题1中的性质
比课本上的定义更强，这是我在课上采用的定义.
在 Hausdorff 空间上，这两个定义等价.

命题2：设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间，$x\in X$，U 为 x 的开邻域，则存在 x 的开邻域 V 满足 $\overline{V}\subseteq U$ 且 $\overline{V}$ 为紧集.

证：由命题1，我们可以适当将 U 缩小使得 $\overline{U}$ 紧，
从而不妨设 $\overline{U}$ 为紧集. 从而闭集 $\partial U=\overline{U}\setminus U$ 也
为紧集. 由于 $x\notin \partial U$，且 X 为 Hausdorff 空间，知
$\forall y\in\partial U$，存在 y 的开邻域 U_y 和 x 的开邻域 $V_y\subseteq U$
使得 $U_y\cap V_y=\emptyset$. 由于 ∂U 紧，且 $\partial U\subseteq \bigcup\limits_{y\in\partial U} U_y$ 为
∂U 的一个开覆盖，从而存在有限个
$y_1,\cdots,y_n\in\partial U$，使得 $\partial U\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$.
令 $V=\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$，则易验证 $\overline{V}\subseteq U$，且 $x\in V$. 由于 $\overline{V}\subseteq\overline{U}$
且 $\overline{U}$ 紧，从而 $\overline{V}$ 紧. #

拓扑空间的仿紧性（paracompact）.

定义（和课本上定义一样）：拓扑空间 X 称为仿紧空间，如果 X 的任一开覆盖存在局部有限的开加细.

局部有限的条件很多时候是为了保证取闭包和取并可交换. 如下面的性质所述：

命题3：设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一族局部有限子集族（并不要求 X 仿紧，U_α 也不一定是开集），即 $\forall x\in X$，存在 x 的开邻域 U_x，使得集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中只有有限个集合与 U_x 的交非空. 则有：

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}.$$

证：记 $Y=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$，我们要证 $\overline{Y}=\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$.

显然 $\overline{Y}\supseteq\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$. 从而只需证 $\overline{Y}\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$.

也只需证 $\forall x\in X$，若 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$，则 $x\notin\overline{Y}$.

下面设 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$，往证 $x\notin\overline{Y}$.

由 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的局部有限性，存在 x 的开邻域 U_x 使得 I 中有有限个指标 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ 满足 $\forall\alpha\in I\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$，$U_\alpha\cap U_x=\phi$.

由于 $\forall i=1,\dots,n$，$x\notin\overline{U_{\alpha_i}}$. 从而存在 x 的开邻域 V_i，使得 $V_i\cap U_{\alpha_i}=\phi$. 这样，令 $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i\cap U_x$，则 V 为 x 的开邻域，且 $\forall\alpha\in I$，$V\cap U_\alpha=\phi$. 从而 $V\cap Y=\phi$. 从而 $x\notin\overline{Y}$. 证毕！ #

定义(和课本上定义一样)：拓扑空间 X 称为仿紧空间，如果 X 的任一开覆盖存在局部有限的开加细。

局部有限的条件很多时候是为了保证取闭包和取并可交换，如下面的性质所述：

命题3：设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一族局部有限子集族(并不要求 X 仿紧，U_α 也不一定是开集)，即 $\forall x\in X$，存在 x 的开邻域 U_x，使得集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中只有有限个集合与 U_x 的交非空。则有：

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}.$$

证：记 $Y=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$，我们要证 $\overline{Y}=\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$。

显然 $\overline{Y}\supseteq\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$。从而只需证 $\overline{Y}\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$。

也只需证 $\forall x\in X$，若 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$，则 $x\notin\overline{Y}$。

下面设 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}\overline{U_\alpha}$，往证 $x\notin\overline{Y}$。

由 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的局部有限性，存在 x 的开邻域 U_x 使得 I 中有有限个指标 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ 满足 $\forall\alpha\in I\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$，$U_\alpha\cap U_x=\phi$。

由于 $\forall i=1,\dots,n$，$x\notin\overline{U_{\alpha_i}}$，从而存在 x 的开邻域 V_i，使得 $V_i\cap U_{\alpha_i}=\phi$。这样，令 $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i\cap U_x$，则 V 为 x 的开邻域，且 $\forall\alpha\in I$，$V\cap U_\alpha=\phi$。从而 $V\cap Y=\phi$，从而 $x\notin\overline{Y}$。证毕！ #

命题4：设 X 是仿紧的 Hausdorff 空间，$x\in X$，U 为 x 的一个开邻域，则存在 x 的开邻域 V，使得 $\overline{V}\subseteq U$。

证：由于 X 为 Hausdorff 空间，$\forall y\in U^c$，存在 y 的开邻域 U_y 和 x 的开邻域 V_y，使得 $U_y\cap V_y=\phi$。

这样 ~~X= U~~ $X=\bigcup_{y\in U^c}U_y\cup U$ 为 X 的一个开覆盖，从而存在一个局部有限开加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$。

由局部有限性，存在 x 的开邻域 W 使得 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中只有有限个（设为 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_n}$）与 W 相交非空。

通过取 $W\cap U$ 我们不妨设 $W\subseteq U$。

由于 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的开覆盖 ~~U_y~~ $\{U, U_y \mid y\in U^c\}$ 的开加细，从而 $\forall i=1,\cdots,n$，U_{α_i} 或者包含于某个 U_{y_i}（$y_i\in U^c$）中，或者 $U_{\alpha_i}\subseteq U$。不妨设 $\forall i=1,\cdots,m$，$U_{\alpha_i}\subseteq U_{y_i}$，$y_i\in U^c$，而对 $i=m+1,\cdots,n$，有 ~~U_{y_i}~~ $U_{\alpha_i}\subseteq U$，则令 $V=$ ~~$W\cap V_{y_i}$~~ $\bigcap_{i=1}^{m}V_{y_i}\cap W$，

则 V 为 x 的开邻域，且 $\overline{V}\subseteq U$，因为 $\forall y\in U^c$，由于 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的开覆盖，必有某个 U_α 包含了 y。若该 $\alpha\notin\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，则 $U_\alpha\cap W=\phi$，从而 $U_\alpha\cap V=\phi$。

若 $\alpha\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，则不妨设 $\alpha=\alpha_1$，则 $U_{\alpha_1}\subseteq U_{y_1}$，从而由 $U_{y_1}\cap V_{y_1}=\phi$ 知 $U_{\alpha_1}\cap V=\phi$。

若 $\alpha\in\{\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\}$，不妨设 $\alpha=\alpha_{m+1}$，由于 $U_{\alpha_{m+1}}\subseteq U$，而 $y\in U^c$ 矛盾，从而不会发生 $\alpha\in\{\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\}$

命题 ……

一个开邻域，则存在 x 的开邻域 V，使得

$\overline{V} \subseteq U$.

证：由于 X 为 Hausdorff 空间，$\forall y \in U^c$，存在 y 的开邻域 U_y 和 x 的开邻域 V_y，使得 $U_y \cap V_y = \phi$，

这样 ~~$X = U$~~ $X = \bigcup_{y \in U^c} U_y \cup U$ 为 X 的一个开覆盖。从而存在一个局部有限开加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$。

由局部有限性，存在 x 的开邻域 W 使得 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中只有有限个（设为 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}$）与 W 相交非空。

通过取 $W \cap U$ 我们不妨设 $W \subseteq U$。

由于 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 X 的开覆盖 ~~$\{U_y$~~ $\{U, U_y \mid y \in U^c\}$ 的开加细，从而 $\forall i = 1, \cdots, n$，U_{α_i} 或者包含于某个 U_{y_i}（$y_i \in U^c$）中，或者 $U_{\alpha_i} \subseteq U$。不妨设 $\forall i = 1, \cdots, m$，$U_{\alpha_i} \subseteq U_{y_i}$，$y_i \in U^c$，而对 $i = m+1, \cdots, n$，有 $U_{\alpha_i} \subseteq U$，则令 $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i} \cap W$，

则 V 为 x 的开邻域，且 $\overline{V} \subseteq U$，因为 $\forall y \in U^c$，由于 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 X 的开覆盖，必有某个 U_α 包含了 y。若 $\alpha \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，则 $U_\alpha \cap W = \phi$，从而 $U_\alpha \cap V = \phi$。

若 $\alpha \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$，则不妨设 $\alpha = \alpha_1$，则 $U_{\alpha_1} \subseteq U_{y_1}$，从而由 $U_{y_1} \cap V_{y_1} = \phi$ 知 $U_{\alpha_1} \cap V = \phi$。

若 $\alpha \in \{\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\}$，不妨设 $\alpha = \alpha_{m+1}$，由于 $U_{\alpha_{m+1}} \subseteq U$，而 $y \in U_\alpha = U_{\alpha_{m+1}}$ 且 $y \in U^c$，矛盾，从而不会发生 $\alpha \in \{\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\}$ 的情况。这样 $\forall y \in U^c$，均有 y 的开邻域与 V 相交为空集，故 $\overline{V} \subseteq U$。 #

命题5：设 X 是仿紧的 Hausdorff 空间，则 X 满足 T_4 公理

证：由 T_4 公理的等价命题，只需证明对任意闭集 A，若开集 $U \supseteq A$，则存在开集 V 使得 $A \subseteq V \subseteq U$，且 $\overline{V} \subseteq U$。

设给定以上的 A 和 U，由命题4，$\forall x \in A$，存在 x 的开邻域 V_x，使得 $\overline{V_x} \subseteq U$。

考察 X 的开覆盖 $X = \bigcup_{x \in A} V_x \cup A^c$。

则由仿紧性知存在以上开覆盖的一个局部有限开加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$。

设 $J = \{\alpha \in I \mid U_\alpha \cap A \neq \phi\}$，则 $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$，且~~由~~不难看出，$\forall \alpha \in J$，$\exists x \in X$，使得 $U_\alpha \subseteq V_x$，从而 $\overline{U_\alpha} \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$。

这样令 $V = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$，则 $A \subseteq V \subseteq U$，且由命题3，$\overline{V} = \overline{\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{U_\alpha} \subseteq U$。证毕！ #

命题6：设 X 是仿紧的 Hausdorff 空间，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的开覆盖，则 $\forall \alpha\in I$，存在开集 V_α，满足 $\overline{V_\alpha}\subseteq U_\alpha$，且 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 也为 X 的开覆盖。

证：$\forall \alpha\in I$，考虑集族 $\mathcal{B}_\alpha=\{V\subseteq X \text{ 为开集} \mid \overline{V}\subseteq U_\alpha\}$。

由命题4，知 $U_\alpha=\bigcup\limits_{V\in\mathcal{B}_\alpha} V$。

从而 X 有开覆盖 $X=\bigcup\limits_{\substack{V\in\mathcal{B}_\alpha,\\ \alpha\in I}} V$，即

开集族 $\{V \mid \exists\alpha\in I, \text{使得 } V\in\mathcal{B}_\alpha\}$ 为 X 的一个开覆盖。由于 X 仿紧，这个开覆盖有一个局部有限开加细 $\{W_\beta\}_{\beta\in J}$。

$\forall\alpha\in I$，考虑集族 $\mathscr{C}_\alpha=\{W_\beta \mid \beta\in J, \text{且 } \overline{W_\beta}\subseteq U_\alpha\}$，

并令 $V_\alpha=\bigcup\limits_{W_\beta\in\mathscr{C}_\alpha} W_\beta$，则由命题3知

$\overline{V_\alpha}=\bigcup\limits_{W_\beta\in\mathscr{C}_\alpha}\overline{W_\beta}\subseteq U_\alpha$。下面只需证 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的开覆盖。

这是因为 $\{W_\beta\}_{\beta\in J}$ 为 X 的开覆盖，从而 $\forall x\in X$，存在 $\beta_x\in J$，使得 $x\in W_{\beta_x}$。而由 $\{W_\beta\}_{\beta\in J}$ 为开覆盖 $\{V \mid \exists\alpha\in I, \text{使得 } V\in\mathcal{B}_\alpha\}$ 的加细，知存在 $\alpha_x\in I$，使得 $W_{\beta_x}\subseteq V\in\mathcal{B}_{\alpha_x}$，从而 $\overline{V}\subseteq U_{\alpha_x}$。这样 $\overline{W_{\beta_x}}\subseteq\overline{V}\subseteq U_{\alpha_x}$，从而 $W_{\beta_x}\in\mathscr{C}_{\alpha_x}$，进而 $x\in W_{\beta_x}\subseteq V_{\alpha_x}$。这样证明了 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 确为 X 的开覆盖。

#

命题7：紧空间是仿紧的.

证：由定义显然成立.

下面的命题说明，即使一个空间非紧，但若有可数多个紧集穷竭这个空间，则它也是仿紧的.

命题8：设 X 为 Hausdorff 拓扑空间，$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$ 为 X 的一族紧子集，满足 $X=\bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$，且 $\forall i\geq 1$，$K_i \subseteq \mathring{K}_{i+1}$，其中 $\mathring{K}_{i+1}$ 代表 K_{i+1} 的内点集，即包含于 K_{i+1} 的最大开集.

则 X 为仿紧空间.

证：为叙述方便，令 $K_0=\emptyset$，$K_{-1}=\emptyset$. ~~令 $U_i=\mathring{K}_i$，$\forall i\geq 1$~~

注意到因为 X 是 Hausdorff 空间，从而每个 K_i 均为闭集，

~~并且 $U_i \subseteq K_i$ 也为紧集~~.

$\forall i\geq 1$，令 $W_i = K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$，则 W_i 为紧集，且 $X=\bigcup_{i=1}^{+\infty} W_i$.

并且 $\forall i\geq 1$，$W_i \subseteq \mathring{K}_{i+1} \cap K_{i-2}^c$，其中 K_{i-2}^c 为 K_{i-2} 的补集.

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一个开覆盖，我们要证明存在 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的一个局部有限开加细. 为此，$\forall i\geq 1$，$\forall x\in W_i$，由 $W_i \subseteq \mathring{K}_{i+1}\cap K_{i-2}^c$，知存在 x 的开邻域 V_x，使得 V_x 包含于某个 U_α ($\alpha\in I$)，且 $V_x \subseteq \mathring{K}_{i+1}\cap K_{i-2}^c$.

从而 $W_i \subseteq \bigcup_{x\in W_i} V_x$ 为 W_i 的开覆盖，由 W_i 紧，知存在有限个点 $x_{i_k}\in W_i$，$k=1,2,\cdots,N_i$，使得

$$W_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_i} V_{x_{i_k}}.$$

这样，我们得到 X 的开覆盖 $\{V_{x_{i_k}} \mid i\geq 1, 1\leq k\leq N_i\}$.

由定义知这是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的一个加细. 又由于 $\forall i\geq 1$，$\forall j\geq i+2$，$\forall k=1,\cdots,N_j$，有 $V_{x_{j_k}}\cap \mathring{K}_i=\emptyset$，不难看出开覆盖 $\{V_{x_{i_k}} \mid i\geq 1, 1\leq k\leq N_i\}$ 是局部有限的. #

注：该命题中的Hausdorff条件只用来保证每个 K_i 为闭集.

下面的命题是一个常用的判别仿紧性的条件.

命题9：设 X 是 Hausdorff, 局部紧致的 C_2 拓扑空间. 则 X 是仿紧的.

证：设 $\mathcal{B}=\{U_1, U_2, \cdots\}$ 为 X 的一个可数拓扑基，由命题2，知 $\mathcal{B}'=\{V\in\mathcal{B} \mid \overline{V} \text{为紧集}\}$ 也为 X 的可数拓扑基. 记 $\mathcal{B}'=\{V_1, V_2, \cdots\}$. 下面只需构造 X 的一族紧子集 $K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots$ 满足 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}K_i$ 且 $K_i\subseteq K_{i+1}^{\circ}$, $\forall i\geq 1$. 则利用命题8即知 X 仿紧.

为此，令 $K_1=\overline{V_1}$，由于 $\mathcal{B}'$ 为拓扑基且 K_1 紧，存在有限个 $\mathcal{B}'$ 中元素 $V_{1_1}, V_{1_2}, \cdots, V_{1_{N_1}}$ 覆盖住 K_1.

令 $K_2=\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{N_1}V_{1_k}\cup V_2}=\bigcup\limits_{k=1}^{N_1}\overline{V_{1_k}}\cup\overline{V_2}$. 则 K_2 紧. 且 $K_1\subseteq K_2^{\circ}$，归纳地，假设 K_i 已经构造好. 由 K_i 紧和 $\mathcal{B}'$ 为拓扑基知存在有限个 $\mathcal{B}'$ 中元素 V_{i_k}, $k=1,2,\cdots,N_i$, 使得 $K_i\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{N_i}V_{i_k}$.

令 $K_{i+1}=\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{N_i}V_{i_k}\cup V_{i+1}}=\bigcup\limits_{k=1}^{N_i}\overline{V_{i_k}}\cup\overline{V_{i+1}}$. 则 K_{i+1} 紧且 $K_i\subseteq K_{i+1}^{\circ}$.

由于 $\forall i\geq 1$, $V_i\subseteq K_i$，且 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}V_i$，从而 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}K_i$. 由命题8，知 X 仿紧. #

注：Hausdorff条件只用在了保证 $\mathcal{B}'$ 为拓扑基. 容易看到如果将局部紧致定义为命题1中的性质，则上面命题中的Hausdorff条件可以去掉.