

纤维丛的同伦提升性质

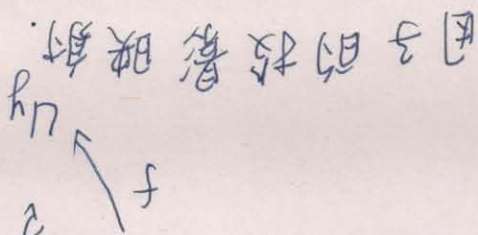
~~定义: 设  $F$  为拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  为映射. 称  $\pi$  为以~~  
~~间之间的连续映射. 称  $\pi$  为以~~

定义: 设  $F$  为拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  为拓扑空间之间的连续映射. 称  $f$  为  $Y$  上以  $F$  为典型纤维的纤维丛.

如果  $Y$  是局部道路连通空间, 以及  $A, y \in Y$ . 存在  $y$  的开邻域  $U_y \ni y$ , 满足:

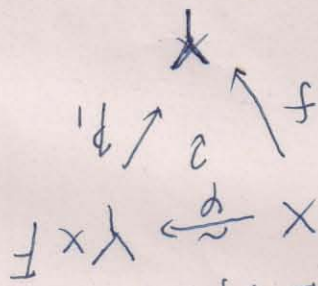
存在同胚  $\varphi: f^{-1}(U_y) \xrightarrow{\sim} U_y \times F$ , 使得以下图表

交换:  $f^{-1}(U_y) \xrightarrow{\varphi} U_y \times F$  其中  $p_i$  为到第一个



因子的投影映射.

定义: 设  $f: X \rightarrow Y$  为  $Y$  上以  $F$  为典型纤维的纤维丛. 若存在同胚  $\varphi: X \xrightarrow{\sim} Y \times F$ , 使得下面图表交换



则称  $f$  为平凡纤维丛

例:

设  $f: X \rightarrow Y$  为覆盖映射. 任取  $y_0 \in Y$ . 令  $F = f^{-1}(y_0)$ , 则  $F$  作为  $X$  的子空间是离散拓扑空间且  $f$  是  $Y$  上以  $F$  为典型纤维的纤维丛.

反之, 若一个纤维丛  $f: X \rightarrow Y$  的典型纤维  $F$  是离散拓扑空间, 且  $X, Y$  道路连通, 则  $f$  为覆盖映射.

(2)

连续映射  $H: D \rightarrow X$ , 使得  $f \circ H = H$ , 且  $H|_A = G$ .  
得  $f \circ G = H|_A$  (即  $G$  为  $H|_A$  的一个提升), 则存在  
给定连续映射  $H: D \rightarrow Y$ , 以及  $G: A \rightarrow X$ , 使  
记  $D = I^n \times [0, 1]$ ,  $A = I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times [0, 1]$ .

定理 3 (同伦提升的粗糙形式):  
设  $f: X \rightarrow Y$  为以  $F$  为典型纤维的纤维丛.

证: 设  $r: X \rightarrow A$  为收缩映射 (即  $r|_A = \text{id}_A$ ).  
令  $G = g \circ r: X \rightarrow F$ , 则  $G|_A = g$ . #

性质 2: 设  $A$  为  $X$  的收缩核. 则存在连续映射  $G: X \rightarrow F$ , s.t.  
证明: 见课本 p126 页例 5. #

性质 1: 设  $I^n = [0, 1]^n$ , 则不难验证  $I^n \simeq D^n$ , 其中  $D^n$   
为  $\mathbb{R}^n$  中的闭单位圆盘, 并且  $I^n$  为一个带边界  
的拓扑流形. 记其边界为  $\partial I^n$ , 则  $\partial I^n \simeq \partial D^n \simeq S^{n-1}$ .  
设  $X = I^n \times [0, 1]$ ,  $A = I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times [0, 1]$ .

定义: 设  $A \subseteq X$  为子空间.  $i: A \hookrightarrow X$  为包含映射. 称  
 $A$  为  $X$  的收缩核, 如果存在连续映射  $r: X \rightarrow A$   
使得  $r \circ i = \text{id}_A$  为  $A$  上的恒等映射.

证明(最好取  $n=1$  先理解清楚):

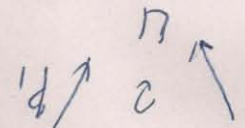
由于  $f$  为纤维丛, 以及  $D$  为紧空间, 由 Lebesgue 数引理知存在  $[0, 1]$  的等分  $a_0=0 < a_1 < \dots < a_m=1$  使得  $D = I_0 \cup \dots \cup I_m$  中 ~~由~~  $[0, 1]$  的等分诱导

的任一“小方块”  ~~$[a_{i-1}, a_i] \times [a_{i-1}, a_i] \times \dots \times [a_{i-1}, a_i]$~~

$$I_{(c_1, \dots, c_{n+1})} = [a_{c_1}, a_{c_1+1}] \times \dots \times [a_{c_{n+1}}, a_{c_{n+1}+1}]$$

均满足  $H(I_{(c_1, \dots, c_{n+1})})$  包含于  $Y$  中的一个开集  $U$ , 且存在同胚  $\varphi: f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$

并且同胚  $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$  交换



设  $[0, 1]$  的  $m$  等分诱导的  $D = [0, 1]^{n+1}$  的等分为  $D = \bigcup_{i=1}^k I_i$ . 利用对  $i$  的归纳, 我们证明  $H$

在子空间  $A$  上的提升  $G$  可以打乱为  $H$  的提升  $\tilde{H}$ . (注意  $I_i$  的选择使得  $I_1, \dots, I_k$  按特定的顺序排出)

对  $I_1$ , 记  $A_1 = I_1 \cap A$ . 不难验证  $A_1$  为  $I_1$  的收缩核. 设  $H(I_1) \subseteq U_1$ , 其中  $U_1$  为开集且

存在同胚  $\varphi_1: f^{-1}(U_1) \xrightarrow{\sim} U_1 \times F$  使得同胚  $f^{-1}(U_1) \xrightarrow{\sim} U_1 \times F$  交换

~~$$f^{-1}(U_1) \xrightarrow{\sim} U_1 \times F \xrightarrow{f} U_1 \xrightarrow{H_1} I_1 \xrightarrow{f} f(I_1)$$~~

记  $g_1 = p_2 \circ \varphi_1 \circ G|_{A_1}: A_1 \rightarrow F$ . 其中  $p_2$  为  $U_1 \times F$  到  $F$  的投影. 则由性质 2,  $g_1$  可打乱为  $G_1: I_1 \rightarrow F$ .

定义映射  $\tilde{H}_1: I_1 \rightarrow U_1 \times F$

$$\tilde{H}_1(x) \mapsto (H(x), G_1(x))$$

以及映射  $\tilde{H}_1 = \varphi_1^{-1} \circ \tilde{H}'_1: I_1 \rightarrow f^{-1}(U_1)$

则不难验证  $f \circ \tilde{H}_1 = H|_{I_1}$  且  $\tilde{H}_1|_{A_1} = G|_{A_1}$

对于  $2 \leq i \leq k$ , 设我们已经定义了连续映射

$$\tilde{H}_{i-1}: \bigcup_{j=1}^{i-1} I_j \rightarrow X \text{ 满足 } f \circ \tilde{H}_{i-1} = H|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j}$$

$$\text{且 } \tilde{H}_{i-1}|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j \cap A} = G|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j \cap A}$$

我们将要证明存在连续映射  $\tilde{H}_i: \bigcup_{j=1}^i I_j \rightarrow X$

$$\text{使得 } \tilde{H}_i|_{\bigcup_{j=1}^i I_j} = \tilde{H}_{i-1} \text{ 且 } f \circ \tilde{H}_i = H|_{\bigcup_{j=1}^i I_j}$$

$$\tilde{H}_i|_{\bigcup_{j=1}^i I_j \cap A} = G|_{\bigcup_{j=1}^i I_j \cap A}$$

为此, 记  $A_i = (\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j) \cap I_i \cup (A \cap I_i)$ . 可以

验证  $A_i$  为  $I_i$  的收缩核, 并且  $\tilde{H}_{i-1}$  和  $G$  拼

成  $A_i$  到  $X$  的一个连续映射  $G'_i$ . 设  $H(I_i) \subseteq U_i$

其中  $U_i$  为开集, 且存在同胚  $\varphi_i: f^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times F$

使得因式  $f^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times F$  交换

$$f \downarrow U_i \\ \swarrow \varphi_i$$

(5)

$$H|_A = G$$

映射  $G: A \rightarrow X$  使得  $f \circ G = H|_A$ . 则在连续映射  $\tilde{H}: X^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow X$  使得  $f \circ \tilde{H} = H$ . 且

$X^{(n)}$  中的像 (同胚于  $X^{(n-1)}$ ). 若存在连续映射  $\tilde{H}: X^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow X$  使得  $f \circ \tilde{H} = H$ . 其中  $X^{(n-1)}$  为  $X^{(n)}$  在  $X^{(n)} \times [0, 1]$  的子空间.

记  $A = X^{(n)} \times \{0\} \cup X^{(n-1)} \times [0, 1] \rightarrow X$  为连续映射.  $H: X^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow X$  为纤维丛.  $f: X \rightarrow Y$  为纤维丛.

记  $D^n$  为  $n$  维闭单位圆盘. 设  $X^{(n-1)}$  为拓扑空间.  $g: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X^{(n-1)}$  为连续映射. (记号的意义见 87 页习题 13)

推论 4:

$$\tilde{H} = H_k$$

由归纳法可知最后我们找到了所要的映射. 满足所要性质.

粘合出了一个连续映射  $\tilde{H}_i: \bigcup_{j=1}^i I_j \rightarrow X$

~~映射~~ 不难由粘合引理验证  $\tilde{H}_i$  和  $\varphi_i^{-1} \circ \tilde{H}_i$

$$x \mapsto (H(x), G_i(x))$$

定义映射  $\tilde{H}_i: I_i \rightarrow U_i \times F$

记  $g_i = \rho_2 \circ \varphi_i \circ G_i: A_i \rightarrow F$ . 其中  $\rho_2$  为  $U_i \times F$  到  $F$  的投影. 由性质 2,  $g_i$  可扩充为  $G_i: I_i \rightarrow F$ .

⑥

证：只需注意到  $D^n \approx [0, 1]^n$  以及  $aD^n \approx a[0, 1]^n$  再利<sup>用法</sup>用定理 3 即可。

注意到  $\overline{D^n} \times [0, 1] \cup A = X^{(n)} \times [0, 1]$ ，其中  $\overline{D^n}$  为  $D^n$  在  $X^{(n)}$  中的像。

#

定理 5 (纤维丛的同伦提升性质)：  
 设  $Z$  为有限 CW 复形 (即有限胞腔复形)  
 设  $f: X \rightarrow Y$  为纤维丛，给定连续映射

使得  $f \circ G = H|_{Z \times \{0\}}$ ，以及  $G: Z \times \{0\} \rightarrow X$   
 $H: Z \times [0, 1] \rightarrow Y$ ，  
 则存在连续映射  $\tilde{H}: Z \times [0, 1] \rightarrow X$ ，使得  $f \circ \tilde{H} = H$ ，且  $\tilde{H}|_{Z \times \{0\}} = G$ 。

证：设  $Z = Z^{(n)} \supseteq Z^{(n-1)} \supseteq \dots \supseteq Z^{(1)} \supseteq Z^{(0)}$  为  $Z$  的各维骨架，其中  $Z^{(i)}$  为  $Z^{(i-1)}$  上贴了有限个  $i$  维胞腔 (即  $i$  维圆盘) 从  $Z^{(0)}$  (有限个点) 开始，不断应用推论 4 即可。

#