纤维丛的同伦提升性质.

定义: ~~设F为拓扑空间. f: X→Y为~~ ~~π: X→Y为拓扑空~~
间~~之间的连续映射. 称π为以~~

定义: 设F为拓扑空间. $f: X\to Y$为拓扑空间之间的连续映射. 称f为Y上以F为典型纤维的纤维丛,
如果Y是局部道路连通空间. 以及$\forall y\in Y$, 满足:
存在y的开邻域$U_y\subseteq Y$,
存在同胚$\varphi: f^{-1}(U_y)\xrightarrow{\sim} U_y\times F$, 使得以下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U_y) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "f"'] & U_y\times F \arrow[d, "p_1"] \\
& U_y
\end{tikzcd}$$

其中p_1为到第一个因子的投影映射.

定义: 设$f: X\to Y$为Y上以F为典型纤维的纤维丛,
若存在同胚$\varphi: X\xrightarrow{\sim} Y\times F$, 使得下面图表交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "f"'] & Y\times F \arrow[d, "p_1"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

则称f为平凡纤维丛.

例: 设$f: X\to Y$为覆盖映射. 任取$y_0\in Y$. 令
$F=f^{-1}(y_0)$, 则F作为X的子空间是离散拓扑空间
且f是Y上以F为典型纤维的纤维丛.

反之, 若一个纤维丛$f: X\to Y$的典型纤维F是离散拓扑空间, 且X, Y道路连通 则f为覆盖映射.

定义：设 $A\subseteq X$ 为子空间. $i: A\hookrightarrow X$ 为包含映射. 称 A 为 X 的收缩核, 如果存在连续映射 $r: X\to A$ 使得 $r\circ i = id_A$ 为 A 上的恒等映射.

性质1：设 $I^n=[0,1]^n$, 则不难验证 $I^n\simeq D^n$, 其中 D^n 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位圆盘. 并且 I^n 为一个带边界的拓扑流形. 记其边界为 ∂I^n. 则 $\partial I^n\simeq\partial D^n\simeq S^{n-1}$.
设 $X= I^n\times[0,1]$. $A= I^n\times\{0\}\cup\partial I^n\times[0,1]$. 则 A 为 X 的收缩核.

证明：见课本 $p126$ 页 例5. #

性质2：设 A 为 X 的收缩核. $g: A\to F$ 为连续映射. 则存在连续映射 $G: X\to F$, s.t. $G|_A=g$.

证：设 $r: X\to A$ 为收缩映射 (即 $r|_A = id_A$). 令 $G=g\circ r: X\to F$. 则 $G|_A=g$. #

定理3（同伦提升的粗糙形式）: 设 $f: X\to Y$ 为以 F 为典型纤维的纤维丛. 记 $D= I^n\times[0,1]$. $A= I^n\times\{0\}\cup\partial I^n\times[0,1]$. 给定连续映射 $H: D\to Y$. 以及 $G: A\to X$. 使得 $f\circ G = H|_A$ (即 G 为 $H|_A$ 的一个提升), 则存在连续映射 $\widetilde{H}: D\to X$, 使得 $f\circ\widetilde{H}=H$. 且 $\widetilde{H}|_A=G$.

证明(最好取 $n=1$ 先理解清楚):

由于 f 为纤维丛. 以及 D 为紧空间. 由 Lebsgue 数引理知存在 $[0,1]$ 的等分 $a_0=0<a_1<\cdots<a_m=1$. 使得 $D=[0,1]^{n+1}$ 中 由 $[0,1]$ 的等分诱导的任一"小方块" ~~$[a_{i_1},a_{i_1+1}]\times[a_{i_2},a_{i_2+1}]\times\cdots\times[a_{i_{n+1}},a$~~

$$I_{(i_1\cdots i_{n+1})}=[a_{i_1},a_{i_1+1}]\times\cdots\times[a_{i_{n+1}},a_{i_{n+1}+1}]$$

均满足 $H(I_{(i_1\cdots i_{n+1})})$ 包含于 Y 中的一个开集 U. 且存在同胚 $\varphi: f^{-1}(U)\xrightarrow{\simeq} U\times F$. 并且图表:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[dr] & U\times F \arrow[d, "p_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

交换.

设 $[0,1]$ 的 m 等分诱导的 $D=[0,1]^{n+1}$ 的等分为 $D=\bigcup_{i=1}^{k} I_i$. 利用对 i 的归纳. 我们证明 H 在子空间 A 上的提升 G 可以扩充为 H 的提升 $\tilde{H}$. (注意 I_i 的选择使得 $I_1,\cdots I_k$ 按特定的顺序排出)

对 I_1, 记 $A_1=I_1\cap A$. 不难验证 A_1 为 I_1 的收缩核. 设 $H(I_1)\subseteq U_1$. 其中 U_1 为开集 且存在同胚 $\varphi_1: f^{-1}(U_1)\simeq U_1\times F$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U_1) \arrow[r, "\varphi_1", "\simeq"'] \arrow[dr, "f"'] & U_1\times F \arrow[d, "p_1"] \\ & U_1 \end{tikzcd}$$

交换.

~~则定义 $\tilde{H}_1: I_1\to f^{-1}(U_1)$ 为~~

记 $g_1=p_2\circ\varphi_1\circ G|_{A_1}: A_1\to F$. 其中 p_2 为 $U_1\times F$ 到 F 的投影. 则由性质 2, g_1 可扩充为 $G_1: I_1\to F$.

定义映射 $\widetilde{H}_1' : I_1 \longrightarrow U_1 \times F$

$$x \longmapsto (H(x), G_1(x))$$

以及映射 $\widetilde{H}_1 = \varphi_1^{-1} \circ \widetilde{H}_1' : I_1 \longrightarrow f^{-1}(U_1)$.

则不难验证 $f \circ \widetilde{H}_1 = H|_{I_1}$ 且 $\widetilde{H}_1|_{A_1} = G|_{A_1}$.

对于 $2 \le i \le k$，设我们已经定义了连续映射

$$\widetilde{H}_{i-1} : \bigcup_{j=1}^{i-1} I_j \longrightarrow X. \text{ 满足 } f \circ \widetilde{H}_{i-1} = H|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j}$$

$$\text{且 } \widetilde{H}_{i-1}|_{(\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j) \cap A} = G|_{(\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j) \cap A}.$$

我们将要证明存在连续映射 $\widetilde{H}_i : \bigcup_{j=1}^{i} I_j \to X$.

使得 $\widetilde{H}_i|_{\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j} = \widetilde{H}_{i-1}$，$f \circ \widetilde{H}_i = H|_{\bigcup_{j=1}^{i} I_j}$，且

$$\widetilde{H}_i|_{(\bigcup_{j=1}^{i} I_j) \cap A} = G|_{(\bigcup_{j=1}^{i} I_j) \cap A}.$$

为此，记 $A_i = \left(\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} I_j\right) \cap I_i \right) \cup (A \cap I_i)$. 可以验证 A_i 为 I_i 的收缩核. 并且 $\widetilde{H}_{i-1}$ 和 G 拼成 A_i 到 X 的一个连续映射 G_i'. 设 $H(I_i) \subseteq U_i$. 其中 U_i 为开集，且存在同胚 $\varphi_i : f^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times F$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i", "\sim"'] \arrow[dr, "f"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

交换.

记 $g_i = p_2 \circ \varphi_i \circ G_i' : A_i \to F$. 其中 p_2 为 $U_i \times F$ 到 F 的投影. 由性质 2, g_i 可扩充为 $G_i : I_i \to F$.

定义映射 $\tilde{H}_i' : I_i \to U_i \times F$

$$x \longmapsto (H(x), G_i(x))$$

~~该映射~~ 不难由粘合引理验证 $\tilde{H}_{i-1}$ 和 $\varphi_i^{-1} \circ \tilde{H}_i'$ 粘合出了一个连续映射 $\tilde{H}_i : \bigcup_{j=1}^{i} I_j \to X$ 满足所要性质.

由归纳法可知最后我们找到了所要的映射 $\tilde{H} = \tilde{H}_k$.

#

推论4: 记 D^n 为 n 维闭单位圆盘. 设 $X^{(n-1)}$ 为拓扑空间. $g: S^{n-1} = \partial D^n \to X^{(n-1)}$ 为连续映射. $X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_g D^n$ (记号的意义见 p87 页习题 13).

设 $f: X \to Y$ 为纤维丛. $H: X^{(n)} \times [0,1] \to Y$ 为连续映射. 记 $A = X^{(n)} \times \{0\} \cup \widetilde{X^{(n-1)}} \times [0,1]$ 为 $X^{(n)} \times [0,1]$ 的子空间. 其中 $\widetilde{X^{(n-1)}}$ 为 $X^{(n-1)}$ 在 $X^{(n)}$ 中的像 (同胚于 $X^{(n-1)}$). 若存在连续映射 $G: A \to X$, 使得 $f \circ G = H|_A$, 则存在连续映射 $\tilde{H}: X^{(n)} \times [0,1] \to X$, 使得 $f \circ \tilde{H} = H$, 且 $\tilde{H}|_A = G$.

证：只需注意到 $D^n \simeq [0,1]^n$．以及 $\partial D^n \simeq \partial([0,1]^n)$

再~~利~~设法用定理3即可．

（注意到 $\overline{D^n} \times [0,1] \cup A = X^{(n)} \times [0,1]$，其中 $\overline{D^n}$ 为 D^n 在 $X^{(n)}$ 中的像）．　#

定理5（纤维丛的同伦提升性质）：

设 Z 为有限CW复形（即有限胞~~腔~~腔复形）

设 $f: X \to Y$ 为纤维丛．给定连续映射 $H: Z \times [0,1] \to Y$，以及 $G: Z \times \{0\} \to X$ 使得 $f \circ G = H|_{Z \times \{0\}}$，则存在连续映射 $\widetilde{H}: Z \times [0,1] \to X$，使得 $f \circ \widetilde{H} = H$，且 $\widetilde{H}|_{Z \times \{0\}} = G$．

证：设 $Z = Z^{(n)} \supseteq Z^{(n-1)} \supseteq \cdots \supseteq Z^{(1)} \supseteq Z^{(0)}$ 为 Z 的各维骨架．其中 $Z^{(i)}$ 为 $Z^{(i-1)}$ 上贴了有限个 i 维胞腔（即 i 维闭圆盘）．从 $Z^{(0)}$（有限个点）开始，不断应用推论4即可．　#