二维流形维数与边界点的良好定义性质.

令 $A=S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$. 定义 A 上一条以 $x_0=1\in A$ 为起点终点的闭道路

$$\gamma:\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & A\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t}\end{array}$$

, 则有

性质1: 群同态

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(A,x_0)\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ 1 & \longmapsto & [\gamma]\end{array}$$

为同构. 即 $\pi_1(A,x_0)=\mathbb{Z}\cdot[\gamma]$.

称 $[\gamma]$ 为 $\pi_1(A,x_0)$ 的一个生成元.

证: 由 $\pi_1(S^1,1)\simeq\mathbb{Z}$ 的证明容易看出. #

练习: 设

$$h:\begin{array}{ccc}S^1 & \longrightarrow & S^1\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ z & \longmapsto & z^m\end{array}$$

, 其中 m 为整数. 则

$$h_*([\gamma])=m[\gamma].$$

性质2: 设 $\mathring{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<r\}$. 其中 $r>0$ 为常数. 设 $0\neq x_0\in\mathring{D}$, 而 $A=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=|x_0|\}$. 则 A 是 $\mathring{D}\setminus\{0\}$ 的形变收缩核. $\pi_1(\mathring{D}\setminus\{0\},x_0)\simeq\mathbb{Z}$. 且 $\pi_1(\mathring{D}\setminus\{0\},x_0)$ 的一个生成元为 $[\gamma]$. 其中 γ 为如下闭道路:

$$\gamma:\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathring{D}\setminus\{0\}\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ t & \longmapsto & |x_0|\cdot e^{2\pi i t}\end{array}.$$

证: 不难验证 A 为 $\mathring{D}\setminus\{0\}$ 的形变收缩核. 从而包含映射诱导同构: $i_*:\pi_1(A,x_0)\xrightarrow{\sim}\pi_1(\mathring{D}\setminus\{0\},x_0)$. 再结合性质1 即得. #

性质3: 设 $0<r_1<r_2$. $\mathring{D}_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<r_1\}$. $\mathring{D}_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<r_2\}$. $0\neq x_0\in\mathring{D}_1$, $i:\mathring{D}_1\setminus\{0\}\hookrightarrow\mathring{D}_2\setminus\{0\}$ 为包含映射. 则

$$i_*:\pi_1(\mathring{D}_1\setminus\{0\},x_0)\longrightarrow\pi_1(\mathring{D}_2\setminus\{0\},x_0)$$

为同构.

证: 由性质2 可知 i_* 将生成元映为生成元, 从而为同构. #

性质4：记号同性质3. 设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 为开集，且 $\mathring{D}_1 \subseteq U \subseteq \mathring{D}_2$，则 $U \setminus \{0\}$ 不单连通.

证：假设 $U\setminus\{0\}$ 单连通，则 $\pi_1(U\setminus\{0\}, x_0) = 0$ 为平凡群.
记 $\mathring{D}_1\setminus\{0\} \overset{i_1}{\hookrightarrow} U\setminus\{0\}$，$U\setminus\{0\} \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathring{D}_2\setminus\{0\}$ 为包含映射，则

$$i = i_2 \circ i_1 : \mathring{D}_1\setminus\{0\} \hookrightarrow \mathring{D}_2\setminus\{0\}.$$

从而有

$$i_* = i_{2*} \circ i_{1*} : \pi_1(\mathring{D}_1\setminus\{0\}, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathring{D}_2\setminus\{0\}, x_0)$$

由于 $\pi_1(U\setminus\{0\}, x_0) = 0$ 为平凡群，$i_{1*} : \pi_1(\mathring{D}_1\setminus\{0\}, x_0) \longrightarrow \pi_1(U\setminus\{0\}, x_0)$ 为平凡群同态，同样 i_{2*} 为平凡群同态.
从而 $i_* = i_{2*} \circ i_{1*}$ 为平凡群同态（即零同态）这与性质3所断言的 i_* 为同构矛盾！从而 $U\setminus\{0\}$ 不单连通. #

定理5：设 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 为非空开集，$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空开集，$n \geq 3$. 则 U 与 V 不同胚.

证：设 $\varphi : V \longrightarrow U$ 为同胚. 取 $y_0 \in V$，令 $x_0 = \varphi(y_0)$.
由于 U 为开集，存在 $r_2 > 0$，使得 $\mathring{D}_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r_2\} \subseteq U$.
又由于 φ 为同胚，存在 $r_2' > 0$，使得 $\mathring{D}_2' := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - y_0| < r_2'\} \subseteq \varphi^{-1}(\mathring{D}_2)$
进而，存在 $r_1 > 0$ 且 $r_1 < r_2$，使得 $\mathring{D}_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < r_1\} \subseteq \varphi(\mathring{D}_2')$
这样，在 $\mathbb{R}^2$ 中有 x_0 的开邻域的互相包含：

$$\mathring{D}_1 \hookrightarrow \varphi(\mathring{D}_2') \hookrightarrow \mathring{D}_2$$

由于 φ 为同胚，$\varphi(\mathring{D}_2') \cong \mathring{D}_2'$，且由于 $n \geq 3$，$\varphi(\mathring{D}_2')\setminus\{x_0\} \cong \mathring{D}_2'\setminus\{y_0\} \simeq S$
单连通. 这与性质4矛盾！从而 U 与 V 不同胚. #

定理6：设 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 为开集，$V \subseteq \mathbb{R}^n_+$ 为 $\mathbb{R}^n_+$ 中开集. 其中 $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. 设 $x_0 \in U$，$y_0 \in V$ 且 $y_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid x_n = 0\}$ $(n \geq 3)$.
则不存在 U 与 V 的同胚映射，将 x_0 映为 y_0.

证：证法同定理5，只需注意到 $\forall r > 0$，y_0 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的开邻域
$B_r^+ := \{y \in \mathbb{R}^n_+ \mid |y - y_0| < r\}$ 满足：$B_r^+\setminus\{y_0\} \cong S^{n-1}_+ \times (0,1)$ 为单连通. 其中 $S^{n-1}_+ := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, x_n \geq$
… 从而 $B^+\setminus\{y_0\}$ 单连通

$U\setminus\{0\}$ 不单连通.

证: 假设 $U\setminus\{0\}$ 单连通, 则 $\pi_1(U\setminus\{0\}, x_0)=0$ 为平凡群.
记 $\mathring{D}_1\setminus\{0\} \xrightarrow{i_1} U\setminus\{0\}$, $U\setminus\{0\} \xrightarrow{i_2} \mathring{D}_2\setminus\{0\}$ 为包含映射, 则
$i=i_2\circ i_1: \mathring{D}_1\setminus\{0\} \hookrightarrow \mathring{D}_2\setminus\{0\}$. 从而有
$i_*=i_{2*}\circ i_{1*}: \pi_1(\mathring{D}_1\setminus\{0\}, x_0)\longrightarrow \pi_1(\mathring{D}_2\setminus\{0\}, x_0)$
由于 $\pi_1(U\setminus\{0\}, x_0)=0$ 为平凡群, $i_{1*}: \pi_1(\mathring{D}_1\setminus\{0\}, x_0)\longrightarrow \pi_1(U\setminus\{0\}, x_0)$ 为平凡群同态. 同样 i_{2*} 为平凡群同态. 从而 $i_*=i_{2*}\circ i_{1*}$ 为平凡群同态(即零同态), 这与性质3所断言的 i_* 为同构矛盾! 从而 $U\setminus\{0\}$ 不单连通. #

定理5: 设 $U\subseteq\mathbb{R}^2$ 为非空开集, $V\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空开集, $n\geq 3$. 则 U 与 V 不同胚.

证: 设 $\varphi: V\longrightarrow U$ 为同胚. 取 $y_0\in V$, 令 $x_0=\varphi(y_0)$.
由于 U 为开集, 存在 $r_2>0$, 使得 $\mathring{D}_2:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|<r_2\}\subseteq U$.
又由于 φ 为同胚, 存在 $r_2'>0$, 使得 $\mathring{D}_2':=\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y-y_0|<r_2'\}\subseteq \varphi^{-1}(\mathring{D}_2)$.
进而, 存在 $r_1>0$ 且 $r_1<r_2$, 使得 $\mathring{D}_1:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|<r_1\}\subseteq \varphi(\mathring{D}_2')$
这样, 在 $\mathbb{R}^2$ 中有 x_0 的开邻域的互相包含:

$$\mathring{D}_1 \hookrightarrow \varphi(\mathring{D}_2') \hookrightarrow \mathring{D}_2$$

由于 φ 为同胚, $\varphi(\mathring{D}_2')\cong\mathring{D}_2'$, 且由于 $n\geq 3$, $\varphi(\mathring{D}_2')\setminus\{x_0\}\cong\mathring{D}_2'\setminus\{y_0\}\simeq S^{n-1}$ 单连通. 这与性质4矛盾! 从而 U 与 V 不同胚. #

定理6: 设 $U\subseteq\mathbb{R}^2$ 为开集, $V\subseteq\mathbb{R}^n_+$ 为 $\mathbb{R}^n_+$ 中开集. 其中 $\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_n\geq 0\}$. 设 $x_0\in U$, $y_0\in V$. 且 $y_0\in\partial\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+ \mid x_n=0\}$. $(n\geq 3)$
则不存在 U 与 V 的同胚映射, 将 x_0 映为 y_0.

证: 证法同定理5, 只需注意到 $\forall r>0$, y_0 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的开邻域 $B_r^+:=\{y\in\mathbb{R}^n_+ \mid |y-y_0|<r\}$ 满足: $B_r^+\setminus\{y_0\}\cong S_+^{n-1}\times(0,1)$ 为可缩空间, 从而 $B_r^+\setminus\{y_0\}$ 单连通. 其中 $S_+^{n-1}:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2=1, x_n\geq 0\}$ 为 S^{n-1} 中的上半球面. #