10月10日 练习

1. 设 X 为 pre-variety，Z 为 X 的局部闭子集。设 $Z=U\cap F$，U 为 X 开子集，F 为 X 闭子集。赋予 U pre-variety 结构使其为 X 的开子簇。Z 作为 U 的闭子集赋予其 U 的闭子簇结构。

   证明：自然嵌入映射 ~~$i: U \hookrightarrow X$~~ $i: Z \hookrightarrow X$ 为态射。且对任意 pre-variety 之间的态射 $f: W\to X$，若 $f(W)\subset Z$，则映射 $f: W\to Z$ 也为态射。

2. 记号同 1。证明若 $Z=U_1\cap F_1$，U_1，F_1 分别为 X 的开子集和闭子集。则 Z 作为 X 的开子簇 U_1 的闭子簇赋予的 pre-variety 结构与 1. 中所赋予的 pre-variety 结构相同，即 Z 作为 X 的子簇，其 pre-variety 结构不依赖 U 和 F 的选取。

提示：利用 1 所证的 Z 的万有性质。

定义：称 pre-variety 之间的态射 $i: Z\hookrightarrow X$ 为浸入 (immersion)，如果 $i(Z)$ 为 X 的局部闭子集，且 $i: Z\to i(Z)$ 为同构（赋予 $i(Z)$ 作为 X 的局部闭子集诱导的子簇结构）。

特别地，若 $U\subset X$ 为开集，则自然嵌入 $i: U\hookrightarrow X$ 称为开嵌入。若 $F\subset X$ 为闭集，则自然嵌入 $i: F\hookrightarrow X$ 称为闭嵌入，它们均为特殊的浸入。

3. 设 $X \xrightarrow{f} S$ 为态射. $Z \hookrightarrow S$ 为浸入(我们直接将 Z 看作 S 的局部闭子集).

证明: $f^{-1}(Z) \hookrightarrow X$ 为浸入(即 $f^{-1}(Z)$ 为 X 的局部闭子集). 且

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Z) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, hook] & S \end{tikzcd}$$

为卡氏图表.

即 $f^{-1}(Z) \simeq Z \times_S X$. (左边 $f^{-1}(Z)$ 作为 X 的子簇赋予 pre variety 结构, 右边作为纤维积赋予 pre variety 结构).

4. 设 $X \xrightarrow{f} S$ 为态射. $\forall p \in S$. 将 p 看作 S 的闭子簇. 证明:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(p) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ p \arrow[r, hook] & S \end{tikzcd}$$

为卡氏图表. 其中赋予 $f^{-1}(p)$ 为 X 的闭子簇结构. 即说明 $f^{-1}(p) \simeq p \times_S X$.

提示: 4 为 3 的特例.

5. 设 $X \to S$, $Y \to S$ 为态射. 证明 $X \times_S Y \simeq Y \times_S X$.

提示: 利用万有性质构造态射.

6. 设
$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ S_1 \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
和
$$\begin{tikzcd} W_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W_1 \arrow[d] \\ S_2 \arrow[r] & S_1 \end{tikzcd}$$
均为卡氏图表

证明：复合图表
$$\begin{tikzcd} W_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ S_2 \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
也为卡氏图表.

（由于 $W_1 \simeq S_1 \times_S Y$，$W_2 \simeq S_2 \times_{S_1} W_1$. 该题说明
$$S_2 \times_{S_1} (S_1 \times_S Y) \simeq S_2 \times_S Y.）$$

注：可比较5. 6题所述纤维积性质与张量积性质之间的类似性. 如：设 B, C 均为 A-代数. 则
$$B \otimes_A C \simeq C \otimes_A B.$$
若 R 为 B-代数, 则
$$R \otimes_B (B \otimes_A C) \simeq R \otimes_A C.$$

7. 设
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
为卡氏图表. $Z \hookrightarrow X$ 为浸入.

则
$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
也为卡氏图表

提示：利用3. 和6. 即得. 因所求图表即为下面的复合
$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Z) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

注：7. 说明. 若 $Z \hookrightarrow X$ 为局部闭子集. ~~则 Z~~ $X \to S$, $Y \to S$

为态射，则 $Z\times_S Y$ 也为 $X\times_S Y$ 的局部闭子集，且 $Z\times_S Y$ 作为 $X\times_S Y$ 的子簇赋予的 pre-variety 结构与它作为 Z 和 Y 在 S 上的纤维积得到的 pre-variety 结构是一样的.

再进一步. 设 $Z_1 \hookrightarrow Y$ 为 Y 的局部闭子集. 则 $Z\times_S Z_1$ 为 $Z\times_S Y$ 的局部闭子集，从而也为 $X\times_S Y$ 的局部闭子集. 且 $Z\times_S Z_1$ 作为 $X\times_S Y$ 局部闭子集诱导的 pre variety 结构与作为 Z 与 Z_1 在 S 上纤维积诱导的 pre variety 结构是一样的.

特别地，设 $U\subset X$，$V\subset Y$ 为开子集. 则 $U\times_S V$ 为 $X\times_S Y$ 的开子集，且其作为 $X\times_S Y$ 的开子集诱导的 pre-variety 结构与作为 U 和 V 在 S 上纤维积诱导的 pre-variety 结构是一样的.

注：设 p 为一个点. 则 p 也为 pre-variety（实际为仿射簇）. 且任一 pre variety X 存在唯一的到 p 的态射 $X\to p$. 易见 $X\times Y \simeq X\times_p Y$，$\forall$ pre variety X,Y 成立. 故以上关于纤维积的命题关于乘积均成立.

8. 设Y为variety（即seperated pre-variety），$X \xrightarrow{f} Y$为态射. 证明：f的图像 $G_f := \{(x, f(x)) \in X\times Y \mid x\in X\}$ 为 $X\times Y$ 的闭子集，并且若赋予 G_f 作为 $X\times Y$ 的闭子簇结构，则投影态射 $G_f \xrightarrow{p_1} X$ 为pre-variety的同构.

9. 设Y为variety，U, V均为Y的开子集，Δ 为 $Y\times Y$ 的对角线闭子集（因Y为seperated）. 设G为 $U\cap V \xrightarrow{id} U\cap V$ 恒等态射的图像. 由 $U\cap V$ 为Y的开子簇知 $U\cap V$ 也为variety，从而由8. 知 $G \simeq U\cap V$，且G为 $(U\cap V)\times(U\cap V)$ 的闭子簇.
又由前讨论知 $(U\cap V)\times(U\cap V) \hookrightarrow U\times V \hookrightarrow Y\times Y$ 均为开子集，且易知 $G = (U\times V)\cap\Delta$（作为集合相等）
所以G为 $Y\times Y$ 的局部闭子集，且G既可看作 $(U\cap V)\times(U\cap V)$（此为 $Y\times Y$ 的开子集）中闭子集，也可看作 $U\times V$（此为 $Y\times Y$ 的开子集）中闭子集（$(U\times V)\cap\Delta$）.
从而由第2题知G同构于 $U\times V$ 中闭子簇 $(U\times V)\cap\Delta$（同构态射为恒等态射），从而 $U\cap V \simeq G$ 也同构于 $U\times V$ 中闭子簇. 将该结论应用于U, V均为Y中仿射开子集情形，即得仿射开集U和V的交 $U\cap V$ 也为Y中仿射开集.