9月21日 练习

以下 k 均为代数闭域

1. 证明 $\mathbb{C}^n$ 上的 Zariski 开集必为欧氏拓扑下的开集.

2. $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 中可对角化的 n 阶方阵形成的集合是 $M_{n\times n}(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{n^2}$ 中的 Zariski 开集吗? 是欧氏拓扑下的开集吗?

3. 设 $X\subset k^n$ 为仿射代数簇, $Y\subset k^m$ 为仿射代数簇. 证明 $X\times Y\subset k^{n+m}$ 为仿射代数簇.

4. 将 $SL(n,k)=\{A\in M_{n\times n}(k)\mid \det A=1\}$ 看作仿射代数簇. 证明:

$$\begin{aligned} SL(n,k) &\longrightarrow SL(n,k) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} SL(n,k)\times SL(n,k) &\longrightarrow SL(n,k) \\ (A, B) &\longmapsto A\cdot B \end{aligned}$$

均为仿射代数簇之间的态射.

5. 设 $X\subset k^n$, $Y\subset k^m$ 均为仿射代数簇, 其坐标函数环分别为 $A(X)$, $A(Y)$. 若存在 k-代数同构 $A(X)\xrightarrow{\sim}A(Y)$, 证明 X 与 Y 作为仿射代数簇同构.

k为代数闭域

6. 设A为有限生成k-代数，$\mathfrak{p}$为A的素理想

证明：$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\subseteq \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}\text{为}A\text{的极大理想}}} \mathfrak{m}$$

(由此可见代数闭域上有限生成代数的极大理想的信息可以决定所有素理想的信息).

7. 设k为特征$p>0$的代数闭域．考察映射：

$$\varphi: \begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & k \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ t & \longmapsto & t^p \end{array}$$

证明φ为仿射代数簇k到自身的态射，~~ ~~ φ为同胚，但φ不是仿射代数簇之间的同构.

注：上述态射称为Frobenius态射．类似的可以定义

$$\varphi: \begin{array}{ccc} k^n & \longrightarrow & k^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x_1,\cdots,x_n) & \longmapsto & (x_1^p,\cdots,x_n^p) \end{array}$$

上例说明代数簇之间的态射即使为同胚，也不一定是同构．类似的例子在微分流形中也存在．如

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$ 为C^∞映射，也是同胚，但不是微分同胚.

8. 设 $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$. $U = D(f) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in k^n \mid f(x_1, \cdots, X_n) \neq 0\}$ $\subset k^n$. 证明: $k[X_1, \cdots, X_n]_f$ 同构于 $A(U)$. $A(U)$ 为 U 上的正则函数环.

9. 设 $I \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ 为根式理想. $V = V(I) \subset k^n$.
证明: $\dfrac{k[X_1, \cdots, X_n]}{I}$ 同构于 $A(V)$. $A(V)$ 为 V 上的正则函数环.