Chevalley 定理

设 $X=V(I)\subset k^n$，$I\subset k[x_1\cdots x_n]$ 为理想，$\sqrt{I}=I$。
记 $B=\dfrac{k[x_1\cdots x_n]}{I}$。则有集合间的双射

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}_m B=\{m\subset B \mid m \text{ 为极大理想}\} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \alpha & \longmapsto & m_\alpha:=\{f\in B \mid f(\alpha)=0\}. \end{array}$$

在上述对应下有，$\forall f\in B$ 有

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}_m B \\ \cup & & \cup \\ D(f) & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}_m B_f \end{array}$$

其中 $\mathrm{Spec}_m B_f \hookrightarrow \mathrm{Spec}_m B$ 为自然同态 $B\to B_f$ 诱导的理想拉回。

若 $Y=V(J)\subset k^m$，$\sqrt{J}=J\subset k[x_1\cdots x_m]$，记 $A=\dfrac{k[x_1\cdots x_m]}{J}$。
则态射 $\varphi: X\to Y$ 诱导 k-代数同态 $\varphi^*: A\to B$，
且有交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}_m B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftrightarrow & \mathrm{Spec}_m A \end{array}$$

其中 $\mathrm{Spec}_m B\to \mathrm{Spec}_m A$ 为 φ^* 诱导的理想拉回映射
由 Hilbert 零点定理知必将 B 中极大理想拉回为 A 中极大理想，具体说为：

命题1：设 $\psi: A\to B$ 为有限生成 k-代数的 k-代数同态，$m\subset B$ 为极大理想，则 $\psi^{-1}(m)\subset A$ 为极大理想。

证：由 $m \neq B$ 知 $\varphi^{-1}(m) \neq A$.

且有 k-代数单同态

$$\begin{tikzcd} A/\varphi^{-1}(m) \arrow[rr, "\varphi"] & & B/m \\ & k \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

由 Hilbert 零点定理知 $k \longrightarrow B/m$ 为同构.

故 $\varphi: A/\varphi^{-1}(m) \longrightarrow B/m$ 为满同态，从而为同构. 故 $k \longrightarrow A/\varphi^{-1}(m)$ 为同构. $A/\varphi^{-1}(m)$ 为域，

故 $\varphi^{-1}(m) \subset A$ 为极大理想. #

命题2：设 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 为 k-代数单同态. 且 B 为有限 A-模. 则 φ 诱导的 $\mathrm{Spec}_m B \longrightarrow \mathrm{Spec}_m A$ 为满射. 作为推论，如果仿射代数簇之间的态射诱导的正则函数环之间的同态为单同态，同时也是有限扩张，则该代数簇之间的态射为满射.

证：设 $m \subset A$ 为极大理想，~~则 φ~~ 记 $S = A - m$

则 φ 诱导 $\varphi_S : A_m \longrightarrow B_S$ （B_S 也可记为 B_m）

并且由 $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ 为单射知 在 B 中 $0 \notin \varphi(S)$.

从而 B_S 为非零环. 任取 B_S 中极大理想 n.

由 $\varphi_S : A_m \longrightarrow B_S$ 为整扩张（有限扩张）知

$\varphi_S^{-1}(n)$ 为 A_m 中极大理想. 故在 A_m 中

$mA_m = \varphi_S^{-1}(n)$. 从而作为 A 中理想有 $m = \varphi^{-1}(n)$. #

命题3：设 X 为仿射簇，Y 为仿射簇，Y 的正则函数环为 A，X 的正则函数环为 $A[T_1,\cdots,T_m]$，

$\varphi: X \to Y$ 为态射，$\varphi^*: A \to A[T_1\cdots T_m]$ 为自然同态，

则 φ 为满射。

证：~~由于~~ $A[T_1\cdots T_m]$ 为 A 上的多项式环，

只需证 对 A 中任一极大理想 $\mathfrak{a} \subset A$，存在 $A[T_1,\cdots,T_m]$ 中极大理想 $\mathfrak{n}$，使 $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{a}$。

为此，任取 $\frac{A}{\mathfrak{a}}[T_1,\cdots,T_m] = \frac{A[T_1,\cdots,T_m]}{\mathfrak{a}\cdot A[T_1\cdots T_m]} \cong k[T_1\cdots T_m]$ 中的任一极大理想 $\mathfrak{n}$，则 $\mathfrak{n}$ 也可看作 $A[T_1\cdots T_m]$ 中的极大理想，且 $\mathfrak{n} \cap A \supset \mathfrak{a}$，由 $\mathfrak{a}$ 为极大理想，~~$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{a}$~~ $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{a}$。 #

命题4：设 X, Y 均为不可约仿射簇，其坐标正则函数环分别为 B，A。$\varphi: X \to Y$ 为 dominant 态射，

则存在非空开集 $U \subset Y$，使得 $U \subset \varphi(X)$。

证：φ 诱导 k-代数同态 $\varphi^*: A \to B$，由于 B 为有限生成 k-代数，从而也为有限生成 A-代数，

记 $B = A[y_1,\cdots,y_s]$，记 $S = A - \{0\}$

由于 φ 为 dominant，φ^* 为单同态，将 $\varphi^*(S)$ 仍记为 S。

~~从~~记 $K = A_S$ 为 A 的分式域（由 X, Y 不可约知 A, B 均为整环），则 φ^* 诱导局部化之间的单同态：

$$\varphi^*_S: K \longrightarrow B_S$$

且 $B_S = K[y_1,\cdots,y_s]$ 为有限生成 K-代数。

由 Noether 正规化定理，存在 $t_1,\cdots,t_m, x_1,\cdots,x_n \in B_S$ 满足 $B_S = K[t_1,\cdots,t_m, x_1,\cdots,x_n]$，

且使得 $t_1,\cdots,t_m$ 在 K 上代数无关，而 $x_1,\cdots,x_n$ 在 $K[t_1,\cdots,t_m]$ 上整.

故存在首一多项式 $f_i(X)\in K[t_1,\cdots,t_m][X]$，$i=1,\cdots,n$.
系数在 $K[t_1,\cdots,t_m]$ 中

使得 $f_i(x_i)=0$，$\forall\, i=1,\cdots,n$.

又由 $B_S=K[y_1,\cdots,y_s]=K[t_1,\cdots,t_m,x_1,\cdots,x_n]$

存在系数在 K 中的多项式 $g_i(T_1,\cdots,T_m,X_1,\cdots,X_n)\in K[T_1,\cdots,T_m,X_1,\cdots,X_n]$

$i=1,\cdots,s$. 使得 $y_i=g_i(t_1,\cdots,t_m,x_1,\cdots,x_n)$，$\forall\, i=1,\cdots,s$.

对 B_S 中的任一元素 x，取定一个表示 $\frac{b}{a}$，$b\in B$，$a\in S$.
(若该元素属于 $K\subset B_S$，则要求其表示为 $\frac{a_1}{a}$，$a_1\in A$，$a\in S$).
我们称 a 为该元素 x 的分母.

将 $t_1,\cdots,t_m$，$x_1,\cdots,x_n$，以及诸 $f_i(X)$，$g_j(T_1,\cdots,T_m,X_1,\cdots,X_n)$ 的系数的分母相乘得 $f\in S\subset A$. 且有

$t_1,\cdots,t_m,x_1,\cdots,x_n\in B_f\subset B_S$.

以及 $f_i(X)\in A_f[t_1,\cdots,t_m][X]$，$g_j(T_1,\cdots,T_m,X_1,\cdots,X_n)\in A_f[T_1,\cdots,T_m,X_1,\cdots,X_n]$，$\forall\, i=1,\cdots,n$，$\forall j=1,\cdots,s$.

(在取 $f_i(X)$ 系数的分母时，我们是将 $f_i(X)\in K[t_1,\cdots,t_m][X]$ 看作系数在 K 上的 $m+1$ 元多项式而取的 K 中元素作为各系数).

由此知 $B_f=A_f[y_1,\cdots,y_s]=A_f[t_1,\cdots,t_m,x_1,\cdots,x_n]$. 且有

交换图表.
$$\begin{tikzcd}
A_f \arrow[r, hook, "\varphi_f^*"] \arrow[d, hook, "\varphi_1"'] & B_f = A_f[t_1,\cdots,t_m,x_1,\cdots,x_n] \\
A_f[t_1,\cdots,t_m] \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

φ_1 为自然同态 $A_f[t_1,\cdots,t_m]\simeq A_f[T_1,\cdots,T_m]$ 同构于 A_f 上的

m元多项式环，φ为有限扩张.

由命题2和命题3知 $\varphi_f^*: A_f \longrightarrow B_f$ 诱导的映射 $\mathrm{Specm}\, B_f \longrightarrow \mathrm{Specm}\, A_f$ 为满射.

不难看到这等价于在态射 $\varphi: X \longrightarrow Y$ 中,

$\varphi^{-1}(D(f)) \xrightarrow{\varphi} D(f) \subset Y$ 为满射. 故 $D(f) \subset \varphi(X)$.

由 $f \in S = A - \{0\}$ 知 $D(f)$ 非空. 证毕! #

定理(Chevalley): 设 $\varphi: X \longrightarrow Y$ 为 pre-variety 之间的态射.

则 $\varphi(X)$ 为 Y 中的可构造子集.

证: 记 $Z_1 = \overline{\varphi(X)}$ 为 Y 的闭子簇, 则 $\varphi: X \longrightarrow Z_1$ 为 dominant. 任取 Z_1 的不可约分支中的一个非空开子集 U_1, 则 $\varphi^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1$ 为 dominant. 可设 U_1 为 Z_1 的不可约仿射开子集.

(设 $Z_1 = Z_{11} \cup \cdots \cup Z_{1n}$ 为不可约分解, 可取 U_1 为 $Z_{11} \setminus (Z_{12} \cup \cdots \cup Z_{1n})$ 中的一个非空仿射开集. 注意到 $Z_{11} \setminus Z_{12} \cup \cdots \cup Z_{1n} = Z_1 \setminus Z_{12} \cup \cdots \cup Z_{1n}$ 为 Z_1 的开集).

由于 $\varphi^{-1}(U_1)$ 为 X 的开子簇. 从而存在 $\varphi^{-1}(U_1)$ 的不可约仿射开子集 V_1, 使得 $\varphi: V_1 \longrightarrow U_1$ 为 dominant. 从而由命题4知存在非空开集 $\widetilde{U}_1 \subset U_1$, 使得 $\widetilde{U}_1 \subset \varphi(V_1) \subset \varphi(X)$.

注意到 $\widetilde{U}_1$ 为 U_1 的开子集, U_1 为 Z_1 的开子集, Z_1 为 Y 的闭子集. 从而 $\widetilde{U}_1$ 为 Y 的局部闭子集. 且 $\widetilde{U}_1 \subset \varphi(X)$.

令 $Y_1 = Z_1 \setminus \widetilde{U}_1$, 则 Y_1 为 Z_1 的闭子簇. 若 $Y_1 \cap \varphi(X) \neq \emptyset$

则令 $X_1 = \varphi^{-1}(Y_1)$, 有 X_1 为 X 的非空闭子簇.

并且 $\varphi(X_1) \subset Y_1$，从而有 $\varphi: X_1 \to Y_1$ 为态射.

令 $Z_2 = \overline{\varphi(X_1)} \subset Y_1$. 重复之前的讨论知存在 Z_2 的非空开集 $\widetilde{U}_2$，使得 $\widetilde{U}_2 \subset \varphi(X_1) \subset \varphi(X)$.

令 $Y_2 = Z_2 \setminus \widetilde{U}_2$，则 Y_2 为 Z_2 的真闭子簇.

如果 $Y_2 \cap \varphi(X) \neq \emptyset$，又可重复之前的操作令 $X_2 = \varphi^{-1}(Y_2)$.

……，如果可以一直操作下去，我们就得到 Y 的真闭子集降链：

$$Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq Z_3 \supsetneq \cdots$$

与 Y 为 Noether 空间矛盾!

从而必有 n，使得 $Z_{n+1} = \emptyset$.

这样，由操作过程易见 $\forall\, i=1,\cdots,n$，均有 Z_i 中的非空开子集 $\widetilde{U}_i$ 使得 $\widetilde{U}_i \subset \varphi(X)$.

且 $\varphi(X) = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2 \cup \cdots \cup \widetilde{U}_n$.

而每个 $\widetilde{U}_i$ 均为 Y 的局部闭子集. 故 $\varphi(X)$ 为 Y 的可构造子集. #

可构造子集是开子集的一个判别方法:

性质: 设 $U\subset X$ 为 pre-variety X 中的一个可构造子集. 则 U 为 X 的开子集 $\Longleftrightarrow$ 对任意 X 中的不可约闭子集 Z, 若 $Z\cap U\neq\phi$, 则 存在 Z 的非空开子集 $V\subset Z$, 使得 $V\subset U$.

证: "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 记 $F = X\setminus U$. 若 U 不是开集. 则 $\overline{F}\supsetneq F$. $\overline{F}$ 为 F 在 X 中的闭包. 设 $\overline{F}=F_1\cup\cdots\cup F_n$ 为其不可约分解. 不妨设存在 $x\in F_1$ 且 $x\notin F$. 由 $x\in U$ 知 $F_1\cap U\neq\phi$. 故由条件, 可找到 F_1 中的非空开子集 $V\subset F_1$, 使得 $V\subset U$. 又由于 F_1 不可约, 易知 $V_1=V\setminus F_2\cup\cdots\cup F_n$ 仍为 F_1 中的非空开子集且 $V_1\subset U$.

由于 $X = U\cup F_1\cup\cdots\cup F_n$, 且 $V_1\cap(F_2\cup\cdots\cup F_n)=\phi$,

~~不难看到 $X\setminus U\cup V_1 = (F_1\setminus V_1)\cup F_2\cup\cdots\cup F_n$~~

不难看到 $(F_1\setminus V_1)\cup F_2\cup\cdots\cup F_n$ 为 X 中闭集 且

$$F\subset(F_1\setminus V_1)\cup F_2\cup\cdots\cup F_n\subsetneq F_1\cup\cdots\cup F_n=\overline{F}$$

这与 $\overline{F}$ 为 F 的闭包矛盾! 故 U 为开集. #

性质(平坦态射为开映射): 设 X, Y 均为仿射簇. B, A 分别为其正则函数环. $\varphi: X\to Y$ 为态射, φ 诱导 k-代数同态 $\varphi^*: A\to B$. 若在 φ^* 下, B 为平坦 A-模. (称 φ 为平坦态射) 此时 $\varphi(X)$ 为 Y 中开子集.

证: 由Chevalley定理, $\varphi(X)$ 为 Y 中可构造子集. 由上一性质, 只需证明如下命题:

对 A 中任一素理想 $\mathfrak{p}$, 记 $Z=V(\mathfrak{p})\subset Y$. 若存在 A 中极大理想 $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{p}$, 使得 $\mathfrak{m}\in\varphi(X)$, 则 Z 中存在非空开集 $\subset\varphi(X)$

为此，设 B 中极大理想 n 满足 $\varphi^{*-1}(n)=m$.

由下面的引理（平坦~~局部~~态射的 going down 性质），

存在 B 中素理想 $q\subset n$ 且 $\varphi^{*-1}(q)=p$.

由此得到 k-代数单同态 $A/p \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} B/q$，且 A/p、B/q 均为整环. 其对应 X 中不可约闭子簇 $Z_1=V(q)$ 到 Y 中不可约闭子簇 $Z=V(p)$ 的 $\underset{\text{dominant}}{\underline{\text{态射}}}$ φ. 由命题4知 Z 中存在非空开子集 $\subset\varphi(Z_1)\subset\varphi(X)$. 从而命题得证. #

引理（平坦扩张的 going down 性质）：

设 $A\xrightarrow{\psi}B$ 为环同态，且 B 为平坦 A-模. 若 $m\subset A$，$n\subset B$ 均为素理想，$p\subset A$ 为素理想，且 $p\subset m$，而 $\psi^{-1}(n)=m$，则存在 B 中素理想 $q\subset n$，满足 $\psi^{-1}(q)=p$.

证：考虑局部环之间的同态 $A_m\xrightarrow{\psi}B_n$

则 nB_n 为 B_n 的唯一极大理想，mA_m 为 A_m 的唯一极大理想，熟知 B 中满足 $\psi^{-1}(q)=p$ 的素理想 q 的集合与 $\frac{B_p}{pB_p}$ 中的素理想集合存在双射，~~...~~

同样 B_n 中满足 $\psi^{-1}(q)=pA_m$ 的素理想集合与 $B_n\otimes_{A_m}\kappa(p)$ 的素理想集合存在双射. 其中 $\kappa(p)=\frac{A_p}{pA_p}$ 为 A 在 p 处的剩余类域.

故只需证 $B_n\otimes_{A_m}\kappa(p)$ 为非零环.

由 $\kappa(p)\neq0$，任取 $\kappa(p)$ 中非零元 a，得 $\kappa(p)$ 中非零的 A_m-子模 $A_m a\hookrightarrow\kappa(p)$. 由 B_n 为平坦 A_m-模知 $B_n\otimes_{A_m}A_m a\hookrightarrow B_n\otimes_{A_m}\kappa(p)$. 故只需证 $B_n\otimes_{A_m}A_m a$ 非零.

由于作为 A_m-模有 $A_m a \simeq \frac{A_m}{I}$. 其中 I 为 A_m 中理想.

且由 $A_m a \neq 0$ 知 $I \neq A$. 故 $I \subset mA_m$.

从而有满的 A_m-模同态 $A_m/I \twoheadrightarrow \frac{A_m}{mA_m}$

从而有满同态 $B_n \otimes_{A_m} A_m a \twoheadrightarrow B_n \otimes_{A_m} \frac{A_m}{mA_m} \simeq \frac{B_n}{mB_n}$

而由 $\varphi^{-1}(nB_n) = mA_m$ 知 $mB_n \subset nB_n \neq B_n$

故 $\frac{B_n}{nB_n} \neq 0$. 从而 $B_n \otimes_{A_m} A_m a$ 非零环. #