微分模与形式光滑性

参考文献: Matsumura 《Commutative Ring Theory》.

设 $A \to B$ 为环同态. M 为 B-模. 称映射 $D: B \to M$ 为一个 A-导子 (A-derivations), 如果其满足:

(1) $D(b_1+b_2) = D(b_1) + D(b_2)$, $\forall b_1, b_2 \in B$.

(2) $D(b_1 b_2) = b_1 D(b_2) + b_2 D(b_1)$, $\forall b_1, b_2 \in B$

(3) $D(a) = 0$, $\forall a \in A$.

易知若 $D: B \to M$ 为 A-导子, 则 $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $D(ab) = a D(b) + b \cdot D(a) = a \cdot D(b)$. 故 D 为 A-模同态.

将 A-导子的集合记为 $Der_A(B, M)$.

易见 $Der_A(B, \cdot)$ 为 B-模范畴到集合范畴的一个共变函子, 自然要问该函子是否可表. 从而有如下定义:

定义: 称 B-模 $\Omega_{B/A}$ 为 B 相对于 A 的 Kähler 微分模 (简称微分模), 如果存在 A-导子 $d: B \to \Omega_{B/A}$, 满足如下万有性质: 对任意 B-模 M 以及 A-导子 $D: B \to M$, 存在唯一的 B-模同态 $\varphi: \Omega_{B/A} \to M$, 使得 $D = \varphi \circ d$, 即有下图:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{B/A} \arrow[d, dashed, "\varphi\ \exists!"] \\ & M \end{tikzcd}$$

, (以及集合双射 $Der_A(B, M) \simeq Hom_B(\Omega_{B/A}, M)$)

性质1: 对任意环同态 $A \to B$, 微分模 $\Omega_{B/A}$ 存在 (由万有性质, 在同构下唯一).

证: 类似于张量积的构造, 可令 $\Omega_{B/A}$ 为符号的集合 $\{db \mid b \in B\}$ 生成的自由 B-模再商掉以下三类元素生成的 B-子模:

(1) $d(b_1+b_2) - db_1 - db_2$, $\forall b_1, b_2 \in B$

(2) $d(b_1 b_2) - b_1 db_2 - b_2 db_1$, $\forall b_1, b_2 \in B$

(3) da, $\forall a \in A$

则容易验证

$$d: \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \Omega_{B/A} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ b & \longmapsto & db \end{array}$$

满足条件.

另一个常见的构造方法可见 Matsumura 书上微分模一节. 这些构造中最重要的一个推论是 $\Omega_{B/A}$ 作为 B-模可由 $\{db \mid b\in B\}$ 生成. #

例: 设 $B = A[X_1,\dots,X_n]$ 为多项式环. 则 $\Omega_{B/A} = B\cdot dX_1+\cdots+B\cdot dX_n$
为秩 n 的自由 B-模. 这是因为对任意 A-导子 $D: B\to M$,
D 由 $D(X_1),\dots,D(X_n)$ 唯一确定. 而且 $\forall f(X_1,\dots,X_n)\in B$, 有公式
$D(f) = \frac{\partial f}{\partial X_1}\cdot D(X_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_n}\cdot D(X_n)$. $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ 为形式求导运算.

微分模, A-导子等概念与如下同态的提升密切相关.
给定环同态 $A\xrightarrow{\alpha}B$. 设 $N\subset C$ 为环 C 中理想, 且 $N^2=0$.
设有环同态 $B\xrightarrow{\beta}C/N$, $A\xrightarrow{\gamma}C$, 使下图交换:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] & C/N \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

称环同态 $\beta_1: B\to C$ 为 β 的一个提升, 如果 β_1 使下图 ~~中所有~~ 成为~~图表~~交换图表:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_1"] & C/N \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(即 β_1 为 A-代数同态范畴中 β 的提升)

由于 $N^2=0$, 易知 N 自然为 C/N-模, 从而通过 $\beta: B\to C/N$, N 成为 B-模. 则有如下重要性质

性质2: 设 $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1$ 如上图, 即有交换图
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_1"] & C/N \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$
则对任意 β 的提升 $\beta_2: B\to C$,
$\beta_1-\beta_2: B\to N$ 为一个 A-导子.
反之, 任给 A-导子: $D: B\to N$, 则 $\beta_1+D: B\to C$ 为 β 的一个提升.
即 β 的不同提升的差对应于导子集合 $Der_A(B,N)\simeq Hom_B(\Omega_{B/A},N)$.

证：直接验证即可. #

上述性质可用来构造 A-导子 ~~对应于~~，也可由 A-导子反过来构造不同的提升.

上述提升的存在性，唯一性给出形式光滑性的定义.

定义：设 $\alpha: A \to B$ 为环同态，称 B 相对于 A 为 0-smooth (0-unramified，或 0-étale)，如果对任意环 C 以及 C 中满足 $N^2=0$ 的理想 N，对交换图表

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] & C/N \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\nu"] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

均存在（至少存在一个，或存在唯一的）环同态 $\beta_1: B \to C$ 为 β 的提升.

注：0-smooth (0-unramified，或 0-étale) 也~~分别~~称为形式光滑（形式不分歧，或形式 étale）. 如果进一步要求 B 为有限生成 A-代数，则就是我们后面将要定义的光滑（不分歧，或 étale）概念.

关于微分模，有下面的两个基本正合列（定理3和定理5）

定理3：设 $A \to B \to C$ 为环同态，则：

(1) $\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\varphi} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\psi} \Omega_{C/B} \to 0$ (*) 为 C-模正合列.

(2) 若 C 相对于 B 为 0-smooth，则在 (1) 中正合列 (*) 中，存在 $\varphi_1: \Omega_{C/A} \to \Omega_{B/A} \otimes_B C$ 为 C-模同态使得 $\varphi_1 \circ \varphi = id$，即 (*) 为分裂~~正合~~的短正合列.

(3) 若 C 相对于 A 为 0-smooth，则 (1) 中正合列 (*) 为分裂的短正合列 $\Longleftrightarrow$ C 相对于 B 为 0-smooth.

证: (1) 复合映射 $B \to C \xrightarrow{d} \Omega_{C/A}$ 易验证为 A-导子.

从而诱导 B-模同态 $\Omega_{B/A} \to \Omega_{C/A}$ (已经通过 $B \to C$ 将 C-模 $\Omega_{C/A}$ 看作 B-模). 从而诱导 $\Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A}$ 此为 φ, 其满足 $\varphi(db \otimes c) = c \cdot db$, $\forall b \in B, c \in C$ (等式右边的 db 中, 已将 b 通过 $B \to C$ 看作 C 中元素).

同理 ψ 由自然的万有导子 $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/B}$ (为 B-导子, 从而也为 A-导子) 诱导. 满足 $\psi(dc) = dc$, $\forall c \in C$. (等式左边的 d 为 $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/A}$, 右边的 d 为 $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/B}$).

要证明正合性, 熟知只需证 $\forall$ C-模 M, 利用函子 $\mathrm{Hom}_C(\cdot, M)$ 作用于 $(*)$ 之上得到的如下序列正合:

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M)$$

而由微分模的万有性质, 以上序列等价于以下:

$$0 \to \mathrm{Der}_B(C, M) \to \mathrm{Der}_A(C, M) \to \mathrm{Der}_A(B, M)$$

而由定义可知上述序列显然正合. 故 (1) 得证. #

(2) 令 $M = \Omega_{B/A} \otimes_B C$, 定义 $C \oplus M$ 上的乘法结构为:
$(c_1, m_1) \cdot (c_2, m_2) := (c_1 c_2, c_1 m_2 + c_2 m_1)$, $\forall c_i \in C$, $m_i \in M$. 易验证这样 $C \oplus M$ 成为交换环. M 为 $C \oplus M$ 的理想且 $M^2 = 0$, 以及以下序列为短正合列:

$$0 \to M \to C \oplus M \xrightarrow{\pi} C \to 0$$
$$(c, m) \longmapsto c$$

记 $A \to B$ 为 $\alpha_1 : A \to B$, 同态 $B \to C$ 为 $\alpha_2 : B \to C$,

定义环同态 $\gamma:$
$$B \to C \oplus M$$
$$b \longmapsto (\alpha_2(b), db \otimes 1)$$

则有交换图表
$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "id"] & C \\
B \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\gamma"] & C \oplus M \arrow[u, "\pi"'] \\
A \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\gamma\circ\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

由于 C 相对于 B 为 0-smooth，从而存在同态 $\beta: C \to C\oplus M$

使图表
$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\beta"] & C \\
B \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\gamma"'] & C \oplus M \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}
$$
交换.

令 $\beta_1: C \to C\oplus M$，$c \mapsto (c, 0)$ 为环同态，则易知 β_1 和 β 均为

下图中 id 的提升：
$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "id"] \arrow[dr, dashed, "\beta_1"] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & C \\
A \arrow[u, "\alpha_2\circ\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma\circ\alpha_1"] & C \oplus M \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}
$$

从而由性质2得 A-导子：$\beta - \beta_1: C \to M$

再由微分模 $\Omega_{C/A}$ 的万有性质，$\beta-\beta_1$ 诱导 C-模同态

$\varphi_1: \Omega_{C/A} \to M = \Omega_{B/A}\otimes_B C$，易验证 $\varphi_1\circ\varphi = id$. 故 (*)

为分裂的短正合列. #

(3) 假设 C 相对于 A 为 0-smooth，若 (*) 分裂，则存在 C-模同态

$\varphi_1: \Omega_{C/A} \to \Omega_{B/A}\otimes_B C$，使 $\varphi_1\circ\varphi = id$，我们需证 C 相对于 B 为 0-smooth.

为此，设 $N \subset P$ 为环 P 中理想，$N^2=0$，给定环同态 $\beta: C \to P/N$

和 $\gamma: B \to P$ 使下图交换
$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\beta"] & P/N \\
B \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\gamma"] & P \arrow[u] \\
A \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[ur, "\gamma\circ\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

由于 C 相对于 A 为 0-smooth，存在同态 $\beta_1: C \to P$，使下图交换

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_1"] & P/N \\ A \arrow[u, "\alpha_2\circ\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma\circ\alpha_1"'] & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

，如果 $\gamma = \beta_1\circ\alpha_2$，则 β_1 即为 β 的（相对于B）的提升，否则令 $\delta = \gamma - \beta_1\circ\alpha_2$，则由于 γ 和 $\beta_1\circ\alpha_2$ 均使下图交换

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta\circ\alpha_2"] \arrow[dr, dashed, "\beta_1\circ\alpha_2"] \arrow[dr, dashed, "\gamma"'] & P/N \\ A \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma\circ\alpha_1"'] & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

从而 $\delta = \cancel{\gamma\circ\beta}\ \gamma - \beta_1\circ\alpha_2 : B \longrightarrow N$ 为一个 A-导子.

对应一个 B-模同态 $\varphi_\delta : \Omega_{B/A} \longrightarrow N$

由于 N 为 C-模，φ_δ 可视为 C-模同态 $\Omega_{B/A}\otimes_B C \longrightarrow N$

从而复合 φ_1 得 C-模同态 $\varphi_\delta\circ\varphi_1 : \Omega_{C/A} \longrightarrow N$

$\varphi_\delta\circ\varphi_1$ 对应一个 A-导子 $D: C \longrightarrow N$.

令 $\beta_2 = \beta_1 + D$，则易验证下图交换：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_2"] & P/N \\ B \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\gamma"'] & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

，即 β_2 为 β 的（相对于B）提升，从而证明了 C 相对于B 为 0-smooth. #

~~设 $A \to B$ 为环同态，S 为 B 中一个乘法集，易验证 $B \to B_S$ 为 0-smooth~~，

性质4：(1) $A \to B$ 为 0-unramified $\Longleftrightarrow$ $\Omega_{B/A} = 0$

(2) $A \to B$ 为 0-étale $\Longleftrightarrow$ $A \to B$ 为 0-smooth 且 $\Omega_{B/A} = 0$.

证：(1) "$\Longrightarrow$" 令 $M=\Omega_{B/A}$，作环 $B\oplus M$，其中乘法为

$$(b_1,m_1)\cdot(b_2,m_2)=(b_1b_2,\ b_1m_2+b_2m_1),\quad \forall b_i\in B,\ m_i\in M$$

则 M 为 $B\oplus M$ 中理想且 $M^2=0$.

令 $\beta:\ B\longrightarrow B\oplus M$ 为环同态

$\qquad\quad b\longmapsto (b,0)$

$\beta_1:\ B\longrightarrow B\oplus M$ 为环同态

$\qquad\quad b\longmapsto (b,db)$

易知 β 和 β_1 均使下图交换

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "id"] \arrow[dr, dashed, shift left, "\beta_1"] \arrow[dr, dashed, shift right, "\beta"'] & B \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B\oplus M \arrow[u] \end{tikzcd}$$

从而由 B 相对于 A 为 0-unramified 知 $\beta_1=\beta$

故 $d=\beta_1-\beta=0:\ B\longrightarrow M=\Omega_{B/A}$

而 $\Omega_{B/A}$ 由 $\{db\mid b\in B\}$ 生成（作为 B-模），故 $\Omega_{B/A}=0$.

"$\Longleftarrow$" 由性质2即得.

(2) 由定义，0-étale $\Longleftrightarrow$ 0-smooth + 0-unramified，从而

由(1)知(2)成立.

\#

例：设 S 为环 B 中一个乘法子集，$B\to B_S$ 为局部化，

易验证 B_S 相对于 B 为 0-étale，从而 0-smooth.

设 $A\to B$ 为环同态. 由定理3(2)知

$$0\to\Omega_{B/A}\otimes_B B_S\to\Omega_{B_S/A}\to\Omega_{B_S/B}\to 0 \quad 短正合,$$

而由 B_S 相对于 B 为 0-étale 知 $\Omega_{B_S/B}=0$

故得 $\Omega_{B/A}\otimes_B B_S=S^{-1}\Omega_{B/A}\simeq\Omega_{B_S/A}$

即微分模与作局部化交换.

微分模的另一个良好性质是与基变换相容. 具体地说, 若 $A\to B$, $A\to A_1$ 为环同态, 令 $B_1=A_1\otimes_A B$, 则有交换环的卡氏图表:

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \leftarrow & B \\ \uparrow & \square & \uparrow \\ A_1 & \leftarrow & A \end{array}.$$

则有 B_1-模同态: $\Omega_{B_1/A_1}\simeq B_1\otimes_B\Omega_{B/A}\simeq A_1\otimes_A\Omega_{B/A}$.

证明是容易的. 只需利用万有性质构造两个方向的同态即可.

下面叙述微分模的另一个基本正合列.

定理5: 设 $A\to B$ 为环同态. $I\subset B$ 为理想. $C=B/I$. $B\to C$ 为自然的商同态.

(1) $I/I^2 \underset{\psi}{\xrightarrow{\varphi}} \Omega_{B/A}\otimes_B B/I \underset{\varphi}{\xrightarrow{\psi}} \Omega_{C/A}\to 0$ $\overbrace{}^{(**)}$ 为 C-模正合列.

(2) 若 C 相对于 A 为 0-smooth. 则(1)中正合列(**)为分裂的短正合列.

(3) 若 B 相对于 A 为 0-smooth. 则 (1) 中正合列(**)为分裂的短正合列 $\Leftrightarrow$ C 相对于 A 为 0-smooth.

证: (1) 同态 φ 如下定义:

$$\begin{array}{ccc} I/I^2 & \xrightarrow{\varphi} & \Omega_{B/A}\otimes_B C \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{i} & \longmapsto & di\otimes 1 \end{array}$$

其中 $\bar{i}\in I/I^2$, $i\in I$ 为 $\bar{i}$ 的任一代表元.

同态 ψ 在定理3中已经定义过

同定理3(1)证明方法一样, 只需证要证明(**)正合.

对任意 C-模 M，以下序列正合：

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A}\otimes_B C, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(I/I^2, M) \\
\wr\!\!\| & & \wr\!\!\| & & \\
\mathrm{Der}_A(C, M) & & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) & & \\
 & & \wr\!\!\| & & \\
 & & \mathrm{Der}_A(B, M) & &
\end{array}
$$

而由以上 A-导子的解释容易验证以上序列正合 #.

(2) 记 $\alpha_1 : A \to B$，构造以下交换图表：

$$
\begin{tikzcd}
B/I \arrow[r, "id"] & B/I \\
B \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
A \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma\circ\alpha_1"'] & B/I^2 \arrow[uu, "\pi"']
\end{tikzcd}
$$

其中 α_2，γ 均为自然商映射。

$\pi : B/I^2 \to B/I$ 为自然商映射.

$\ker \pi = I/I^2$.

由于 B/I 相对于 A 为 0-smooth，存在 $\beta : B/I \to B/I^2$ 使下图交换

$$
\begin{tikzcd}
B/I \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\beta"] & B/I \\
A \arrow[u, "\alpha_2\circ\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma\circ\alpha_1"'] & B/I^2 \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}
$$

从而 γ 和 $\beta\circ\alpha_2$ 均使下图交换

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[dr, dashed, bend left, "\beta\circ\alpha_2"] \arrow[dr, dashed, "\gamma"'] & B/I \\
A \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma\circ\alpha_1"'] & B/I^2 \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}
$$

从而 $\gamma - \beta\circ\alpha_2 : B \to I/I^2$ 为 A-导子.

诱导 B-模同态 $\Omega_{B/A} \to I/I^2$，进而诱导 C-模同态

$\psi_1 : \Omega_{B/A}\otimes_B C \to I/I^2$. 易验证 $\psi_1\circ\psi = id$. 故

(**) 分裂短正合 #

(3) 若 B 相对于A为 0-smooth. 且存在 $\psi_1 : \Omega_{B/A}\otimes_B C \longrightarrow I/I^2$

使 $\psi_1\circ\psi = id$. ~~ψ_1对应一个A-导子 $D: B\longrightarrow I/I^2$ 使得~~

设 $N\subset P$ 为环 P 中理想且 $N^2=0$. 设有交换图

$$\begin{tikzcd} B/I \arrow[r] & P/N \\ B \arrow[u] & \\ A \arrow[u] \arrow[r] & P \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

由 B相对于A为 0-smooth. 知存在 $\beta : B\longrightarrow P$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} B/I \arrow[r] & P/N \\ B \arrow[u] \arrow[r, "\beta"] & \\ A \arrow[u] \arrow[r] & P \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

由交换性知 $\beta(I)\subset N$, 由 $N^2=0$ 知 β 诱导 $\beta_1 : I/I^2 \longrightarrow N$, $i \longmapsto \beta(i)$

β_1为 B/I-模同态. 从而复合同态 $\beta_1\circ\psi_1 : \Omega_{B/A}\otimes_B C\longrightarrow N$

诱导 A-导子 $D: B\longrightarrow N$

这样 $\beta_2 := \beta - D : B\longrightarrow P$ 为环同态, 满足 $\beta_2(I)=0$

且

$$\begin{tikzcd} B/I \arrow[r] & P/N \\ B \arrow[u] \arrow[dr, "\beta_2"] & \\ A \arrow[u] \arrow[r] & P \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

交换. 由于 $\beta_2(I)=0$. 知 β_2可看作同态

$\beta_2 : B/I \longrightarrow P$. 且下图交换

$$\begin{tikzcd} B/I \arrow[r] \arrow[ddr, "\beta_2"] & P/N \\ B \arrow[u] & \\ A \arrow[u] \arrow[r] & P \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

由此知 $B/I = C$ 相对于A为 0-smooth. #

推论6：设 k 为域，$k \to A$ 为环同态，(A, m) 为局部环，且 $k \to A/m$ 为同构。则有 $m/m^2 \simeq \Omega_{A/k} \otimes_A A/m$

证：将定理5中的基本正合列应用于 $k \to A \to A/m$ 即可。并注意到由 $k \to A/m$ 为同构，A/m 相对于 k 自然为 0-étale，从而 $\Omega_{(A/m)/k} = 0$。 #

注：该推论说明了微分模与余切空间的联系。

练习：利用定义证明：(1) 若 $A \to B$，$B \to C$ 均为 0-smooth（或 0-étale），则复合同态 $A \to C$ 也为 0-smooth（或 0-étale）。
(2) 若 $A \to B$ 为 0-étale，$B \to C$ 为环同态，复合 $A \to C$ 为 0-smooth，则 $B \to C$ 为 0-smooth。

定义：设 $A \to B$ 为环同态，且 B 作为 A-代数是有限生成的，且 A 为 Noether 环。称 B 相对于 A 为 ~~光滑~~ smooth（unramified，或 étale），如果 B 相对于 A 为 0-smooth（0-unramified，或 0-étale）。设 $q \subset B$ 为 B 的素理想，$p = q \cap A$ 为拉回素理想。称 B 相对于 A 在点 q 处 smooth（unramified，或 étale），如果 B_q 相对于 A_p 为 0-smooth（0-unramified，或 0-étale）。

注：由于 A_p 相对于 A 为 0-étale，故由上面练习的 (2)，知 B_q 相对于 A_p 为 0-smooth $\Leftrightarrow$ B_q 相对于 A 为 0-smooth。

注：为方便计，我们有时也将"B 相对于 A 为 0-smooth"记为"B/A 为 0-smooth"。类似地，有"B/A 为 smooth"，"B/A 在 q 点 smooth"等记号。

~~性质7~~

设 A 为 Noether 环，则多项式环 $A[X_1,\cdots,X_n]$ 相对于 A 为 smooth，且对 $B=A[X_1,\cdots,X_n]$ 中任一素理想 q，B/A 在 q 点 smooth.

这是 smooth 态射的基本例子，证明是容易的

定理7：设 A 为 Noether 环，$C=B/I$ 为有限生成 A-代数

其中 $B=A[X_1,\cdots,X_n]$ 为多项式环.

(1) C/A 为 smooth $\Longleftrightarrow$ 基本正合列 $I/I^2\to\Omega_{B/A}\otimes_B C\to\Omega_{C/A}\to 0$ 为分裂的短正合列.

(2) 设 $q\subset C$ 为素理想，则 C/A 在 q 点处 smooth $\Longleftrightarrow$ (1) 中基本正合列在 q 点处的局部化

$$\begin{array}{ccccccc}(I/I^2)_q & \to & (\Omega_{B/A}\otimes_B C)_q & \to & (\Omega_{C/A})_q & \to & 0\\ \| & & \| & & \| & & \\ I_q/I_q^2 & & \Omega_{B_q/A}\otimes_{B_q} C_q & & \Omega_{C_q/A} & & \end{array}$$

为分裂的短正合列.

(3) C/A 为 smooth $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 素理想 $q\subset C$，C/A 在点 q 处 smooth

证：(1)，(2) 均由定理5的(3)得到.

(3) 由以下引理即得. #

引理8：设 A 为环，$M_1\to M_2\to M_3$ 为 A-模复形，则该复形为分裂的短正合列 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ A 中素理想 $p\subset A$，局部化 $M_{1p}\to M_{2p}\to M_{3p}$ 为 A_p-模的分裂短正合列.

证：由 A-模 $M=0 \Longleftrightarrow \forall p\in \operatorname{Spec}A$，$M_p=0$ 即知 $M_1\to M_2\to M_3$ 为短正合列 $\Longleftrightarrow \forall p\in\operatorname{Spec}A$，$M_{1p}\to M_{2p}\to M_{3p}$ 为短正合列.

再考虑分裂性，从而可设 $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ 为 A-模短正合列，只需证其分裂当且仅当在每个素理想处局部化为分裂的短正合列.

为此，注意到短正合列 $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ 对应于A-模 $\mathrm{Ext}^1_A(M_3, M_1)$ 中的一个元素 α，而该短正合列分裂 $\Longleftrightarrow$ $\alpha=0$. 又由于 $\forall \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}A$，短正合列 $0\to M_{1\mathfrak{p}}\to M_{2\mathfrak{p}}\to M_{3\mathfrak{p}}\to 0$ 对应的 $\mathrm{Ext}^1_{A_\mathfrak{p}}(M_{3\mathfrak{p}}, M_{1\mathfrak{p}})\simeq \left(\mathrm{Ext}^1_A(M_3, M_1)\right)_\mathfrak{p}$ 中的元素即为 α 在自然同态 $\mathrm{Ext}^1_A(M_3, M_1)\to\left(\mathrm{Ext}^1_A(M_3, M_1)\right)_\mathfrak{p}$ 下的像. 从而由 $\alpha=0$ 当且仅当 $\forall \mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}A$, α 在 $\left(\mathrm{Ext}^1_A(M_3, M_1)\right)_\mathfrak{p}$ 中为0 即得所需结论. #

为了具体判断定理7 (2) 中的条件，我们需要以下引理.

引理9：设 $(A, \mathfrak{m})$ 为局部环，$k=A/\mathfrak{m}$ 为剩余类域，M_2为有限秩自由A-模，~~M_1, M_2~~ $\varphi: M_1\to M_2$ 为有限生成A-模间的一个A-模同态. 则存在 $\psi: M_2\to M_1$，使得 $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}$ 当且仅当 $\varphi\otimes 1: M_1\otimes_A k\to M_2\otimes_A k$ 为 k-线性空间的单射.

证：若存在 $\psi: M_2\to M_1$，使 $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}$，则显然 $\psi\otimes1\circ\varphi\otimes1=\mathrm{id}$，从而 $\varphi\otimes1$ 为单射.

反之，设 $\varphi\otimes1: M_1\otimes_A k\to M_2\otimes_A k$ 为单射，则可找到 k-线性空间映射 $\bar\psi_1: M_2\otimes_A k\to M_1\otimes_A k$，使 $\bar\psi_1\circ\varphi\otimes1=\mathrm{id}$. 由于 M_2 为自由A-模，显然可取一个A-模同态 $\psi_1: M_2\to M_1$ 使得 $\psi_1\otimes1=\bar\psi_1: M_2\otimes_A k\to M_1\otimes_A k$，这样 $(\psi_1\circ\varphi)\otimes1=\mathrm{id}: M_1\otimes_A k\to M_1\otimes_A k$ 为满射. 从而由 Nakayama 引理，$\psi_1\circ\varphi: M_1\to M_1$ 为满射. 由于 M_1 为有限生成A-模，根据 Matsumura《Commutative Ring Theory》Theorem 2.4，知 $\psi_1\circ\varphi$ 为 M_1 的自同构. 故 $\psi=(\psi_1\circ\varphi)^{-1}\circ\psi_1$ 即为所求. #

将引理9应用到定理7(2)，即得如下重要且实用的：

定理10 (Jacobian Criterion)：

设 A 为 Noether 环，$B=A[X_1,\cdots,X_n]$ 为多项式环，$I\subset B$ 为 B 中理想，$C=B/I$ 为 A 上的有限生成代数，$q\subset B$ 为 B 中素理想且 $I\subset q$，从而也将 q 视作 C 中素理想。记 $\kappa(q)=\dfrac{B_q}{qB_q}=\dfrac{C_q}{qC_q}$ 为 q 处的剩余类域。则 C/A 在点 q 处 smooth $\Longleftrightarrow$ $\kappa(q)$-线性映射

$$\begin{array}{ccc} I\otimes_B \kappa(q) & \longrightarrow & \Omega_{B/A}\otimes_B \kappa(q)=\kappa(q)dX_1\oplus\cdots\oplus\kappa(q)dX_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(X_1,\cdots,X_n) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial X_1}(q)\,dX_1+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial X_n}(q)\,dX_n \end{array}$$

为单射 $\Longleftrightarrow$ 存在 I_q 作为 B_q 的理想的一组生成元 $f_1,\cdots,f_m\in I_q$，使得在 q 点的 Jacobian 矩阵 $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(q) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}(q) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1}(q) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n}(q) \end{bmatrix}$ 作为 $\kappa(q)$ 上的 $m\times n$ 矩阵为行满秩的。

(其中对一个 $f\in B$ 或 B_q，$\frac{\partial f}{\partial X_i}(q)\in\kappa(q)$ 是指形式导数 $\frac{\partial f}{\partial X_i}\in B$ 或 B_q 在点 q 处的"取值")。

证：注意到 $\Omega_{B/A}=B\cdot dX_1\oplus\cdots\oplus B\cdot dX_n$ 为自由 B-模，且定理7中的同态 $I/I^2\longrightarrow\Omega_{B/A}$ 具有形式 $f\longmapsto\frac{\partial f}{\partial X_1}dX_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_n}dX_n$ 即可。 #

例：设 $n \geq 1$，考虑 $C = \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^n-1)}$，若 p 为素数，$p \nmid n$，则在 C 的素理想 ~~$q=(p,X-1)$~~ $q=(p, X-1)$ 处，$C/\mathbb{Z}$ 为 smooth.

因为在 q 处，$d(X^n-1) = nX^{n-1}(q)dX = n\,dX \in \mathbb{F}_p dX$.

而由 $p \nmid n$ 知 $n\,dX \neq 0 \in \mathbb{F}_p dX$. 又 X^n-1 显然为 $I=(X^n-1)$ 在 q 处的生成元. 故由 Jacobian criterion 知 $C/\mathbb{Z}$ 在 q 处 smooth.

例：更一般地，设 A 为 Noether 环，$f(X) \in A[X]$.

令 $C = \frac{A[X]}{(f(X))}$，则 C/A 不一定光滑. 但 C 的局部化环 $C_{f'(X)} = \left(\frac{A[X]}{(f(X))}\right)_{f'(X)}$ 一定相对于 A 为 smooth.

这由 Jacobian criterion 可得. 也可由 ~~0-smooth~~ 0-étale 的定义直接验证 $C_{f'(X)}$ 相对于 A 为 0-étale. 故 $C_{f'(X)}$ 相对于 A 实际上为 étale. Zariski Main Theorem 的一个推论是说任何 étale 态射在局部上一定是 $C_{f'(X)}/A$ 的形式.

由于 Noether 环上有限生成自由模的直和项仍为局部自由模. 由定理 7 知若 $C = \frac{A[X_1, \cdots, X_n]}{I}$ 相对于 A 为 smooth，则 C-模 I/I^2 和 $\Omega_{C/A}$ 均为有限生成的局部自由模. I/I^2 可以认为是 $\operatorname{Spec} C$ 作为 $\operatorname{Spec} A[X_1, \cdots, X_n] = \operatorname{Spec} A \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n] = \mathbb{A}^n_A$ 中闭子概型的余法丛. 而定理 7 的正合列即为子空间 $\operatorname{Spec} C$ 嵌入大空间 $\operatorname{Spec} A[X_1, \cdots, X_n]$ 时联系余法丛，余切丛之间关系的正合列.

下面将前面的讨论用几何语言叙述.

定义: 设 $X \xrightarrow{f} S$ 为概型间的 of finite type 态射, S 为 locally Noetherian scheme. $x \in X$, $s \in S$, 且 $s = f(x)$. 称 f 在 x 点 smooth (unramified, étale), 如果 $\mathcal{O}_{X,x} / \mathcal{O}_{S,s}$ 为 smooth (unramified, étale). 如果 $\forall x \in X$, f 在 x 点 smooth (unramified, étale), 则称 f 为 smooth (unramified, étale) 态射.

性质11: (1) 设 $X = \mathrm{Spec}\, C \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\, A$ 为仿射 Noether scheme 之间的 of finite type 态射. 则 f 为 smooth 态射 $\Longleftrightarrow$ C/A 为 smooth.

(2) 记号同(1), 则 f 为 étale 态射 $\Longleftrightarrow$ f 为 smooth 态射 且 $\Omega_{C/A} = 0$.

(3) 设有 scheme 间态射的交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & S & \end{array}$$

S 为 locally Noetherian scheme. 若 f 为 smooth 态射, 且 g 为 étale 态射, 则 φ 为 smooth 态射; 若 f 和 g 均为 étale 态射, 则 φ 也为 étale 态射.

证: (1) 由定理7(3)即得.

(2) 由 0-étale $\Longleftrightarrow$ 0-smooth + 0-unramified, 以及 0-unramified $\Longleftrightarrow \Omega_{C/A} = 0$ 即得.

(3) 由于 smooth (étale) 均为局部性质. 不仿设 X, Y, S 均为仿射的. 从而不难由 0-smooth (0-étale) 的定义得到 φ 为 0-smooth 或 0-étale. 再由 f 为 of finite type 知 φ 总为 of finite type. 证 φ 为 smooth 也可由定理3(3)得到. #

性质12：设 $f: X \to S$ 为 locally Noetherian scheme 间的 of finite type 态射，$x \in X$. f 在 x 处 smooth，则存在 x 的开邻域 $U \subset X$，使得 f 在 U 上为 smooth 态射.

证：转化为仿射概型态射后利用定理10，注意到 Jacobian criterion 中的条件为开条件，即若在一点 x 处成立，则必在 x 的一个 Zariski 开邻域上成立. #

下面研究光滑态射与纤维的正则性的关系. 为此，先介绍几个常用概念.

定义：设 $f: X \to S$ 为 scheme 间态射. $x \in X$，$s = f(x) \in S$. 称 f 在点 x 处为 flat 态射，如果 $\mathcal{O}_{X,x}$ 为平坦的(flat) $\mathcal{O}_{S,s}$-模. 如果 $\forall x \in X$，f 在 x 处 flat，则称 f 为 flat 态射.

容易验证 $f: X \to S$ 为 flat 态射 $\Leftrightarrow$ $\forall$ X 中仿射开集 $\operatorname{Spec} B$，$\forall$ S 中仿射开集 $\operatorname{Spec} A$，~~均有 B为平坦~~ 若 $f(\operatorname{Spec} B) \subset \operatorname{Spec} A$，则 B 为平坦 A-模 $\Leftrightarrow$ 存在 S 的仿射开覆盖 $S = \bigcup_i U_i$ 以及 $\forall i$，存在 $f^{-1}(U_i)$ 的仿射开覆盖 $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$，使得 $\forall i, j$，$\mathcal{O}_X(V_{ij})$ 为平坦 $\mathcal{O}_S(U_i)$-模.

定义：设 $f: X \to S$ 为态射. $s \in S$. ~~则称~~ $\kappa = \kappa(s)$ 为 s 处剩余类域，$\bar{\kappa}$ 为 κ 的代数闭包. 则称 $X_\kappa := \operatorname{Spec} \kappa(s) \times_S X$ 为 X 在 s 处的纤维(fiber)，而 $X_{\bar{\kappa}} := \operatorname{Spec} \bar{\kappa} \times_S X$ 为 X 在 s 处的几何纤维(geometric fiber). 即有如下卡氏图.

$$
\begin{tikzcd}
X_{\bar{\kappa}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\kappa \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \bar{\kappa} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \kappa \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

关于 Smooth 态射的另一个基本刻画为:

定理13: 设 $f: X \to S$ 为 locally Noetherian scheme 间的 of finite type 态射. 则 f 为 smooth 态射 $\Longleftrightarrow$ f 为 flat 态射且 $\forall s \in S$, X 在 s 处的几何纤维为正则概型.

(一个 scheme Y 称为正则 (regular) scheme, 如果 $\forall y \in Y$, $\mathcal{O}_{Y,y}$ 为正则局部环).

注: 定理13中将"几何纤维"换为"纤维"是不行的. 例如 $S = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p(x)$ 为 $\mathbb{F}_p$ 上的函数域. 而 $X = \operatorname{Spec} L$.

$L = \dfrac{\mathbb{F}_p(x)[T]}{(T^p - x)}$ 为 $\mathbb{F}_p(x)$ 的一个纯不可分扩张域. 则 X 显然为正则 scheme. 而 $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}_p(x)} \times_S X = \operatorname{Spec} \dfrac{\overline{\mathbb{F}_p(x)}[T]}{(T - x^{\frac{1}{p}})^p}$ 不是正则 scheme.

注: smooth (étale, unramified) 态射在基变换下是稳定的 (stable under base change), 即若有 locally Noetherian scheme 的卡氏图

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & \square & \downarrow {\scriptstyle f} \\ S_1 & \longrightarrow & S \end{array}$$

, 且 f 为 smooth (étale, unramified) 态射, 则 f_1 也为 smooth (étale, unramified) 态射.

证明留作练习

为证明定理13, 我们需要几个引理. 来刻画代数闭域上有限型概型何时正则, 以及如何判断正则概型的闭子概型还是正则的. ~~同时~~ 再刻画一个平坦模的商模何时平坦.

引理 14：设 k 为代数封闭域，且 $X \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k$ 为 of finite type 态射，则 f 为 smooth 态射 $\Leftrightarrow$ X 为正则 scheme.

注：此引理说明在代数封闭域 k 上，一个 of finite type scheme 是正则 scheme $\Leftrightarrow$ smooth over $\operatorname{Spec} k$.

证：不妨设 X 为仿射的，由于正则局部环在任一素理想处作局部化仍为正则局部环（见 Matsumura.《Commutative Ring Theory》, Theorem 19.3），故只需证：若 $x \in X$ 为闭点，则 f 在 x 处 smooth $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$ 为正则局部环.

设 $X = \operatorname{Spec} C$，而 $C = B/I$，$B = k[x_1, \dots, x_n]$ 为多项式环，$m \subset B$ 为极大理想，且 $I \subset m$，从而将 m 视作 C 中极大理想，易由 Hilbert 零点定理知 m 处剩余类域 $\kappa(m) \simeq k$，故由推论 6 知 $\Omega_{B/k} \otimes_B \kappa(m) \simeq \frac{m}{m^2}$.

从而由 Jacobian criterion 知 C/k 在 m 处 smooth $\Leftrightarrow$ 存在 I_m 作为 B_m 理想的一组生成元 $f_1, \dots, f_l$，使得 $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_l \in \frac{m}{m^2}$ 为 $\kappa(m) \simeq k$ 线性无关的. #

从而引理 14 的证明约化为如下的引理.

引理 15：设 (B, m) 为正则局部环，$I \subset m$ 为 B 中理想，则 $C = B/I$ 为正则局部环 $\Leftrightarrow$ I 有一组生成元 $f_1, \dots, f_l$，使得 $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_l \in \frac{m}{m^2}$ 为 $\kappa(m)$-线性无关的.

如果以上条件成立，则 $\forall i = 1, \dots, l$，$\frac{B}{(f_1, \dots, f_i)}$ 为正则局部环，且乘 f_{i+1} 的映射 $f_{i+1}: \frac{B}{(f_1, \dots, f_i)} \longrightarrow \frac{B}{(f_1, \dots, f_i)}$，$a \longmapsto f_{i+1} \cdot a$ 为单射，且

$$\dim \frac{B}{(f_1, \dots, f_i)} = \dim B - i.$$

证：注意到正则局部环均为整环（实际上为唯一因子分解整环，见 Matsumura，《Commutative Ring Theory》，Theorem 20.3）．再利用对个数 l 归纳即可． #

一般地，若一个环 B 中有一组元素 $(f_1,\cdots,f_l)$，满足：

乘 f_1 的映射 $f_1: \begin{array}{l} B \to B \\ b \mapsto f_1 \cdot b \end{array}$ 为单射．且 $\forall i=2,\cdots,l$，

乘 f_i 的映射 $f_i: \dfrac{B}{(f_1,\cdots,f_{i-1})} \longrightarrow \dfrac{B}{(f_1,\cdots,f_{i-1})}$ 为单射．则称有序组 $(f_1,\cdots,f_l)$ 为 B 中正则序列（regular sequence）．

上述~~定理~~引理说明若 (B,m) 为正则局部环．$I\subset m$．且 B/I 仍为正则局部环．则 I 可由 B 的~~一组~~一个正则序列生成．

下面的引理给出如何判断平坦~~模的~~代数的商还是平坦的．

引理16：设 $(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为局部 Noether 环的局部同态．$f_1,\cdots,f_l\in n$．满足

B 为平坦 A-模（即平坦 A-代数）．

$\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_l$ 为 $B\otimes_A \kappa(m)=\dfrac{B}{mB}$ 中的一个正则序列．

则 $\dfrac{B}{(f_1,\cdots,f_l)}$ 为平坦 A-代数．

证：对个数 l 作归纳．我们只证 $l=1$ 的情形．一般情况归纳即得．

要证 $\dfrac{B}{(f_1)}$ 为平坦 A-模．应用 local flatness criterion（见 Matsumura，《Commutative Ring Theory》，Theorem 22.3，尤其是 $(1)\Leftrightarrow(3')$）．

只需证 $\mathrm{Tor}_1^A\left(\kappa(m),\dfrac{B}{(f_1)}\right)=0$

记乘 f_1 的映射 $f_1: B\to B$ 的像为 $B_1 := f_1B$，则有交换图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_1"'] & B \\ B_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

，作用函子 $\cdot\otimes_A \kappa(m)$ 得

$$\begin{tikzcd} B\otimes_A \kappa(m) \arrow[r, "\bar{f}_1"] \arrow[d, "\bar{f}_1"'] & B\otimes_A \kappa(m) \\ B_1\otimes_A \kappa(m) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

~~由于~~

由于 $B\otimes_A \kappa(m) \xrightarrow{\bar{f_1}} B\otimes_A \kappa(m)$ 为单射. $B\otimes_A \kappa(m) \xrightarrow{\bar{f_1}} B_1\otimes_A \kappa(m)$ 为满射, 知 $B_1\otimes_A \kappa(m) \longrightarrow B\otimes_A \kappa(m)$ 为单射. 而对短正合列 $0\to B_1 \longrightarrow B \to \frac{B}{(f_1)} \to 0$ 应用 $\mathrm{Tor}^A(\kappa(m), \cdot)$ 函子的长正合列得如下正合列:

$$\mathrm{Tor}_1^A(\kappa(m), B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(\kappa(m), \frac{B}{(f_1)}) \longrightarrow B_1\otimes_A \kappa(m) \longrightarrow B\otimes_A \kappa(m)$$

由 B 在 A 上平坦知 $\mathrm{Tor}_1^A(\kappa(m), B)=0$. 故由上正合列知

$\mathrm{Tor}_1^A(\kappa(m), \frac{B}{(f_1)}) = 0$. #

(比较 Matsumura «Commutative Ring Theory», Theorem ~~23~~ 22.5, 以上证明方法实际上给出该书 Theorem 22.5 的另一种证法).

现在可以给出定理 13 的证明.

定理 13 (证明): 易见不妨设 $S=\mathrm{Spec}\,A$, $X=\mathrm{Spec}\,C$, $B=A[x_1,\cdots,x_n]$. (A, m) 为 Noether 局部环, 而 $C=B/I$.

记 $\kappa = A/m$, $\bar\kappa$ 为 κ 的代数闭包.

记 $C_\kappa = \kappa\otimes_A C$, $C_{\bar\kappa} = \bar\kappa\otimes_A C$. 则 ~~Spec~~ 有下面的卡氏图.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}\,C_{\bar\kappa} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,C_\kappa & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,C \\
\downarrow & \square & \downarrow & \square & \downarrow f \\
\mathrm{Spec}\,\bar\kappa & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,\kappa & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,A
\end{array}$$

即 $\mathrm{Spec}\,C_\kappa$ 为 X 在 S 中闭点处的纤维. 而 $\mathrm{Spec}\,C_{\bar\kappa}$ 为几何纤维.

"⇒" 若 f: Spec $C \longrightarrow$ Spec A 为 smooth 态射. 我们只需要证明闭点处的几何纤维 Spec $C_{\bar{k}}$ 为正则 scheme, 且 f 在 Spec A 的闭点处的纤维上任一点处为 flat 态射.

为此, 注意到 smooth 态射在基变换下稳定, 从而 Spec $C_{\bar{k}} \to$ Spec $\bar{k}$ 为 smooth 态射. 再由引理14即知 Spec $C_{\bar{k}}$ 为正则 scheme.

任取一点 $q \in$ Spec C, 且 $f(q) = m \in$ Spec A (在此, 我们在符号上将仿射 scheme 上点与素理想不作区分). 由于 $C = B/I$ 我们将 q 也看作 Spec B 上的点. 有下图.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec}\kappa(q) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} B_k \arrow[rr] \arrow[d] & & \operatorname{Spec} B \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[rr] \arrow[urr, phantom, "\square"] & & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

其中 $B_k = k \otimes_A B = \dfrac{B}{mB}$. $\kappa(q) = \dfrac{B_q}{qB_q} = \dfrac{(B_k)_q}{q(B_k)_q}$.

故 $$\Omega_{B/A} \otimes_B \kappa(q) = \Omega_{B_q/A} \otimes_{B_q} \kappa(q) = \Omega_{B_k/k} \otimes_{B_k} \kappa(q) = \Omega_{(B_k)_q/k} \otimes_{(B_k)_q} \kappa(q)$$

由于 f 为 smooth. 由 Jacobian criterion 知存在 $I_q \subset B_q$ 的生成元 $f_1, \dots, f_l \in I_q$ 使得 $df_1, \dots, df_l$ 在 $\Omega_{B_q/A} \otimes_{B_q} \kappa(q) = \Omega_{(B_k)_q/k} \otimes_{(B_k)_q} \kappa(q)$ 中线性无关. 注意到 $(B_k)_q = \dfrac{B_q}{mB_q}$, 记其极大理想为 $n = \dfrac{qB_q}{mB_q}$. 则有~~映~~ $\kappa(q)$-线性映射

$$\frac{n}{n^2} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{(B_k)_q/k} \otimes_{(B_k)_q} \kappa(q)$$

且 $df_i = \varphi(\bar{f_i})$, $i = 1, \dots, l$. 故由 $df_1, \dots, df_l$ 线性无关知 $\bar{f_1}, \dots, \bar{f_l}$ 在 $\dfrac{n}{n^2}$ 中线性无关.

从而由引理15知 $f_1,\cdots f_l$ 在 $\frac{B_q}{mB_q}$ 中为正则序列. 又由 ~~B_q 为正则局部环. 且~~ B_q 为平坦 A-模, 由引理16即知 $\frac{B_q}{(f_1,\cdots f_l)} = \frac{B_q}{I_q} = C_q$ 为平坦 A-模.

"$\Leftarrow$" 记 $B_{\bar{k}} = \bar{k}\otimes_A B = \bar{k}[x_1,\cdots x_n]$. 由 $C=\frac{B}{I}$ 知

$$C_{\bar{k}} = \frac{B_{\bar{k}}}{I\cdot B_{\bar{k}}}$$

. 考虑A-模短正合列:

$$0\to I \to B \to C \to 0$$

由 C 为平坦 A-模知 $0\to \bar{k}\otimes_A I \to B_{\bar{k}} \to C_{\bar{k}} \to 0$ 为短正合列. 故有同构 $\bar{k}\otimes_A I \simeq IB_{\bar{k}}$.

任取 $q\in \operatorname{Spec} C$ 且 $f(q)=m\in \operatorname{Spec}A$. 设 $q'\in \operatorname{Spec} C_{\bar{k}}$ 映到 $q\in\operatorname{Spec}C$, 即有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\kappa(q') \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\kappa(q) \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} C_{\bar{k}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} C \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\bar{k} \arrow[r] & \operatorname{Spec}A
\end{tikzcd}$$

则在 q 点处的 $\kappa(q)$-线性映射

$$\varphi:\ \frac{I_q}{I_q^2}\otimes_{B_q}\kappa(q) = I\otimes_B \kappa(q) \longrightarrow \Omega_{B/A}\otimes_B \kappa(q)$$

通过拉回到 q' 点处得 $\kappa(q')$-线性映射

$$\varphi' = \varphi\otimes_{\kappa(q)}\kappa(q'):\quad
\begin{array}{ccc}
I\otimes_B \kappa(q') & \longrightarrow & \Omega_{B/A}\otimes_B \kappa(q') \\
\wr & & \| \\
I\otimes_B B_{\bar{k}}\otimes_{B_{\bar{k}}}\kappa(q') & \longrightarrow & \Omega_{B_{\bar{k}}/\bar{k}}\otimes_{B_{\bar{k}}}\kappa(q') \\
\wr & & \| \\
I\otimes_A \bar{k}\otimes_{B_{\bar{k}}}\kappa(q') & \longrightarrow & \Omega_{B_{\bar{k}}/\bar{k}}\otimes_{B_{\bar{k}}}\kappa(q') \\
\wr & & \| \\
IB_{\bar{k}}\otimes_{B_{\bar{k}}}\kappa(q') & \longrightarrow & \Omega_{B_{\bar{k}}/\bar{k}}\otimes_{B_{\bar{k}}}\kappa(q')
\end{array}$$

而由 $C_{\bar{x}}$ 在 q' 点处的 Jacobian criterion 知

$\varphi': I B_{\bar{x}} \otimes_{B_{\bar{x}}} k(q') \longrightarrow \Omega_{B_{\bar{x}}/\bar{x}} \otimes_{B_{\bar{x}}} k(q')$ 为单射.

故知 $k(q)$-线性映射 φ 为单射. 从而由 Jacobian criterion 知 $\operatorname{Spec} C/\operatorname{Spec} A$ 在 q 点光滑. #

作为定理13的推论, 我们可以给出 étale 态射的一些常用等价定义. 为此, 先证明一些引理.

引理17: 设 $K \to L$ 为有限可分扩张. 则 L/K 为 étale, 特别地, $\Omega_{L/K} = 0$.

证: 由定义不难验证.

引理18: 设 $K \to L$ 为有限生成扩张, 且 $\Omega_{L/K} = 0$. 则 L/K 必为有限可分扩张.

证: 设中间域 K_1/K 为纯超越扩张, L/K_1 为有限扩张,
有限生成

由正合列 $L \otimes_{K_1} \Omega_{K_1/K} \to \Omega_{L/K} \to \Omega_{L/K_1} \to 0$

及 $\Omega_{L/K} = 0$ 知 $\Omega_{L/K_1} = 0$. 再通过将 L/K_1 分解为有限可分扩张和有限纯不可分扩张易知 L/K_1 为有限可分扩张. 从而 L/K_1 为 étale. 故

$$0 \to L \otimes_{K_1} \Omega_{K_1/K} \to \Omega_{L/K} \to \Omega_{L/K_1} \to 0$$

为短正合列. 从而 $\Omega_{K_1/K} = 0$. 不难看出 $K_1 = K$. #

引理19：设 $(A,\mathfrak{m})\longrightarrow(B,\mathfrak{n})$ 为 Noether局部环间的局部同态，且 B 为 ess. of finite type 的 A-代数。则 B/A 在 $\mathfrak{n}$ 处 unramified $\Longleftrightarrow$ $\Omega_{B/A}=0$ $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}B$ 且 $\kappa(\mathfrak{n})/\kappa(\mathfrak{m})$ 为有限可分扩张。

证：第一个等价我们已证，只需证第二个。

设 $\Omega_{B/A}=0$. ~~由正合列~~ $\cancel{\otimes\ \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2\longrightarrow\Omega_{B/A}\otimes_B\kappa(\mathfrak{n})\longrightarrow\Omega}$

记 $\bar{B}=\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}=B\otimes_A\kappa(\mathfrak{m})$.

则由 $\Omega_{\bar{B}/\kappa(\mathfrak{m})}=\Omega_{B/A}\otimes_B\bar{B}=0$ 及正合列

$$\frac{\bar{\mathfrak{n}}}{\bar{\mathfrak{n}}^2}\longrightarrow\Omega_{\bar{B}/\kappa(\mathfrak{m})}\otimes_{\bar{B}}\kappa(\mathfrak{n})\longrightarrow\Omega_{\frac{\kappa(\mathfrak{n})}{\kappa(\mathfrak{m})}}\longrightarrow0$$

知 $\Omega_{\frac{\kappa(\mathfrak{n})}{\kappa(\mathfrak{m})}}=0$. 其中 $\bar{\mathfrak{n}}=\dfrac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}B}$ 为 $\bar{B}$ 中极大理想

又由 ~~$\kappa(\mathfrak{n})$ 为有限生成 $\kappa(\mathfrak{m})$-代数~~ $\dfrac{\kappa(\mathfrak{n})}{\kappa(\mathfrak{m})}$ 为有限生成扩域（这用到了 B/A 为 ess. of finite type），由引理18知 $\kappa(\mathfrak{n})/\kappa(\mathfrak{m})$ 为有限可分扩张，从而为 étale. 故

$$0\longrightarrow\frac{\bar{\mathfrak{n}}}{\bar{\mathfrak{n}}^2}\longrightarrow\Omega_{\bar{B}/\kappa(\mathfrak{m})}\otimes_{\bar{B}}\kappa(\mathfrak{n})\longrightarrow\Omega_{\frac{\kappa(\mathfrak{n})}{\kappa(\mathfrak{m})}}\longrightarrow0$$

短正合。故 $\dfrac{\bar{\mathfrak{n}}}{\bar{\mathfrak{n}}^2}=0$，从而 $\bar{\mathfrak{n}}=0$. 即 $\bar{B}=\dfrac{B}{\mathfrak{m}B}=\kappa(\mathfrak{n})$，且 $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}B$.

#

反之，设 $n = mB$ 且 $\frac{\kappa(n)}{\kappa(m)}$ 为有限可分扩张.

则有短正合列

$$0 \to \frac{\bar{n}}{\bar{n}^2} \to \Omega_{\bar{B}/\kappa(m)} \otimes_{\bar{B}} \kappa(n) \to \Omega_{\frac{\kappa(n)}{\kappa(m)}} \to 0$$

故 $\Omega_{\bar{B}/\kappa(m)} \otimes_{\bar{B}} \kappa(n) = 0$. 由于 $\Omega_{\bar{B}/\kappa(m)} = \Omega_{B/A} \otimes_B \bar{B}$,

而 $\Omega_{B/A}$ 为有限生成 B-模 (用到 B/A 为 ess. of finite type)

知 $\Omega_{\bar{B}/\kappa(m)}$ 为有限生成 $\bar{B}$-模. 从而由 Nakayama 引理

$\Omega_{\bar{B}/\kappa(m)} = 0$. 再由 $\Omega_{\bar{B}/\kappa(m)} = \cancel{\Omega_{B/A} \otimes_A A} \; \Omega_{B/A} \otimes_B \frac{B}{mB}$

再由 Nakayama 引理知 $\Omega_{B/A} = 0$. #

定理20：设 $f: X=\operatorname{Spec}B \longrightarrow S=\operatorname{Spec}A$ 为 Noetherian scheme 之间的态射，且 B 为有限生成 A-代数，则以下各条等价：

(1) f 为 étale 态射

(2) f 为 flat 态射且 $\Omega_{B/A}=0$

(3) f 为 flat 态射且 $\forall s\in S$，纤维 $f^{-1}(s)$ 作为 scheme 为有限个形如 $\operatorname{Spec}L_i$ 的无交并，其中每个 L_i 均为 $\kappa(s)$ 的有限可分扩域。

(4) f 为 flat 态射且 $\forall x\in X$，若 $s=f(x)$，则 $m_s\cdot\mathcal{O}_{X,x}=m_x$，且 $\kappa(x)$ 为 $\kappa(s)$ 的有限可分扩张。其中 m_s，m_x 分别为 $\mathcal{O}_{S,s}$ 和 $\mathcal{O}_{X,x}$ 中的极大理想。

(5) f 为 smooth 态射且 $\forall s\in S$，纤维 $f^{-1}(s)$ 的维数为零（此时称 f 的相对维数为零）。

证明：不难，只需在(3)⇒(5)或(3)⇒(1)时注意到若 $L/\kappa(s)$ 为有限可分扩域，则 ~~SpecL~~ $\operatorname{Spec}L\to\operatorname{Spec}\kappa(s)$ 的几何纤维是有限个 $\operatorname{Spec}\overline{\kappa(s)}$ 的无交并，从而是正则 scheme。再利用定理13即可。而由(5)⇒(2)时注意到由 smooth 态射得出的基本短正合列是分裂的可知，$\Omega_{B/A}$ 为局部自由 B-模，且其秩为 f 的纤维的维数。 #

注：(1) 由定理13的证明，可知有如下一点处的判别定理：

设 $f: X\to S$ 为 locally Noetherian scheme 间的 of finite type 态射，如果 $x\in X$，$s=f(x)\in S$，$\bar{x}\in X_{\overline{k(s)}}$，其中 $X_{\overline{k(s)}}=\mathrm{Spec}\,\overline{k(s)}\times_S X$ 为 X 在 s 处的几何纤维，并且设 $\bar{x}$ 在 $X_{\overline{k(s)}}\to X$ 下映到 x. 假设 f 在 x 处平坦（即 $\mathcal{O}_{X,x}$ 为平坦 $\mathcal{O}_{S,s}$-模），且 $X_{\overline{k(s)}}$ 在 $\bar{x}$ 处正则（即 $\mathcal{O}_{X_{\overline{k(s)}},\bar{x}}$ 为正则局部环），则 f 在 x 处为 smooth 态射.

(2) 由此即可得 étale 态射在一点处的判别定理：

设 $f: X\to S$ 为 locally Noetherian scheme 间的 of finite type 态射，$x\in X$，$s=f(x)\in S$. 若 f 在 x 处 flat，$m_s\cdot\mathcal{O}_{X,x}=m_x$，且 $k(x)/k(s)$ 为有限可分扩张，则 f 在 x 处为 étale 态射.

(3) 由 Jacobian criterion 不难看到：若 $f: X\to S$ 在 $x\in X$ 处为 smooth (étale) 态射，则存在 x 的开邻域 $U\subset X$，使得 $f|_U: U\to S$ 为 smooth (étale) 态射.

即 smooth (étale) 态射 ~~若在~~ 总在一个开集上成立.

(4) 设 $f: X\to S$ 在 $x\in X$ 处 étale，$s\in S$. 则存在 x 的 ~~仿射~~ 开邻域 U，s 在 S 中的仿射开邻域 $V=\mathrm{Spec}\,A$，且 $f(U)\subset V$，以及 ~~$f(X)\in$~~ ~~$f(T)\in B$~~ 首一多项式 $f(T)\in A[T]$，

使得有交换图表:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Spec}\left(\frac{A[T]}{(f(T))}\right)_{f'(T)} \arrow[d] \\ & V = \mathrm{Spec}\,A \end{tikzcd}$$

其中 $U \hookrightarrow \mathrm{Spec}\left(\frac{A[T]}{(f(T))}\right)_{f'(T)}$ 为开嵌入.

即 étale 态射局部上均具有"标准" étale 态射 $\mathrm{Spec}\left(\frac{A[T]}{(f(T))}\right)_{f'(T)} \to \mathrm{Spec}\,A$ 的形状. 该结论为 Zariski Main Theorem 的推论. (证明可见 Liu Qing, <<Algebraic Geometry and Arithmetic Curves>> Proposition 4.11, 或 Fu Lei, <<Etale Cohomology Theory>>, Theorem 2.3.5).

下面的定理给出 smooth 态射在局部的形状.

定理21: 设 $f: X \longrightarrow S = \mathrm{Spec}\,A$ 为 locally Noetherian scheme 间的 of finite type 态射. 设 f 为 smooth 态射. 则 $\forall x \in X$, 存在 x 的开邻域 U, 使得有以下交换图表

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Spec}\,A[T_1, \cdots, T_n] \arrow[d, "\psi"] \\ & S = \mathrm{Spec}\,A \end{tikzcd}$$

其中 φ 为 étale 态射. 而 ψ 为自然嵌入 $A \hookrightarrow A[T_1, \cdots T_n]$ 对应的投影态射.

注：该定理说明 smooth 态射局部上总是分解为 étale 态射和"标准 smooth 态射"

$$\begin{array}{c} \operatorname{Spec} A[T_1, \cdots, T_n] \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} A \end{array}$$

的复合. 结合上一个注中(4)所说的结论, 我们在局部上对 smooth 态射有非常清楚的认识.

证明：由 f smooth 知 $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/A}$ 为有限秩的自由 $\mathcal{O}_{X,x}$-模.

取其一组形如 $df_1, \cdots, df_n$ 的基. 其中 $f_1, \cdots f_n \in \mathcal{O}_{X,x}$.

设 $f_1, \cdots f_n \in \mathcal{O}_X(U)$, 其中 U 为 x 在 X 中某个开邻域.

则得 ~~态射~~ A-同态：

$$\begin{array}{ccc} A[T_1, \cdots, T_n] & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ \Psi & & \Psi \\ T_i & \longmapsto & f_i \end{array}, \quad i=1, \cdots, n.$$

从而有态射交换图：

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & Y = \operatorname{Spec} A[T_1, \cdots, T_n] \arrow[d] \\ & S = \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

设 $y = \varphi(x)$. 则 φ 的作法可知

$$\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{S,s}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{U,x} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{O}_{U,x}/\mathcal{O}_{S,s}} \text{ 为同构}.$$

从而由定理3的(3)知 $\mathcal{O}_{U,x}/\mathcal{O}_{Y,y}$ 为 smooth. 且由

基本正合列知 $\Omega_{\mathcal{O}_{U,x}/\mathcal{O}_{Y,y}} = 0$, 故 $\mathcal{O}_{U,x}/\mathcal{O}_{Y,y}$ 为 étale.

从而 $\varphi: U \to Y$ 在 x 处 étale. 由 Jacobian 判据不难看出可适当缩小 U 使得 $\varphi: U \to Y$ 为 étale 态射. #

参考文献:

Luc Illusie, 《Topics in Algebraic Geometry》.