代数簇的乘积

设$k=\bar{k}$为代数闭域，首先澄清关于簇之间态射的连续性.

定义：设 $U_1\subset V(I_1)\subset k^{n_1}$，$U_2\subset V(I_2)\subset k^{n_2}$ 为 quasi-affine varieties，U_i 为 $V(I_i)$中开集. 称映射 $\varphi: U_1\to U_2$ 为态射，如果 $\varphi^* X_i$ 为 U_1上正则函数，~~其中 $X_1,\cdots,X_{n_2}$~~ $\forall i=1,\cdots,n_2$. 其中 $X_1,\cdots,X_{n_2}$ 为 U_2上(或 k^{n_2})上坐标函数.

容易证明，若 $\varphi: U_1\to U_2$ 为 quasi-affine variety 之间的态射，则 φ为连续映射.

定义：设 X, Y 为 pre-variety，称映射 $\varphi: X\to Y$ 为态射，如果 $\forall x\in X$，存在X中仿射开集 $U\ni x$，存在Y中仿射开集 $V\ni\varphi(x)$，使得 $\varphi(U)\subset V$，且 φ限制在U上诱导的映射 $\varphi: U\to V$ 为仿射簇之间的态射.

练习：~~由~~ 若 $\varphi: X\to Y$ 为 prevariety 之间的态射，则 φ为连续映射.

练习：$\varphi: X\to Y$ 为 pre-variety 之间的态射 则 φ为态射 $\Leftrightarrow$ φ连续，且X存在一~~串~~族仿射开覆盖 $X=\bigcup_{i=1}^{n} U_i$，Y存在一族仿射开覆盖 ~~使得~~ $Y=\bigcup_{j=1}^{m} V_j$，使得 $\forall 1\le i\le n$，$\forall 1\le j\le m$，$\varphi^{-1}(V_j)\cap U_i \xrightarrow{\varphi} V_j$ 为 quasi-affine variety 之间的态射，其中 $\varphi^{-1}(V_j)\cap U_i$ 为仿射开集U_i中的开子集，从而为 quasi-affine variety

提示："$\Leftarrow$"证明时利用 pre-variety 中仿射开子集形成开集基.

仿射簇的乘积.

设 $I \subset k[X_1,\cdots,X_n]$, $J \subset k[Y_1,\cdots,Y_m]$ 为理想.

则对应仿射簇 $V(I) \subset k^n$, $V(J) \subset k^m$.

令 $H = I\cdot k[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m] + J\cdot k[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m]$ 为 $k[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m]$ 中理想. 则 $V(H) \subset k^{n+m}$ 为仿射簇.

并且显然作为集合, 有 $V(H) = V(I)\times V(J)$ 为 $V(I)$ 和 $V(J)$ 的笛卡尔乘积. 我们利用 $V(H)\subset k^{n+m}$ 赋予集合 $V(I)\times V(J)$ 仿射簇的结构.

记 $p_1: V(I)\times V(J) \to V(I)$, $p_2: V(I)\times V(J)\to V(J)$ 为到各因子的投影映射

性质1: 则有显然的 $p_1: V(I)\times V(J) \to V(I)$, $p_2: V(I)\times V(J)\to V(J)$ 均为仿射簇之间的态射.

乘积有如下万有性质:

性质2: 对任意仿射簇 Z, 对任意态射 $\varphi_1: Z \to V(I)$, $\varphi_2: Z\to V(J)$, 存在唯一的态射 $\varphi: Z\to V(I)\times V(J)$ 使得 $\varphi_1 = p_1\circ\varphi$, $\varphi_2 = p_2\circ\varphi$. 表示为下图:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi_2"] & V(I)\times V(J) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & V(J) \\
 & V(I) &
\end{tikzcd}
$$

证: 由定义不难看出 #

pre-variety 的乘积.

设 X, Y 为 pre-variety. 若 Z 为 pre-variety. $p_1: Z \to X$, $p_2: Z \to Y$ 为态射. 则称三元组 (Z, p_1, p_2) 为 ~~X×Y的~~ X 与 Y 的乘积. 如果 (Z, p_1, p_2) 满足如下万有性质: 对任意 pre-variety Z', 对任意态射 $\varphi_1: Z' \to X$, $\varphi_2: Z' \to Y$, 存在唯一态射 $\varphi: Z' \to Z$, 使得 $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi$, $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi$.

用图表表示为

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dr, dashed, "\exists ! \varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_2"] \arrow[ddr, "\varphi_1"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

(万有性质确定的对象的唯一性) 性质3: 设 (Z, p_1, p_2) 与 $(\widetilde{Z}, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ 均满足上述万有性质. 则存在唯一的 pre-variety 间的同构 $\alpha: Z \to \widetilde{Z}$, 使得

$$p_1 = \widetilde{p}_1 \circ \alpha, \quad p_2 = \widetilde{p}_2 \circ \alpha.$$

证:
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[rr, "p_2"] \arrow[ddr, "p_1"'] & & Y \\
& \widetilde{Z} \arrow[ur, "\widetilde{p}_2"'] \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

由 $(\widetilde{Z}, \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ 的万有性质, 可找到态射 $\alpha: Z \to \widetilde{Z}$, 使 $p_1 = \widetilde{p}_1 \circ \alpha$, $p_2 = \widetilde{p}_2 \circ \alpha$.

又由 (Z, p_1, p_2) 的万有性质, 可找到态射 $\beta: \widetilde{Z} \to Z$, 使得 $\widetilde{p}_1 = p_1 \circ \beta$, $\widetilde{p}_2 = p_2 \circ \beta$.

从而 $p_1 = p_1 \circ (\beta \circ \alpha)$, $p_2 = p_2 \circ (\beta \circ \alpha)$.

但又有 $p_1 = p_1 \circ id_Z$，$p_2 = p_2 \circ id_Z$，其中 $id_Z: Z \to Z$ 为恒等态射. 从而由万有性质中的唯一性知

$$\beta \circ \alpha = id_Z.$$

同理知 $\alpha \circ \beta = id_{\tilde{Z}}$.

故 α 为同构. α 的唯一性由 $(\tilde{Z}, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ 的万有性质保证. #

上面的性质表明满足万有性质的对象在同构意义下唯一. 下面说明其存在性.

设 $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$，$Y = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ 为仿射开覆盖

~~则~~ 则有集合的等式 $X \times Y = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} U_i \times V_j$

作为仿射簇的乘积，我们已赋予 $U_i \times V_j$ 仿射簇结构，$\forall 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.

考虑 $X \times Y$ 中子集族

$$\mathcal{B} := \{ U \subset X \times Y \mid \text{存在 } 1 \le i \le n, 1 \le j \le m, \text{ 使得 } U \text{ 为 } U_i \times V_j \text{ 中的开子集} \}.$$

容易验证，对任意 $\mathcal{B}$ 中元素 $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$. $U_1 \cap U_2$ 均为 $\mathcal{B}$ 中若干元素（为 $X \times Y$ 中子集）的并集.

（提示：$\forall 1 \le i, i_1 \le n$. $1 \le j, j_1 \le m$. $(U_i \times V_j) \cap (U_{i_1} \times V_{j_1}) = (U_i \cap U_{i_1}) \times (V_j \cap V_{j_1})$ 既是 $U_i \times V_j$ 中开集，也是 $U_{i_1} \times V_{j_1}$ 中开集）.

这样，定义 $X \times Y$ 中子集 U 为开集，如果 U 是 $\mathcal{B}$ 中若干元素（为 $X \times Y$ 子集）的并集. 容易验证这样得到 $X \times Y$ 上拓扑，且 $\mathcal{B}$ 为一族开集基.

下面~~验证可~~赋予 $X\times Y$ 上 pre-variety 结构.

为此, 注意到已赋予 $U_i\times V_j$ 仿射簇结构.

而 $X\times Y=\bigcup\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} U_i\times V_j$. 我们令这些 $U_i\times V_j$ 为仿射开覆盖. 只需验证转移函数是正则的.

不难根据定义看出只需验证如下命题:

$\forall\ 1\le i, i_1\le n$, $\forall\ 1\le j, j_1\le m$.

记 $W=(U_i\times V_j)\cap(U_{i_1}\times V_{j_1})=(U_i\cap U_{i_1})\times(V_j\cap V_{j_1})$.

自然嵌入 $W\subset U_i\times V_j$ 和 $W\subset U_{i_1}\times V_{j_1}$ 均赋予 W quasi-affine variety 结构 (分别作为仿射簇 $U_i\times V_j$ 和 $U_{i_1}\times V_{j_1}$ 的开子集). 则恒等映射 $id_W: W\to W$ 为这样两个 quasi-affine variety 结构之间的同构, 或者说这两个结构是相同的.

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{id_W} & W_2 \\ \cap_{开} & & \cap_{开} \\ U_i\times V_j & & U_{i_1}\times V_{j_1} \end{array}$$

为区别~~起~~, 记 W_1 为作为 $U_i\times V_j$ 开子集的 quasi-affine variety W, 记 W_2 为作为 $U_{i_1}\times V_{j_1}$ 的开子集的 quasi-affine variety W.

该命题的验证: 只需验证复合映射 $W_1\xrightarrow{id_W}W_2\hookrightarrow U_{i_1}\times V_{j_1}$ 为态射 (其中左边的 W_1 ~~赋予~~ 作为 $U_i\times V_j$ 的开集赋予 quasi-affine variety 结构, 而 W_2 作为 $U_{i_1}\times V_{j_1}$ 的开集赋予 quasi-affine variety).

由乘积的万有性质. 只需验证复合映射

$f: W_1\xrightarrow{id_W}W_2\hookrightarrow U_{i_1}\times V_{j_1}\xrightarrow{p_1}U_{i_1}$

和 $g: W_1\xrightarrow{id_W}W_2\hookrightarrow U_{i_1}\times V_{j_1}\xrightarrow{p_2}V_{j_1}$

为态射.

注意到 $f(W_1) = U_i \cap U_{i_1} \subset U_{i_1}$

故只需验证 ~~$W \xrightarrow{f} U_i \cap U_i$~~

$W_1 \xrightarrow{f} U_i \cap U_{i_1}$ 为态射.

令 $\tilde{f}: W_1 \hookrightarrow U_i \times V_j \xrightarrow{p_1} U_i$ 为复合态射.

由于 $\tilde{f}(W_1) = U_i \cap U_{i_1} \subset U_i$

故 $W_1 \xrightarrow{\tilde{f}} U_i \cap U_{i_1}$ 为态射

但显然 f 与 $\tilde{f}$ 为相同映射, 故 $f: W_1 \to U_i \cap U_{i_1}$

也为态射.

同理可证 g 为态射.

下面验证 pre-variety $X \times Y$, $p_1: X \times Y \to X$, $p_2: X \times Y \to Y$ 满足乘积的万有性质.

由于 $X \times Y = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} U_i \times V_j$ 为仿射开覆盖. $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 为仿射开覆盖. 且 p_1 限制在 $U_i \times V_j$ 上为 $U_i \times V_j \xrightarrow{p_1} U_i$ 到第一个因子的投影, 为态射. 由此不难看到 $p_1: X \times Y \to X$ 为态射. 同理可验证 $p_2: X \times Y \to Y$ 为态射.

对任意 pre-variety Z 以及态射 $\varphi_1: Z \to X$, $\varphi_2: Z \to Y$, 显然存在唯一映射 $\varphi: Z \to X \times Y$ 使得 $\varphi_1 = p_1 \circ \varphi$, $\varphi_2 = p_2 \circ \varphi$. 下面证该 φ 为态射.

$\forall\ 1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, $\varphi^{-1}(U_i \times V_j) = \varphi_1^{-1}(U_i) \cap \varphi_2^{-1}(V_j)$ 为 Z 中开集.

且 $\varphi: \varphi^{-1}(U_i \times V_j) \longrightarrow U_i \times V_j \subset X \times Y$.

而由 $U_i \times V_j$ 的万有性质.

$\varphi^{-1}(U_i \times V_j) \xrightarrow{\varphi} U_i \times V_j$ 为态射.

又由于 $Z = \bigcup\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \varphi^{-1}(U_i \times V_j)$ 为 Z 的开覆盖.

故 $\varphi: Z \to X \times Y$ 为态射.