$\mathbb{P}^n$ 为完备(complete)簇.

设 Z 为 affine variety, A 为 Z 的正则函数环.
记 $\mathbb{P}^n_A := Z \times \mathbb{P}^n_k$ 为乘积簇. 记 $S = A[X_0, \dots, X_n]$ 为 A 上的 $n+1$ 元多项式环, 这是一个分次 A-代数.

若 $f = \sum\limits_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0+\dots+i_n=N \\ i_0\geq 0,\dots,i_n\geq 0 \\ \text{均为非负整数}}} a_{i_0\dots i_n} X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}$ 为S中一个 N 次齐次元.

其中 $a_{i_0\dots i_n} \in A$. 从而 $a_{i_0\dots i_n}$ 均为 Z 上正则函数.

$\forall z_0 \in Z$. 记 $f(z_0, X_0, \dots, X_n) = \sum\limits_{\substack{(i_0,\dots,i_n) \\ i_0+\dots+i_n=N \\ i_0\geq 0,\dots,i_n\geq 0}} a_{i_0\dots i_n}(z_0) X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}$

为 $k[X_0,\dots,X_n]$ 中 ~~齐~~ N 次元. 其中 $a_{i_0\dots i_n}(z_0) \in k$ 为 $a_{i_0\dots i_n}$ 在 z_0 点处的取值.

设 $J \subset S = A[X_0, \dots, X_n]$ 为齐次理想.
记 $V_+(J) = \{ (z, [X_0 : \dots : X_n]) \in Z \times \mathbb{P}^n_k \mid f(z, X_0, \dots, X_n) = 0 \ \forall f \in J \}$

而 $\forall f \in S$ 为齐次元 记 $D_+(f) = \mathbb{P}^n_A - V_+(f)$.

~~对~~ $\forall i = 0, \dots, n$. 令 $U_{i,A} := D_+(X_i)$.

不难验证: $\mathbb{P}^n_A = \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_{i,A}$ 为 $\mathbb{P}^n_A$ 的一个仿射开覆盖

且 ~~$U_{i,A} \cong Z$~~ $U_{i,A}$ 的正则函数环同构于 $S_{(X_i)} = A\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$

为 A 系数的 n 元多项式环.

易知 对齐次理想 $J \subset S$，$V_+(J)$ 为 $\mathbb{P}^n_A$ 中闭集.
$\forall f \in S$ 为齐次元，$D_+(f)$ 为 $\mathbb{P}^n_A$ 中开集.

性质：(1) $\{D_+(f) \mid f \in S$ 为齐次元$\}$ 为 $\mathbb{P}^n_A$ 的一族开集基.

(2) $\mathbb{P}^n_A$ 中任意闭集均形如 $V_+(J)$，J 为 S 中齐次理想.

证：(1) $\forall i = 0, \cdots, n$.

$$\{D(g) \subset U_{i,A} \mid g \in S_{(X_i)} = A[\tfrac{X_0}{X_i}, \cdots, \widehat{\tfrac{X_i}{X_i}}, \cdots, \tfrac{X_n}{X_i}]\}$$

为 $U_{i,A}$ 的开集基（注意 $U_{i,A}$ 为仿射簇）.

而 $\forall g \in S_{(X_i)} = A[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}]$，

记 $\tilde{g}(X_0, \cdots, X_n) = X_i^{\deg g} \cdot g(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i})$ 为 g 的齐次化.

易验证
$$\begin{aligned} D(g) &= D_+(\tilde{g}) \cap U_{i,A} \\ &= D_+(\tilde{g}) \cap D_+(X_i) \\ &= D_+(X_i \cdot \tilde{g}) \end{aligned}$$

从而 $U_{i,A}$ 中主开集均具有形式 $D_+(f)$，f 为 S 中齐次元，$\forall i = 0, \cdots, n$. 而 $\mathbb{P}^n_A$ 中任一开集均为一些 $U_{i,A}$ 中主开集的并集.

由此知 (1) 成立. #

(2) 设 X 为 $\mathbb{P}^n_A$ 中闭集. 则由 (1)，开集 $\mathbb{P}^n_A - X = \bigcup_{j \in I} D_+(f_j)$，$f_j \in S$ 为齐次元. I 为指标集. 从而

$$X = \bigcap_{j \in I} V_+(f_j) = V_+\left(\sum_{j \in I} (f_j)\right).$$ #

定理：对任意簇 Z，$Z\times \mathbb{P}_k^n \xrightarrow{\pi_1} Z$ 为闭映射.

证：只需证 Z 为仿射簇情形. 设此时 Z 的正则函数环为 A. 记 $\mathbb{P}_A^n = Z\times \mathbb{P}_k^n$.

任取 $\mathbb{P}_A^n$ 中闭集，由前述性质知该闭集为 $V_+(J)$

$J\subset A[X_0,\dots X_n]$ 为齐次理想

设 $f_1,\dots,f_m$ 为 $A[X_0,\dots X_n]$ 中次数分别为 ~~$n_1,\dots,n_m$~~ $d_1,\dots d_m$ 的齐次元，且 J 由 $f_1,\dots,f_m$ 生成.

$\forall N\geq 1$，设 $A[X_0,\dots X_n]$ 中次数为 N 的单项式个数为 h_N，并将其排列为 $\alpha_1^{(N)},\dots,\alpha_{h_N}^{(N)}$.（注意单项式是指形如 $X_0^{i_0}\cdots X_n^{i_n}$ 的元）.

对任意 $N\geq 1$，考虑 N 次齐次多项式的如下集合

$$S_N=\{\alpha_i^{(N-d_j)}\cdot f_j \mid 1\leq j\leq m,\ 1\leq i\leq h_{N-d_j}\}.$$

则该集合中任一元 $\alpha_i^{(N-d_j)}\cdot f_j = \lambda_{i,j,1}\alpha_1^{(N)}+\dots+\lambda_{i,j,h_N}\alpha_{h_N}^{(N)}$

可表示为系数在 A 中的 $\alpha_1^{(N)},\dots\alpha_{h_N}^{(N)}$ 的组合.

其中 $\lambda_{i,j,l}\in A$. $\forall 1\leq l\leq h_N$.

这样，对 S_N 中每个元 $\alpha_i^{(N-d_j)}\cdot f_j$，得到一个行向量

$$(\lambda_{i,j,1},\dots,\lambda_{i,j,h_N})\in A^{h_N}.$$

将这些行向量（共有 $\#S_N$ 个）排成一个矩阵.

该矩阵的每一个 $h_N \times h_N$ 子方阵的行列式为 A 中元素.
取遍该矩阵的 $h_N \times h_N$ 子方阵, 得到的行列式为 A 中有限个元, 看作 Z 上正则函数, 这有限个元在Z中的公共零点的补集记为 $U_N \subset Z$, 为 Z 中开集.

则 $U_N = \{z_0 \in Z \mid (X_0, \cdots, X_n)^N \subset (f_1(z_0, X_0, \cdots X_n), \cdots, f_m(z_0, X_0, \cdots X_n))\}$

其中 $f_j(z_0, X_0, \cdots X_n) \in k[X_0, \cdots X_n]$ 表示将 f_j 的系数在 z_0 处取值得到的多项式.

不难看到,

$$\begin{aligned}
U := {} & Z - \pi_1(V_+(J)) \\
= {} & \{z_0 \in Z \mid z_0 \times \mathbb{P}_k^n \cap V_+(J) = \emptyset\} \\
= {} & \{z_0 \in Z \mid \exists N \geq 1,\ \text{s.t. } \overline{\forall i = 0, \cdots n\ X_i^N} \in (f_1(z_0, X_0, \cdots X_n), \cdots, f_m(z_0, X_0, \cdots X_n))\} \\
= {} & \{z_0 \in Z \mid \exists N \geq 1,\ \text{s.t. } (X_0, \cdots X_n)^N \subset (f_1(z_0, X_0, \cdots X_n), \cdots, f_m(z_0, X_0, \cdots X_n))\} \\
= {} & \bigcup_{N=1}^{\infty} U_N
\end{aligned}$$

为 Z 中开集. 故 $\pi_1(V_+(J))$ 为 Z 中闭集. #