10月14日练习 — Rigidity Lemma

本练习的目的是证明不可约(连通)代数群如果为~~complete~~射影簇,则必为Abel群,称为Abelian variety.

1. 设 X 为 complete variety. $X \xrightarrow{f} Y$ 为 variety 之间态射.
   则 $f(X)$ 为 Y 中闭子集,且 $f(X)$ (赋予 Y 的闭子簇结构) 为 complete.

2. 证明仿射直线 $\mathbb{A}^1_k$ 不是 complete

3. 设 X 为 complete variety, X 不可约. $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1_k$ 为态射 (即 f 为 X 上正则函数), 则 $f(X)$ 为一个点, 即 f 为常值函数.

4. 设 X 为不可约的 complete variety, Y 为 affine variety. $X \xrightarrow{f} Y$ 为态射. 则 $f(X)$ 为一个点.
   提示:考虑 Y 上坐标函数与 f 复合.

~~5. 回忆拓扑空间中如下命题:~~
~~设 $X \xrightarrow{f} Y$ 为拓扑空间的连续映射. $y_0 \in Y$, 且 $f^{-1}(y_0)$~~

5. 设 X, Y, Z 为 variety, $f: Z \times X \longrightarrow Y$ 为态射. $z_0 \in Z$, 满足 $f(z_0 \times X) = y_0$ 为一个点. 且 X 为 complete variety.
   证明: 对 y_0 在 Y 中的任意开邻域 U, 存在 z_0 在 Z 中的开邻域 V, 使得 $\forall z \in V$, $f(z \times X)$ 为 U 中的一个点.
   提示: 投影态射 $Z \times X \to Z$ 为闭映射, $Z \times X \setminus f^{-1}(U)$ 为闭集. 从而在 Z 中的像为不包含 z_0 的闭集.

~~6. 设 X, Y, Z~~

6. (Rigidity Lemma) 设 X, Y, Z 为 variety, 且 Z 不可约, 而 X 为 complete variety, $f: Z \times X \longrightarrow Y$ 为态射, 且存在 $z_0 \in Z$, 满足 $f(z_0 \times X)$ 为 Y 中一个点.

证明: $\forall z \in Z$, $f(z \times X)$ 为 Y 中一个点.

从而若进一步存在 $x_0 \in X$, 使 $f(Z \times x_0)$ 为 Y 中一个点, 则 $f(Z \times X)$ 为 Y 中一个点.

7. 设 A 为连通代数群 (从而为不可约的), 且 A 为射影簇 (从而为 complete variety).

证明: A 为 Abel 群 (这样的 A 就称为 Abelian variety).

提示: 考虑态射 $f: A \times A \longrightarrow A$, $(a, b) \longmapsto aba^{-1}b^{-1}$, 应用上题结果.

注: 参考书: D. Mumford, 《Abelian Varieties》.