9月21日 思考题

1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列. 定义两个新数列如下:

$$\forall n\geq 1,\quad b_n := \inf\{a_m \mid m\geq n\};$$
$$c_n := \sup\{a_m \mid m\geq n\}.$$

证明: (1) $\forall n\geq 1$, $b_n \leq c_n$

(2) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递增有上界的数列.

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减有下界的数列.

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

注: 上题中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 称为 $\{a_n\}$ 的下极限.

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 称为 $\{a_n\}$ 的上极限.

2. 设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为复数列, $z_n = a_n + b_n i$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

证明: (1) 复数列 $\{z_n\}$ 收敛当且仅当实数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛. 且此时 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + (\lim\limits_{n\to\infty} b_n) i$.

(2) 复数列 $\{z_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall m, n\geq N$, $\cancel{|a_m - a|}$ $|z_m - z_n| < \varepsilon$.

注: 对复数 $z = a+bi$, $a, b\in\mathbb{R}$. $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$.

3. ~~证~~ 设 $|a|<1$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 收敛.

4. 设 $\{a_n\}$ 为实或复数列，且存在实数 $0<a<1$，以及存在 $N \in \mathbb{N}$. s.t. $\forall n>N$，有 $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq a$.

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

5. 利用上题结论证明 $\forall z \in \mathbb{C}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 收敛.

注：$e^z = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$，而 $\forall x \in \mathbb{R}$. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.