

## 9月7日思考题

1. 在圆周“ $\bigcirc$ ”上，用角度表示一个点的位置。设  $\theta = \lambda \cdot \pi$  为一个圆周上的点，其中  $\lambda$  为一个无理数。证明  $\{n\theta \mid n \in \mathbb{Z}\}$  在圆周上稠密。

不难看到上述问题可转化为下面的问题。

2. 设  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  为一个无理数，对每个实数  $x \in \mathbb{R}$ ，用  $\{x\}$  来表示  $x$  的小数部分，即  $\{x\} = x - [x]$ 。

证明：集合  $\{\{n\alpha\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$  在开区间  $(0, 1)$  中稠密，

即  $\forall a, b \in (0, 1)$  且  $a < b$ ，均有无限多个  $n \in \mathbb{Z}$  使得  $a < \{n\alpha\} < b$ 。