指数函数与对数函数

问题的提出：如果只承认实数的四则运算，序关系，阿基米德原理，确界原理，对 $a>0$，$b\in\mathbb{R}$，如何定义 a^b？如何定义 $\ln a$？

下面我们将给出指数函数 a^x 和对数函数 $\ln x$ 的严格定义.

首先定义连续函数的概念.

定义：设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为实值函数，称 f 为连续函数，如果 $\forall x_0\in\mathbb{R}$，均有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

对一个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们考虑下述几种性质：

(E1) f 不恒为0，即 $\exists x\in\mathbb{R}$，$f(x)\neq 0$.

(E2) $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

(E3) f 为连续函数.

命题1：设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足性质(E1),(E2),(E3)，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，均有 $f(x)>0$，并且 $f(0)=1$.

证：首先注意到 $f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)\geq 0\Rightarrow f(0)=0$ 或 1.

假设 $f(0)=0$，则由 f 连续知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，故存在 $\delta>0$，使得 $\forall x\in(-\delta,\delta)$，均有 $|f(x)|<\frac{1}{2}$.

由 f 满足(E1)知 $\exists x_0\in\mathbb{R}$，使得 $f(x_0)\neq 0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}=0$，知存在 $N\in\mathbb{N}$，s.t. $\forall n>N$，$\left|\frac{x_0}{n}\right|<\delta$.

从而 $\forall n>N$，$f(x_0)=\left(f\left(\frac{x_0}{n}\right)\right)^n$. 而由 $\left|\frac{x_0}{n}\right|<\delta$ 知 $\left|f\left(\frac{x_0}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}$

从而 $|f(x_0)|=\left|f\left(\frac{x_0}{n}\right)\right|^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\forall n>N$ 成立.

上式中对n取极限得 $|f(x_0)| \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

故 $f(x_0)=0$，与x_0的取法矛盾！故 ~~$f(0)>0$~~ $f(0)\neq 0$，从而$f(0)=1$，

由f的连续性以及$\forall x\in\mathbb{R}$，$\forall$正整数n，$f(x)=\left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$

不难重复上面的推理过程证明$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)>0$．#

命题2：~~设~~ 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足性质(E1)，(E2)，(E3)，则：

i) 若$f(1)=1$，则$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=1$．

ii) 若$f(1)>1$，则$\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$，

即f为严格递增函数．

iii) 若$f(1)<1$，则f为严格递降函数．

证：由命题1知$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)>0$．

i) 若$f(1)=1$，则$\forall n\in\mathbb{N}$，$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=f(1)=1$，从而

$f\left(\frac{1}{n}\right)=1$，由~~是~~此知对任意正有理数$r$，$f(r)=1$．

再由$f(-x)\cdot f(x)=f(0)=1$，$\forall x\in\mathbb{R}$成立

不难看到对任意有理数r，均有$f(r)=1$．

由有理数在实数中稠密（阿基米德原理可证）

$\forall x\in\mathbb{R}$，可取有理数列$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到x，从而

$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=1$．

ii) 若$f(1)>1$，则$\forall n\in\mathbb{N}$，$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=f(1)>1$，从而

$f\left(\frac{1}{n}\right)>1$，由此知对任意正有理数$r$，$f(r)>1$．

$\forall x>0$，取~~数~~严格递增的正有理数列$0<r_1<r_2<r_3<\cdots$

且$\lim_{n\to\infty}r_n=x$，则$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)$．

由于 $\forall n \geq 1$, $\dfrac{f(r_{n+1})}{f(r_n)} = f(r_{n+1} - r_n) > 1$

知 $f(r_n) < f(r_{n+1})$. 从而 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) \geq f(r_1) > 1$.

从而 $\forall\, x < y$, $\dfrac{f(y)}{f(x)} = f(y-x) > 1$

故 $f(x) < f(y)$.

iii) 与 ii) 证明类似. 或者考虑 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 即可. #

推论3: 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 均满足性质 (E1), (E2), (E3), 且 $f(1) = g(1)$. 则 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

证: 由命题1 知 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$. 则 h 也定义新函数 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. 则 h 也满足性质(E1), (E2), (E3) 且 $h(1) = 1$. 故由命题2, i) 知 $h(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. 从而 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$. #

由这个推论我们看到一个满足性质(E1), (E2), (E3) 的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 完全由其在1处的取值所决定, 所以可以说性质(E1), (E2), (E3) 完全刻画了我们心目中的指数函数. 下面需要说明确实存在非常值的函数满足(E1), (E2), (E3), 这样的函数将被定义为指数函数. 在说明存在性之前, 我们先讨论反函数的存在性

命题4：设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足性质(E1)，(E2)，(E3)，

i) 若 $f(1) > 1$，则 f 存在严格递增并且连续的反函数 $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

ii) 若 $f(1) < 1$，则 f 存在严格递降并且连续的反函数 $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

证：i) 由命题1和命题2，$f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 为严格递增的连续函数. $\forall y_0 \in (0,+\infty)$，考虑集合

$$E := \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq y_0 \}$$

由于 $f(1) > 1$. 知 $\forall n \in \mathbb{N}$，$f(n) = f(1)^n$. 故

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(1)^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

由此知 E 非空. 同样，由 $f(n) \longrightarrow +\infty \ (n \to +\infty)$ 以及 f 严格递增知 E 有上界. 从而 E 有上确界. 记 $x_0 = \sup E$. 由 f 连续，不难看到 $f(x_0) = y_0$. 由此知 $f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 为满射. 而由 f 严格递增知 $f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 为单射. 故 f 存在反函数 $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. 且由反函数定义显然 g 为严格递增函数. 下证 g 为连续函数.

$\forall y_0 \in (0,+\infty)$. 由 g 的递增性知 g 在 y_0 处的左、右极限 $g(y_0-)$ 和 $g(y_0+)$ 均存在. 记 $x_0 = g(y_0-)$. 任取数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $0 < y_1 < y_2 < \cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. 则 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n)$. 故由 f 连续知 $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(g(y_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. 从而 $x_0 = g(y_0)$.

类似地，可证 $g(y_0+)=g(y_0)$. 由此知 $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=g(y_0)$.

故 g 为连续函数.

ii) 证明同 i) 类似，或者考虑 $\frac{1}{f(x)}$ 再应用 i) 的结论. #

下面构造满足性质(E1), (E2), (E3) 的函数.

命题5：设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为数列，并且存在 $N\in\mathbb{N}$，存在 $a\in\mathbb{R}$ 满足 $0<a<1$，以及 $\forall n\geq N$，$|a_{n+1}|\leq a\cdot|a_n|$.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证：$\forall m\geq N$，$\forall p\geq 1$，有

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}a_n\right|\leq\sum_{n=m}^{m+p}|a_n|\leq\sum_{n=m}^{m+p}|a_m|\cdot a^{n-m}\ \cancel{\leq|a_N|\cdot\sum_{n=m}^{m+p}a^{n-m}}$$

由于 $|a_m|\leq|a_N|\cdot a^{m-N}$

从而 $\sum\limits_{n=m}^{m+p}|a_m|\cdot a^{n-m}\leq|a_m|\cdot\sum\limits_{n=m}^{m+p}a^{n-m}\leq a^{m-N}\left(|a_N|\cdot\sum\limits_{k=0}^{p}a^k\right)$

由此不难利用 Cauchy 准则得到所需结论. #

命题6：设 $x\in\mathbb{R}$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 收敛.

证：记 $a_n=\frac{x^n}{n!}$，则 $a_{n+1}=\frac{x}{n+1}\cdot a_n$，$\forall n\geq 1$.

取 $N\in\mathbb{N}$. s.t. $\left|\frac{x}{N+1}\right|\leq\frac{1}{2}$，则 $\forall n\geq N$，有

$$|a_{n+1}|=\left|\frac{x}{n+1}\right|\cdot|a_n|\leq\left|\frac{x}{N+1}\right|\cdot|a_n|\leq\frac{1}{2}\cdot|a_n|.$$

从而由上一命题即得所需结论. #

定义：$\forall x\in\mathbb{R}$. 记 $e^x:=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，由命题6. e^x 是良好定义的. 这样得到函数 $e^x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

下面验证函数 e^x 满足性质(E1), (E2), (E3).

(E1)：由定义，$e^1=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e>1$，故性质(E1)成立.

下面验证 性质(E2).

命题7: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

证: 由命题6知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|x+y|^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{n!}$ 均为收敛级数 (上式中约定 $0! = 1$).

故由收敛数列的有界性知存在 $M > 0$, 使得:

(1) …… $\forall m \geq 1$, $\sum\limits_{n=0}^{m} \frac{|x+y|^n}{n!} \leq M$, $\sum\limits_{n=0}^{m} \frac{|x|^n}{n!} \leq M$, $\sum\limits_{n=0}^{m} \frac{|y|^n}{n!} \leq M$.

~~又由收敛~~ 记 $e^x = a$, $e^y = b$, $e^{x+y} = c$,

~~任取 $\varepsilon > 0$~~, 任取 $\varepsilon > 0$,

由收敛~~再~~级数的 Cauchy 准则, 存在 $N \in \mathbb{N}$, s.t.

(2) …… $\forall m \geq N$, $\forall p \geq 1$, 有 $\sum\limits_{n=m}^{m+p} \frac{|x|^n}{n!} < \varepsilon$, $\sum\limits_{n=m}^{m+p} \frac{|y|^n}{n!} < \varepsilon$.

取一个自然数 $m \geq 2N$, 且使得

(3) …… $\left|c - \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{(x+y)^n}{n!}\right| < \varepsilon$, $\left|a - \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}\right| < \varepsilon$, $\left|b - \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{y^n}{n!}\right| < \varepsilon$.

注意到
$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{p} y^{n-p} x^p = \sum_{n=0}^{m} \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p y^{n-p}}{p!(n-p)!}$$
$$= \sum_{\substack{0 \leq p \leq m \\ 0 \leq q \leq m \\ p+q \leq m}} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!}$$

而
$$\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{y^n}{n!}\right) = \left(\sum_{p=0}^{m} \frac{x^p}{p!}\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{m} \frac{y^q}{q!}\right)$$
$$= \sum_{\substack{0 \leq p \leq m \\ 0 \leq q \leq m}} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!}$$
$$= \sum_{\substack{0 \leq p \leq m \\ 0 \leq q \leq m \\ p+q \leq m}} \frac{x^p}{p!} \cdot \frac{y^q}{q!} + \sum_{\substack{0 \leq p \leq m \\ 0 \leq q \leq m \\ p+q > m}} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!}$$
$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{(x+y)^n}{n!} + \sum_{\substack{0 \leq p \leq m \\ 0 \leq q \leq m \\ p+q > m}} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!}$$

由于 $\left|\sum_{\substack{0\le p\le m\\0\le q\le m\\p+q>m}}\frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!}\right| \le \sum_{\substack{0\le p\le m\\0\le q\le m\\p+q>m}}\frac{|x|^p}{p!}\frac{|y|^q}{q!}$

$$\le \sum_{\substack{\frac{m}{2}\le p\le m\\0\le q\le m}}\frac{|x|^p}{p!}\frac{|y|^q}{q!} + \sum_{\substack{0\le p\le m\\\frac{m}{2}\le q\le m}}\frac{|x|^p}{p!}\frac{|y|^q}{q!}$$

$$\le M\cdot\sum_{\frac{m}{2}\le p\le m}\frac{|x|^p}{p!} + M\cdot\sum_{\frac{m}{2}\le q\le m}\frac{|y|^q}{q!}$$

(由 $m\geq 2N$ 及 (2))

$$\le M\cdot\sum_{N\le p\le m}\frac{|x|^p}{p!} + M\cdot\sum_{N\le q\le m}\frac{|y|^q}{q!}$$

由 (2)

$$\le 2M\varepsilon$$

由此 ~~以及(3)知~~ 知

(4) … $\left|\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{y^n}{n!}\right) - \sum_{n=0}^{m}\frac{(x+y)^n}{n!}\right| \le 2M\varepsilon$.

再由 (3) ~~知~~ 和 (1) 知

~~$|c-ab|\le$~~

$$a\cdot b = \left(a-\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(b-\sum_{n=0}^{m}\frac{y^n}{n!}+\sum_{n=0}^{m}\frac{y^n}{n!}\right)$$

以及 $\left|a\cdot b-\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{y^n}{n!}\right)\right| \le 2M\varepsilon+\varepsilon^2$

从而再结合 (3) ~~知~~ 和 (4) 知：

(5) … $|a\cdot b-c| \le 2M\varepsilon+\varepsilon^2+2M\varepsilon+\varepsilon = (4M+1)\varepsilon+\varepsilon^2$.

由于 a, b, c, M 均为常数，而 $\varepsilon>0$ 为任取的正数，

从而 (5) 推出 $ab=c$，即 $e^x\cdot e^y=e^{x+y}$.

#

下面验证 性质(E3).

命题8: $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 = e^0$.

证: 留作练习.

命题9: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$.

证: $e^x - e^{x_0} = e^{x_0+(-x_0+x)} - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot(e^{x-x_0} - 1)$

从而由命题8知 $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = \lim\limits_{y\to 0} e^{x_0}\cdot e^y = e^{x_0}$ #

以上我们验证了函数 e^x 满足性质(E1), (E2), (E3). 且 $e^1 = e > 1$. 故由命题1. 命题2, 命题4 知:

- $\forall x \in \mathbb{R}$. $e^x > 0$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$. 若 $x < y$, 则 $e^x < e^y$.
- 存在严格递增的~~函~~连续函数 $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 为 $e^x: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 的反函数. 该反函数记为 $\ln$, 称为对数函数. 由其为 e^x 的反函数及 e^x 的性质知:
- $\ln 1 = 0$
- $\forall x, y \in (0,+\infty)$, $x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$.

~~由于~~ 定义: $\forall a > 0$, 定义 $a^x = e^{x\ln a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

则由 e^x 和 $\ln x$ 的性质知:

- 若 $a>1$, 则 a^x 为 x 的严格递增连续函数
- 若 $a<1$, 则 a^x 为 x 的严格递降连续函数
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. 特别地 取 $x = \frac{1}{n}$, 则 $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$. 故 a^x 与我们通常理解是一致的.

由于 $e>1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} e^n=+\infty$．又由 e^x 为递增函数，知

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$．故 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$．

从而知 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$．$\lim\limits_{x\to 0+} \ln x=-\infty$

命题10：设 $a>1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$．

证：由定义，$a^x=e^{x\ln a}$．由 $a>1$ 知 $\ln a>0$．

从而由 $e^{x\ln a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n(\ln a)^n}{n!}$ 知

$\forall x>0$，$e^{x\ln a}\geq\dfrac{x^2(\ln a)^2}{2!}=\dfrac{x^2(\ln a)^2}{2}$．

故 $\forall x>0$，有 $0<\dfrac{x}{a^x}<\dfrac{2x}{x^2(\ln a)^2}=\dfrac{2}{x(\ln a)^2}$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$． #

推论11：设 $a>1$，$b>0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^b}{a^x}=0$

证：$\dfrac{x^b}{a^x}=\left(\dfrac{x}{a^{\frac{x}{b}}}\right)^b$．由命题10即得 #

推论12：设 $b>0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^b}=0$

证：令 $y=\ln x$．则 $\dfrac{\ln x}{x^b}=\dfrac{y}{e^{by}}$．再由命题10即得． #

上面三个结论说明当 $x\to+\infty$ 时．$\ln x<<x^b<<a^x$．$\forall b>0$，$\forall a>1$．

即 $\ln x=o(x^b)$，$x^b=o(a^x)$．$(x\to+\infty)$

关于复数指数函数:

不难看到,命题5中 $\{a_n\}$ 为复数列时也成立. 从而命题6中 $x\in\mathbb{C}$ 时也成立.

从而 $\forall z\in\mathbb{C}$, 可定义 $e^z = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\in\mathbb{C}$.

命题7的证明方法同样可证明 $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

从而得到复指数函数 $e^z:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$. 令 $\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix}$ 为 e^{ix} 的实部

$\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$ 为 e^{ix} 的虚部.

则 $e^{ix}=\cos x + i\sin x$.

从而由 $e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$

知 $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

而 $\sin x = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

由 $e^{i(x+y)}=e^{ix}\cdot e^{iy}$ 知 $\cancel{\cos(x+y)+i\sin(x+y)=(\cos}$

$\cos(x+y)+i\sin(x+y) = \cancel{(\cos x + i\sin y)}(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)$

从而 $\cos(x+y)=\cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$

再由 $|e^{ix}|^2=1$ 知 $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.