10月11日 练习

以下总假定 k 为代数闭域.

一. (仿射簇的万有性质): 设 $X = \mathrm{Specm}\, A$ 为仿射簇.

对任一簇 Y. ~~证明正则函数拉回诱导的如下~~

对任一态射 $\varphi: Y \to X$, 其拉回同态给出一个

k-代数同态 $\varphi^{\#}: A \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$.

证明:
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(Y, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_k(A, \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^{\#} \end{array}$$

为集合间的双射.

注: 该练习说明, 为确定一个簇 Y 到仿射簇 X 的态射, 只需指定一个 k 代数同态 $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$.

二. 设 $\varphi: Y \to X$ 为簇之间的态射. 并设 $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 为 X 的一个开覆盖. 若 $\forall i$, $\varphi: \varphi^{-1}(U_i) \to U_i$ 为同构.

证明: φ 为同构.

三. 记 $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 为 k 上 $n+1$ 元多项式环. 则 S 为一个分次环. 对 S 中非零的 d 次齐次多项式 f,

$D_+(f) := \{ [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(x_0, \cdots, x_n) \neq 0 \}$ 为 $\mathbb{P}^n$ 中(主)开集. 注意到局部化环 S_f 自然为一个分次环 (对齐次多项式 $g \in S$, $\deg \frac{g}{f^m} = \deg g - m \cdot d$).

令 $S_{(f)}$ 为 S_f 中零次元形成的子环.

证明: ① $S_{(f)}$ 为 reduced, 有限生成 k-代数.

② 由练习一，k-代数同态 $S_{(f)} \to \Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$

$$\frac{g}{f^m} \longmapsto \frac{g}{f^m}$$

诱导一个态射 $D_+(f) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Spec}_m S_{(f)}$.

③ $\mathrm{Spec}_m S_{(f)} = \bigcup_{i=0}^{n} D\left(\frac{x_i^d}{f}\right)$ 为 $\mathrm{Spec}_m S_{(f)}$ 的一个仿射

开覆盖. 且 $\Gamma\left(D\left(\frac{x_i^d}{f}\right), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_m S_{(f)}}\right)$

$\simeq$ $S_{(f)}$ 在 $\frac{x_i^d}{f}$ 处的局部化

$\simeq$ $S_{(x_i)}$ 在 $\frac{f}{x_i^d}$ 处的局部化.

④ $\varphi^{-1}\left(D\left(\frac{x_i^d}{f}\right)\right) = D_+(f) \cap D_+(x_i)$

⑤ $D_+(f) \cap D_+(x_i)$ ~~$\simeq \mathrm{Spec}_m S_{(x_i)}$~~
为仿射簇, 其仿射坐标环同构于 $S_{(x_i)}$ 在 $\frac{f}{x_i^d}$ 处的
局部化.

⑤ $\varphi: D_+(f) \cap D_+(x_i) \to D\left(\frac{x_i^d}{f}\right)$ 为同构.

⑥ 利用练习二 证明 $\varphi: D_+(f) \to \mathrm{Spec}_m S_{(f)}$ 为同构

从而 $D_+(f)$ 为仿射簇.