2016.10.17 练习

以下总假定k为代数封闭域. 通常将仿射簇 $\mathrm{Spec}_m k[x_1, \cdots, x_n]$ 记作 $\mathbb{A}_k^n$, 称为k上n维仿射空间.

一、令 $C = V(x_1^3 - x_2^2) \subset \mathbb{A}_k^2$. 证明态射 $\mathbb{A}_k^1 \longrightarrow C$, $t \longmapsto (t^2, t^3)$ 为~~集合间~~拓扑空间的同胚, 但不是簇之间的同构.

二、设 $\mathrm{char}\, k = p > 0$. 证明 Frobenius 态射 $F: \mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1^p, \cdots, x_n^p)$ 为~~拓扑~~集合间的恒等映射, 但不是簇之间的同构.

三、设 $X = \mathrm{Spec}_m A$, $Y = \mathrm{Spec}_m B$, $S = \mathrm{Spec}_m C$. 且有态射 $X \to S$, $Y \to S$. 证明 $X \times_S Y \simeq \mathrm{Spec}_m \dfrac{A \otimes_C B}{\sqrt{0}}$, 其中 $\sqrt{0}$ 为 $A \otimes_C B$ 中幂零元形成的理想.

四、证明如下态射为闭嵌入:

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \longmapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1]$$

试写出该态射像的定义方程.

五、证明如下态射为闭嵌入: (该嵌入称为 Segre 嵌入)

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$$

$$([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) \longmapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \cdots : x_0 y_m : x_1 y_0 : \cdots : x_1 y_m : \cdots : x_n y_m]$$

六、证明射影簇的乘积仍为射影簇.