2016.9.28 练习

设 k 为代数封闭域. 以下涉及到的环均为 reduced 有限生成 k-代数. 环之间的同态均为 k-代数同态.

一、设 $\varphi: A \to B$ 为 k-代数同态. 其对应 affine variety 之间的 morphism $\psi: Y \to X$. 设 $I \subset A$ 为 A 中理想. $f \in A$.

验证: · $\psi^{-1}(V(I)) = V(IB)$.

· $\psi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$.

· ψ 为连续映射.

二、设 $I \subset A$ 为 A 中根式理想. $\psi: Y \to X$ 为环同态 $A \to A/I$ 对应的 affine variety 之间的态射.

验证 ψ 将 Y 同胚到 X 的闭子空间 $V(I)$.

~~设 $f \in A$.~~

三、设 $\psi: Y \to X$ 为 affine variety 之间的态射. 其对应 k-代数同态 $\psi^*: A \to B$.

证明: ψ 为 dominant (即 $\psi(Y)$ 在 X 中稠密) $\Leftrightarrow$ ψ^* 为单同态.

四、证明一个 affine variety X 为离散拓扑空间 $\Leftrightarrow$ X 的多项式函数环 A 为有限 k-代数. (即 $k \to A$ 为有限扩张, 或 $\dim_k A$ 有限).

此时 X 为有限个点形成的离散拓扑空间.

五. 设 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 为 k-代数同态. $m \subset A$ 为极大理想.
验证 B 中极大理想 n 满足 $\varphi^{-1}(n) = m \Longleftrightarrow n \supset mB$.

由此证明 φ 对应的 affine variety 间态射

$$\varphi: \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \| & & \| \\ \mathrm{Spec}_m B & & \mathrm{Spec}_m A \end{array}$$

在一个点 $m \in X$ 处的纤维 $\varphi^{-1}(m)$ 与 affine variety $\mathrm{Spec}_m B/\sqrt{mB}$ 一一对应.

六. 设 $A \to B$ 为有限扩张. 证明 affine variety 间态射 $\mathrm{Spec}_m B \to \mathrm{Spec}_m A$ 的任一纤维为有限集.

我们称 affine variety 间态射为有限态射, 如果其对应的 k-代数同态为有限扩张.