代数曲线间的态射

作为准备，我们首先证明一些代数预备知识.

引理1： 设 A 为 Noether 局部环. 设 M 为有限生成 A-模.
则 M 为平坦 A-模 $\Leftrightarrow$ M 为自由 A-模.

证： 见 Matsumura《Commutative Ring Theory》 Theorem 7.10

定义： 称一个含幺交换整环 A 为 Dedekind 整环，如果 A 为一维整闭 Noether 环.

引理2： 一个 Noether 整环 A 为 Dedekind 整环 $\Leftrightarrow$ 对 A 中任意极大理想 m，A_m 为离散赋值环（DVR）.

证： "$\Leftarrow$"，注意到 DVR 均为整闭整环. 由此可知 A 为整闭的，又由每个 A_m 均为一维环，知 A 为一维环.

"$\Rightarrow$" ~~我们需证一个一维 Noether 局部整闭整环为 DVR.~~
注意到 A_m 为一维 Noether 局部环，且为整闭整环.
我们要证 A_m 为 DVR.
见 Matsumura《Commutative Ring Theory》 Theorem 11.2.

设 $A \hookrightarrow B$ 为 Dedekind 整环间单的有限扩张，$q\in \mathrm{Spec}B$ 为 B 中极大理想，$p=q\cap A$ 为 A 中极大理想。则有局部同态 $A_p \hookrightarrow B_q$，记 π_A 为 DVR A_p 的极大理想 pA_p 的一个生成元。记 π_B 为 B_q 的极大理想 qB_q 的一个生成元，则 $\pi_A=\lambda\cdot\pi_B^e$，其中 λ 为 B_q 中可逆元，$e\geqslant 1$ 为正整数。我们记 $e(q)=e$，容易看出 $e(q)$ 不依赖于生成元 π_A,π_B 的选取。称 $e(q)$ 为 q 处的分歧指数。

如果进一步假设 A 为 DVR，则 B 为平坦 A-模，从而为自由 A-模，故 $\underset{\text{有}A\text{-模同构}}{B\simeq A^n}$。~~而容易看到 n=~~

由 $B\simeq A^n$ 知 $B\otimes_A K(A)\simeq A^n\otimes_A K(A)$，其中 $K(A)$ 为 A 的分式域。而由于 $B\otimes_A K(A)$ 为 B 的局部化，其仍为整环，且为 $K(A)$ 的单的有限扩张，由 $K(A)$ 为域知 $B\otimes_A K(A)$ 也为域，为 $B\otimes_A K(A)=K(B)$ 为 B 的分式域。

这样知 $n=[K(B):K(A)]$ 为分式域间的扩张次数。

记 m 为 DVR A 的极大理想，记 $\kappa=A/m$ 为 A 的剩余类域，由 $B\simeq A^n$ 知 $B\otimes_A \kappa\simeq \kappa^n$。

而 $B\otimes_A\kappa = B/mB$ 为零维 Noether 环，记其素理想集合 $\mathrm{Spec}\, B/mB=\{q_1,\cdots,q_l\}$，则由以下引理知

$$B/mB \simeq \bigoplus_{i=1}^{l}\left(B/mB\right)_{q_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{l}\frac{B_{q_i}}{mB_{q_i}}$$

记 $\kappa(q_i)=\dfrac{B_{q_i}}{q_iB_{q_i}}$ 为 B 在 q_i 处剩余类域，则

由于 $mB_{q_i}=(q_iB_{q_i})^{e(q_i)}$，不难看出 $\dim_\kappa \dfrac{B_{q_i}}{mB_{q_i}}=e(q_i)\cdot[\kappa(q_i):\kappa]$

记 $f_i=[\kappa(q_i):\kappa]$，记 $e_i=e(q_i)$，则我们得到：

(*) $n=[K(B):K(A)]=\sum_{i=1}^{l}e_if_i$.

引理3：设 B 为零维 Noether 环，其素理想为 $q_1,\cdots,q_l$，则有环同构 $B\simeq\bigoplus_{i=1}^{l}B_{q_i}$.

证：由于 $q_1,\cdots,q_l$ 为 B 中所有的素理想，知 $q_1\cap\cdots\cap q_l$ 为幂零理想。同理 $q_iB_{q_i}$ 为 B_{q_i} 中幂零理想。

从而存在正整数 N，使得在 B 中 $q_1^N\cdots q_l^N=0$，

而 $\forall i$，在 B_{q_i} 中 $(q_iB_{q_i})^N=0$.

又由于 $q_1,\cdots,q_l$ 为 B 中互不相同的极大理想，知 $\forall i\neq j$，

$q_i^N+q_j^N=B$.

从而由中国剩余定理知有环同构

$$\frac{B}{q_1^N\cdots q_l^N}\simeq\bigoplus_{i=1}^{l}B/q_i^N$$

而由 $q_1^N\cdots q_l^N=0$ 知 $B/q_1^N\cdots q_l^N=B$.

由 B/q_i^N 为局部环，知 $B/q_i^N=(B/q_i^N)_{q_i}=\dfrac{B_{q_i}}{q_i^NB_{q_i}}=B_{q_i}$.

以及 $q_i^NB_{q_i}=0$

故得 $B\simeq\bigoplus_{i=1}^{l}B_{q_i}$. #

设 $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2$ 为不可约光滑曲线间的有限态射.
$p \in C_1$, $Q = \varphi(p) \in C_2$. 则 φ 的拉回诱导 DVR 间的局部同态 $\mathcal{O}_{C_2,Q} \to \mathcal{O}_{C_1,p}$. 记 $e(p)$ 为该局部同态的分歧指数. 记 $\deg\varphi = [K(C_1) : K(C_2)]$ 为有理函数域的扩张次数. 注意到 C_1, C_2 均为代数闭域 k 上的曲线, 从而剩余类域 $\kappa(p)$, $\kappa(Q)$ 均同构于 k. 故
$[\kappa(p) : \kappa(Q)] = 1$.

应用上页的等式(*), 我们得到:

定理4: 设 $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2$ 为不可约光滑曲线间的有限态射.
则 ~~φ的次数~~ $\forall\, Q \in C_2$, 有等式

$$\deg\varphi = [K(C_1) : K(C_2)] = \sum_{p \in \varphi^{-1}(Q)} e(p) .$$

定义: 称不可约曲线间的有限态射 $C_1 \to C_2$ 为可分态射, 如果其有理函数域的扩张 $K(C_1)/K(C_2)$ 为可分扩张.

定理5: 设 $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2$ 为不可约光滑曲线间的有限态射.
如果 φ 为可分态射, 则存在 C_2 中非空开集 U, 使得 $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \to U$ 为不分歧的, 即 ~~∀Q∈U~~, $\forall\, p \in \varphi^{-1}(U)$, φ 在 p 处的分歧指数 $e(p) = 1$.