复习题 I.

以下代数簇均定义在一个代数封闭域 k 上. 可以自由运用曲线上的 Riemann-Roch 定理.

1. 令 $L := \{((x_1, x_2), [z_1 : z_2]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0\}$

证明 L 为 $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ 的闭子簇. 且到 $\mathbb{P}^1$ 的自然态射

证明 L 为代数簇之间的态射.

$\pi_2 : L \to \mathbb{P}^1$ 为代数簇之间的态射.

记 $\mathcal{L}$ 为 $L \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}^1$ 的截面层. 即对任意 $\mathbb{P}^1$ 中开集 U,

$\mathcal{L}(U) := \{ s : U \to L \mid s$ 为态射, 且 $\pi_2 \circ s = id \}$.

证明 $\mathcal{L}$ 为秩 1 的局部自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ 模层, 从而为 $\mathbb{P}^1$ 上可逆层.

计算 $\deg \mathcal{L}$.

2. 设 C 为不可约的射影光滑代数曲线,

$D = \sum_{i=1}^{m} n_i P_i$ 为 C 上除子, $P \in C$ 且 $P \neq P_i, \forall i = 1, \cdots, m$.

证明若 $f \in L(D + nP)$, 且 $f \notin L(D + (n-1)P)$, 则

$v_P(f) = -n$.

3. 设 C 为不可约的射影光滑代数曲线,

$P_1, \cdots, P_\alpha$ 为 C 上互不相同的 α 个点,

$n_1, \cdots, n_\alpha$ 为整数,

证明: C 上存在非零有理函数 $f \in K(C)$, 满足

$v_{P_i}(f) = n_i, \quad \forall i = 1, \cdots, \alpha$.

4. 设 $d\geq 1$ 为正整数, $a_1,\cdots,a_m \in k$ 为互不相同的元素.

令 $C:=\{(x,y)\in \mathbb{A}^2 \mid y^d-(x-a_1)\cdots(x-a_m)=0\}$.

通过标准嵌入 $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$

$$(x,y) \longmapsto [x:y:1]$$

令 $\overline{C}$ 为 C 在 $\mathbb{P}^2$ 中的 Zariski 闭包.

试写出 $\overline{C}$ 的定义方程. 并讨论 $\overline{C}$ 是否为光滑簇.

5. 证明在上一题中若取 $d=2$, $m=3$, 则 $\overline{C}$ 为亏格为 1 的光滑射影曲线, 即椭圆曲线.

6. 证明 Riemann-Hurwitz 公式:

设 $f: C_1 \to C_2$ 为不可约射影光滑曲线之间的非常值态射. 并且 $\forall p\in C_1$, f 在 p 处的分歧指数 e_p 满足: 在 k 中 $e_p\neq 0$.

则有亏格间的等式:

$$2g(C_1)-2 = \deg f\cdot(2g(C_2)-2)+\sum_{p\in C_1}(e_p-1).$$