正则簇

以下总假设 $k=\bar{k}$ 为代数闭域.

定义: 设 (A, m) 为 Noether 局部环, $\kappa = A/m$ 为剩余类域. 我们称 A 为正则局部环, 如果 $\dim A = \dim_\kappa \frac{m}{m^2}$.

定理1(见 Matsumura《Commutative Ring Theory》Theorem 14.3 及 Theorem 20.3)
正则局部环为 UFD(唯一因子分解整环).

定理2(见 Matsumura《Commutative Ring Theory》Theorem 19.3):
设 A 为正则局部环, p 为 A 的素理想, 则 A_p 也为正则局部环.

例: 任取多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 的素理想 p, 则 $k[x_1, \cdots, x_n]_p$ 为正则局部环.

性质3: 设 (A, m) 为正则局部环, $f \in m$. 则
$\frac{A}{(f)}$ 为正则局部环 $\Leftrightarrow 0 \neq \bar{f} \in \frac{m}{m^2} \Leftrightarrow f \notin m^2$.

证: 由于 A 为整环. 由维数的基本定理知 $\dim \frac{A}{(f)} = \dim A - 1$.
记 $\kappa = A/m$. 记 $\bar{m} = \frac{m}{(f)}$ 为 $A/(f)$ 中极大理想
则易验证 $\bar{m}/\bar{m}^2 \simeq \frac{\frac{m}{(f)}}{\frac{m^2+(f)}{(f)}} \simeq \frac{\frac{m}{m^2}}{\frac{(f)+m^2}{m^2}}$

由此知 $\dim_\kappa \bar{m}/\bar{m}^2 = \begin{cases} \dim_\kappa \frac{m}{m^2}, & \text{如果 } f \in m^2. \\ \dim_\kappa \frac{m}{m^2} - 1, & \text{如果 } f \notin m^2. \end{cases}$

#

性质4：设 $(A,\mathfrak{m})$ 为正则局部环．则有：

(1) 若 $f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{m}$ 且 $\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_n$ 在 $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ 中线性无关．则 $\frac{A}{(f_1,\cdots,f_n)}$ 为正则局部环．

(2) 若 $I\subset\mathfrak{m}$ 为 A 的理想 且 A/I 为正则局部环．则存在 $f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{m}$ 且 $\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_n$ 在 $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ 中线性无关．使得 $I=(f_1,\cdots,f_n)$．

证：(1) 利用性质3．对 n 作归纳即可．

(2) 记 $\bar{\mathfrak{m}}=\frac{\mathfrak{m}}{I}$ 为 A/I 中极大理想．对 $\dim A$ 归纳．

我们可设 $I\neq 0$．从而 $\dim A/I<\dim A$

从而 $\dim_k \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2<\dim_k\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$．

而 $$\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2\simeq\frac{\frac{\mathfrak{m}}{I}}{\frac{\mathfrak{m}^2+I}{I}}\simeq\frac{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}}{\frac{I+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}}$$

知存在 $f_1\in I$．使得 $f_1\notin\mathfrak{m}^2$．

由性质3知 $A/(f_1)$ 为正则局部环且 $\dim A/(f_1)=\dim A-1$．

且 $$A/I=\frac{A/(f_1)}{I/(f_1)}$$

由归纳假设知 $\exists\ f_2,\cdots,f_n\in\mathfrak{m}$．使得

$\bar{f}_2,\cdots,\bar{f}_n$ 在 $$\frac{\frac{\mathfrak{m}}{(f_1)}}{\frac{\mathfrak{m}^2+(f_1)}{(f_1)}}=\frac{\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}}{\frac{(f_1)+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}}$$ 中线性无关．

且 $\frac{I}{(f_1)}=(\bar{f}_2,\cdots,\bar{f}_n)$．

故知 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)=I$ 且 $\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_n$ 在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中线性无关．

\#

定义：设 X 为 k 上的簇. 称 $x\in X$ 为 X 的正则点，如果 $\mathcal{O}_{X,x}$ 为正则局部环.

例：设 $f_1(X_1,\dots,X_n),\dots,f_l(X_1,\dots,X_n)\in k[X_1,\dots,X_n]$

设 $a=(a_1,\dots,a_n)\in V(f_1,\dots,f_l)\subset \mathbb{A}^n_k$，且

在 a 点的 Jacobian 矩阵 $\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(a_1,\dots,a_n)\right]$ 为列满秩

矩阵. 则不难由性质 4,(1) 知 a 为 $V(f_1,\dots,f_l)$ 的正则点.

下面的定理说明任一正则点局部上均形如上面的例子.

定理（Jacobian 判别法）：设 X 为 k 上的簇. 且 $x\in X$ 为 X 的正则点，则存在 x 的仿射开邻域 U，使得有同构 $U\simeq \mathrm{Specm}\,\frac{k[X_1,\dots,X_n]}{(f_1,\dots,f_l)}$，且在 x 点的 Jacobian 矩阵 $\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right]$ 为列满秩矩阵.

证：任取 x 的仿射开邻域 $V\simeq \mathrm{Specm}\,\frac{k[X_1,\dots,X_n]}{I}$.

设 x 对应于 $k[X_1,\dots,X_n]$ 中极大理想 m. 记 $A=k[X_1,\dots,X_n]_m$. 则 $\frac{A}{IA}$ 为正则局部环.

利用性质 4,(2) 知存在 $f_1,\dots,f_l\in mA$，满足 $\bar{f}_1,\dots,\bar{f}_l\in\frac{m}{m^2}$ 线性无关，且 $IA=(f_1,\dots,f_l)$.

由此不难看出通过取 V 的一个适当的主开集 U，即得所要的开邻域. #

~~由于任一不可约~~

由 Jacobian 判别法知 X 上的正则点形成的集合为开集（因为矩阵的列满秩是一个开条件）.

又由于任一不可约簇均双有理等价于一个不可约超曲面，而不可约超曲面上的正则点形成一个非空开集. 从而得到：

性质：设 X 为 k 上的簇，则

$X^{sm} := \{ x \in X \mid x$ 为 X 的正则点$\}$ 为 X 的一个稠密开子集（从而非空）.