Stein 分解

以下 $k=\bar{k}$ 为代数闭域，簇均是指 k 上的簇.

定义：设 X 为簇，$\mathcal{F}$ 为 X 上的 $\mathcal{O}_X$-模层，我们称 $\mathcal{F}$ 为 quasi-coherent ~~(coherent)~~ $\mathcal{O}_X$-模层，如果对 X 的任一仿射开集 $U=\mathrm{Spec}_m A$，对任一非零 $f\in A$，均有限制同态诱导的 A_f-模同态 $\mathcal{F}(U)_f\to\mathcal{F}(D(f))$ 为同构. 如果进一步 $\mathcal{F}(U)$ 均为有限 A-模，则称 $\mathcal{F}$ 为 coherent $\mathcal{O}_X$-模层.

性质1：设 $\mathcal{F}$ 为簇 X 上的 $\mathcal{O}_X$-模层. $X=\bigcup_{i=1}^n U_i$ 为 X 的一个仿射开覆盖. 如果 $\forall i$，$\mathcal{F}|_{U_i}$ 为 quasi-coherent (coherent) $\mathcal{O}_{U_i}$-模层，则 $\mathcal{F}$ 为 quasi-coherent (coherent) $\mathcal{O}_X$-模层.

证明：该证明基于如下三个断言：

断言1：设 U_1, U_2 为 X 的仿射开子集，$x\in U_1\cap U_2$. 则存在 x 的开邻域 $V\subset U_1\cap U_2$，使得 V 既是 U_1 的主开集，也是 U_2 的主开集.

断言2：设 U 为 ~~仿射子~~ X 的仿射开子集. $U=\bigcup_{i=1}^m V_i$ 为 U 的主开集形成的开覆盖. $\mathcal{F}|_{V_i}$ 为 quasi-coherent，则对任一截面 $s\in\mathcal{F}(U)$，对任一 $f\in\mathcal{O}_X(U)$，如果 $s|_{D(f)}=0$，则 $\exists N\geq 1$, s.t. $f^N\cdot s=0\in\mathcal{F}(U)$.

断言3：条件同断言2，如果给定 $s_1\in\mathcal{F}(D(f))$，则存在 $s\in\mathcal{F}(U)$，存在 $N\geq 1$, s.t. $s|_{D(f)}=f^N\cdot s_1$.

#

Čech 复形（见 Hartshorne《Algebraic Geometry》Chapter III, §4）

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ 为 X 的开覆盖. ~~固定~~ ~~I 的一个序~~. 对 I 中的有限个指标 $i_0,\cdots,i_p\in I$，记交集

$U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}$ 为 $U_{i_0\cdots i_p}$.

如果 $\mathcal{F}$ 为 X 上的 Abel 群层. 对任一 $p\geq 0$. 定义 Abel 群

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}):=\prod_{(i_0,\cdots,i_p)\in I^p}\mathcal{F}(U_{i_0\cdots i_p}).$$

记一个元素 $\alpha\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 的 $(i_0,\cdots,i_p)$-分量为

$\alpha_{i_0\cdots i_p}\in\mathcal{F}(U_{i_0\cdots i_p})$. 定义边缘同态

$$\begin{aligned} d^p:\ C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) &\longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\\ \alpha &\longmapsto d^p\alpha \end{aligned}$$

为 $$(d^p\alpha)_{i_0\cdots i_{p+1}}=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\alpha_{i_0,\cdots,\hat{i}_k,\cdots,i_{p+1}}\Big|_{U_{i_0\cdots i_{p+1}}}$$

其中 $\hat{i}_k$ 表示删去 i_k.

容易验证 $d^{p+1}\circ d^p=0$, $\forall p\geq 0$. 这样我们得到

Čech 复形：

$$C^\cdot(\mathcal{U},\mathcal{F}):\quad 0\to C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{d^0}C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{d^1}C^2(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\cdots$$

性质2：自然同态 $\mathcal{F}(X)\to\ker d^0$ 为同构，即

$$0\to\mathcal{F}(X)\to C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{d^0}C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$ 为左正合列.

证：由定义即得. #

注：我们在这里给出的 Čech 复形的定义与通常采用的略有差别。~~我们事设~~ 通常只考虑有序对 $(i_0\cdots i_p)$ 或要求 $\alpha_{i_0\cdots i_p}=(-1)^{\sigma}\alpha_{\sigma i_0\cdots\sigma i_p}$，对每个置换 $\sigma\in S_{p+1}$。见 Hartshorne《Algebraic Geometry》Chapter III，§4 Čech Cohomology。~~Remark~~ 218页的定义及注记。

~~注~~ 实际上我们这样定义的 Čech 复形与通常 Čech 复形具有同构的上同调。（见扶磊《代数几何》Proposition 2.3.1）

而在 étale 上同调中，Čech 复形采用的是我们这里给出的定义。

性质3：设 $X\xrightarrow{\varphi}Y$ 为簇的~~同~~态射，$\mathcal{F}$ 为 quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-模层，则通过拉回同态 $\mathcal{O}_Y\to\varphi_*\mathcal{O}_X$，$\varphi_*\mathcal{F}$ 成为 quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-模层。特别地，$\varphi_*\mathcal{O}_X$ 为 quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-模层。

证：不妨设 $Y=\mathrm{Spec}_m A$ 为仿射簇，对任意 $f\in A$，我们需证 $\varphi_*\mathcal{F}(Y)_f=\mathcal{F}(X)_f\longrightarrow\varphi_*\mathcal{F}(D(f))=\mathcal{F}(\varphi^{-1}(D(f)))$ 为同构。

为此，取 X 的仿射开覆盖 $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$，记该开覆盖为 $\mathcal{U}$。得到 $\varphi^{-1}(D(f))$ 的开覆盖 $\varphi^{-1}(D(f))=\bigcup_{i=1}^{n}U_i\cap\varphi^{-1}(D(f))$。记~~由~~这个 $\varphi^{-1}(D(f))$ 的开覆盖为 $\mathcal{U}_f$，则我们有左正合列：

(1): $0 \to \mathcal{F}(X) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

(2): $0 \to \mathcal{F}(\varphi^{-1}(D(f))) \to C^0(\mathcal{U}_f, \mathcal{F}|_{\varphi^{-1}(D(f))}) \to C^1(\mathcal{U}_f, \mathcal{F}|_{\varphi^{-1}(D(f))})$

注意到 $U_i \cap \varphi^{-1}(D(f))$ 为 U_i 的主开集. 从而由$\mathcal{F}$为~~quasi-coher~~ quasi-coherent, $\mathcal{F}(U_i \cap \varphi^{-1}(D(f))) \simeq \mathcal{F}(U_i)_f$.

同理由 $U_i \cap U_j$ 为仿射开集. $U_i \cap U_j \cap \varphi^{-1}(D(f))$ 为其主开集. 知 $\mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap \varphi^{-1}(D(f))) \simeq \mathcal{F}(U_i \cap U_j)_f$.

由此不难看出有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X)_f \arrow[r] & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})_f \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})_f \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(\varphi^{-1}(D(f))) \arrow[r] & C^0(\mathcal{U}_f, \mathcal{F}|_{\varphi^{-1}(D(f))}) \arrow[r] & C^1(\mathcal{U}_f, \mathcal{F}|_{\varphi^{-1}(D(f))})
\end{tikzcd}$$

并且由 (1) 为左正合列知上图中~~的行序列~~每一行均为左正合列. 从而有同构 $\mathcal{F}(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\varphi^{-1}(D(f)))$.

#

推论4: 设 $X \xrightarrow{\varphi} Y$ 为簇之间的射影态射. 则 $\varphi_* \mathcal{O}_X$ 为 coherent $\mathcal{O}_Y$-模层.

证: 由性质3及我们承认的事实: 若 $\varphi: X \to \mathrm{Specm} A$ 为射影态射. 则 $\mathcal{O}_X(X)$ 为有限 A-模得到.

#

性质5：设 $X \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Specm}\,A$ 为射影态射，则存在分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ \mathrm{Specm}\,A & \end{tikzcd}$$

使得 $\varphi = g\circ f$，g 为有限态射，且 f 的拉回诱导同构 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$，并且 f 为满射.

证：记 $B=\mathcal{O}_X(X)$，则 B 为有限 A-代数.

令 $Z=\mathrm{Specm}\,B$. f 为 B 到 $\mathcal{O}_X(X)=B$ 的恒等同态所诱导的态射，g 为 φ 诱导的拉回同态 $A\to B$ 所对应的态射. 则 $\varphi=g\circ f$，g 为有限态射.

由于 $\mathcal{O}_Z$ 与 $f_*\mathcal{O}_X$ 均为 quasi-coherent $\mathcal{O}_Z$-模层，且拉回同态 $\mathcal{O}_Z \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ 的整体截面

$\mathcal{O}_Z(Z)=B \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X(Z) = \mathcal{O}_X(X)$ 为同构.

从而 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$ 为模层同构.

由于 φ 为射影态射，从而 f 为射影态射. 知 $\mathrm{Im}(f)$ 为 Z 的闭子集. 若 $\mathrm{Im}(f) \subsetneq Z$，取 $z\in Z\setminus \mathrm{Im}(f)$. 则易验证 $f_*\mathcal{O}_X$ 在 z 点的 stalk 为 0. 但 $\mathcal{O}_{Z,z}\neq 0$. 故矛盾. 知 f 为满射. #

通过一个简单的粘合操作，我们可以从性质5得到：

定理6：设 $X \xrightarrow{\varphi} Y$ 为射影态射，则存在分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

使得 $\varphi = g\circ f$，g 为有限态射，f 为满射，且 f 诱导的拉回 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$ 为同构.

定理7(连通性定理)：设 $X \xrightarrow{f} Z$ 为射影态射.
且 f 的拉回诱导同构 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$.
则 f 为满射. 且 $\forall z \in Z$, $f^{-1}(z)$ 连通.

证：见 Hartshorne《Algebraic Geometry》Corollary 11.3.

推论8：设 X, Z 均为射影簇. $f: X \to Z$ 为态射.
~~且 f 为满射~~, 且 f 的拉回诱导同构 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$.
且 $\forall z \in Z$, $f^{-1}(z)$ 均为有限个点, 则 f 为同构.

证一：由于射影簇间的态射均为射影态射. 从而应用定理7知 f 为双射. 又由于 f 为闭映射, 知 f 为同胚. 再由 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$ 知 f 为同构. #

证二(不依赖于定理7)：我们只需证 ~~$\forall z \in Z$, $f^{-1}(z)$~~ f 为单射即可.

如果存在 $z \in Z$, 以及存在 $x_1, x_2 \in f^{-1}(z)$. 使 $x_1 \neq x_2$. 我们断言存在 z 的开邻域 $U \subset Z$, 以及 $f^{-1}(U)$ 上的正则函数 $h \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{O}_X(U)$, 使得 $h(x_1) \neq h(x_2)$. 这样 h 一定不是 U 上某个函数的拉回, 与 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$ 矛盾. 从而命题得证.

断言的证明：设有闭嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, 由于 $f^{-1}(z)$ 为有限个点, 可取到 $\mathbb{P}^N$ 的超平面 H, 使得 $H \cap f^{-1}(z) = \emptyset$. 由于 $\mathbb{P}^N - H$ 为仿射簇, 其闭子簇 $V := X - H$ 也为 X 的仿射开子集, 从而可找到 $h \in \mathcal{O}_X(V)$, 使得 $h(x_1) \neq h(x_2)$. 又由于 f 为闭映射,

知 $f(X-V)$ 为 Z 中不包含 z 点的闭集. 从而可取到 z 的开邻域 U, 使得 $f^{-1}(U)\subset V$. ~~这样~~ 将 $h\in\mathcal{O}_X(V)$ 限制到 $f^{-1}(U)$ 上即为所求. #

定理 9 (Stein 分解): 设 $X\xrightarrow{\varphi}Y$ 为射影态射. 则存在分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

, 使得 $\varphi=g\circ f$, g 为有限态射, f 为满态射, f 诱导同构 $\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$, 且 $\forall z\in Z$, $f^{-1}(z)$ 连通.

证: 由定理 6 和定理 7 即得. #

~~定理 10~~: ~~设~~
推论 10: 设 X, Y 为射影簇, $\varphi: X\to Y$ 为态射. 且 $\forall y\in \mathrm{Im}(X)$, $\varphi^{-1}(y)$ 为有限点集. 则 φ 为有限态射.

证: 由定理 6 和推论 8 即得. #

推论 11: 设 X, Y 为不可约射影曲线. $\varphi: X\to Y$ 为非常值态射 (即 $\varphi(X)$ 不是单点集). 则 φ 为有限态射, 且 $\varphi(X)=Y$.

证: 由于 φ 为射影态射, 从而为闭映射. 由 X 不可约知 $\varphi(X)$ 为 Y 中不可约闭子集, 而 $\dim Y=1$ 且 $\varphi(X)$ 不为一个点, 知 $\varphi(X)=Y$. 且 $\forall y\in Y$, $\varphi^{-1}(y)\subsetneq X$ 为 X 中闭子集. 由 $\dim X=1$ 知 $\varphi^{-1}(y)$ 为有限点集. 从而由推论 10 知 φ 为有限态射. #