2017年春季学期代数几何复习题

1. 设U_1 和U_2 均为概型X 的开子概型，并且满足$U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $X = U_1 \cup U_2$.

   证明：有环同构：$\mathcal{O}_X(X) \simeq \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$.

2. 设X 为Noether 概型，Y 为X 的闭子集。定义X 的理想层$\mathcal{I}_Y$ 如下：对X 中任一开子集U，$\mathcal{I}_Y(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) | \forall y \in Y \cap U, f(y) = 0\}$. 其中$f(y) \in \kappa(y)$ 看做f 在点y 处的取值。

   证明：$\mathcal{I}_Y$ 为拟凝聚(quasi-coherent) $\mathcal{O}_X$-模层。

3. 设k 为域。我们称一个$k-$概型X 为拟射影的(quasi-projective), 如果存在概型的开嵌入$U \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ 以及闭嵌入$X \hookrightarrow U$.

   (1) 设X 为拟射影的k-概型，并设结构态射$X \to Speck$ 是proper 态射。

   证明：$X \to Speck$ 为射影态射。

   (2) 设L/k 为域的有限扩张，X 为拟射影的k-概型。记$X_L := X \times_{Speck} SpecL$ 为X 的基变换。如果$X_L \to SpecL$ 为射影态射。

   证明：$X \to Speck$ 也为射影态射。

4. 设k 为代数闭域。

   (1) 设X 为不可约射影k-概型。如果X 还是仿射概型，证明: 作为集合，X 只包含一个点.

   (2) 设$X \subset \mathbb{P}^n_k$ 为$\mathbb{P}^n_k$ 的不可约闭子概型，且存在超平面H，使得$X \cap H = \emptyset$.

   证明：作为集合，X 只包含一个点.

   (3) 设$n \geq 2$, 设$x \in \mathbb{P}^n_k$ 为$\mathbb{P}^n_k$ 的闭点。

   证明：$\mathbb{P}^n_k$ 的开子概型$\mathbb{P}^n_k - \{x\}$ 不是仿射概型。

5. 设X 为Noether 概型，$\mathcal{F}$ 为X 上的凝聚(coherent) $\mathcal{O}_X$-模层。

   证明：$Supp(\mathcal{F}) := \{x \in X | \mathcal{F}_x \neq 0\}$ 为X 的闭子集。

6. (1) 设$X \xrightarrow{f} Y$ 为Noether 概型间的有限态射，$\mathcal{L}$ 为Y 上的ample invertible 层。

   证明：$f^*\mathcal{L}$ 为X 上的ample invertible 层。

(2) 设k 为域，Y 为射影k-概型。设$X \to Y$ 为有限态射。

证明：X 为射影k-概型。

7. 设k 为域。

(1) 设$\mathcal{F}$ 为$\mathbb{A}^1_k = Speck[X]$ 上的秩为r 的局部自由$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$-模层。

证明：$\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}^r_{\mathbb{A}^1_k}$ 为秩r 的自由$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$-模层。

(2) 设$\mathcal{F}$ 为$\mathbb{P}^1_k$ 上的秩为r 的局部自由$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$-模层。

证明：$\mathcal{F} \simeq \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(a_i)$ 为r 个可逆层的直和。

（提示：可利用主理想整环上矩阵的Smith 标准型分析转移矩阵）

8. 设L/k 为域扩张。设X 为k-概型，$X \to Speck$ 为分离(separated) 态射。设$\mathcal{F}$ 为拟凝聚的$\mathcal{O}_X$-模层。记$X_L = X \times_{Speck} SpecL$ 为X 的基变换, $f : X_L \to X$ 为相应的态射。

证明：对任意整数j，存在L-线性空间同构：$H^j(X_L, f^*\mathcal{F}) \simeq H^j(X, \mathcal{F}) \otimes_k L.$

(提示：可以考虑利用Cěch 上同调)

9. 设k 为域，$d \geq 1$, $n \geq 2$ 为整数。设$F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ 为d 次齐次非零多项式。记$Y = V_+(F)$ 为由F 定义的$\mathbb{P}^n_k$ 的闭子概型，$i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ 为相应的闭嵌入态射。

证明：存在$\mathbb{P}^n_k$ 上凝聚$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-模层的短正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0$$

并对任意整数j，计算k-线性空间$H^j(Y, \mathcal{O}_Y)$ 的维数。