正十二面体群

考虑中心放置在 $\mathbb{R}^3$ 的原点位置的正十二面体 X，考虑其对称群（正十二面体群）$G := \{ g \in SO(3) \mid gX = X \}$.

其中 $SO(3) = \{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = I,\ \det A = 1 \}$ 为三阶特殊正交变换群.

不难看出，G 中的元素分为三类：

(1) 绕两个相对的顶点旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 的倍数，共20个非平凡旋转

(2) 绕两个相对面的中心旋转 $\frac{2\pi}{5}$ 的倍数，共24个非平凡旋转

(3) 绕两个相对边的中心旋转 π 的倍数，共15个非平凡旋转

由于 X 的任何两个顶点都在同一个 G 作用下的轨道中，可知第(1)类中的20个非平凡旋转相互共轭.

同理知第(2)类中的24个非平凡旋转相互共轭，同时第(3)类中的15个非平凡旋转相互共轭.

设 $H \lhd G$ 为 G 的正规子群，若 $g \in H$，则 g 在 G 中的共轭类均包含于 H. 由此知 ~~第(1)类~~ 上述三类旋转中若有一个旋转包含于 H，则整个同类型旋转全部包含于 H 中.

从而 $|H|$ 只有 1，$1+20$，$1+24$，$1+15$，$1+20+24$，$1+20+15$，$1+24+15$，$1+20+24+15$

这样九种可能.

又由于 $|G| = 1+20+24+15 = 60$，而 $|H| \mid |G|$

故只能有 $|H| = 1$ 或 60. 从而 $H = \{e\}$ 或 G.

这样我们证明了 G 为单群. 且 $|G| = 60$

下面证明 $G \simeq A_5$.

不难看出正十二面体的30条边可以分成五组，每一组包含六条边，而这六条边~~可分成~~两两相对，且形成 $\mathbb{R}^3$ 中一个直角坐标系.

由于 G 显然作用于这五组边上，从而得到群同态

$$\varphi: G \longrightarrow S_5.$$

令 $\varepsilon: S_5 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为 S_5 到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的唯一非平凡同态.

考虑复合同态 $\varepsilon \circ \varphi: G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

由于 G 为单群，只能有 $\ker(\varepsilon\circ\varphi) = G$. 从而知 $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\varepsilon = A_5$. 又由于 G 为单群且 $\varphi: G \to A_5 \hookrightarrow S_5$ 为非平凡同态，知 $\ker\varphi \neq G$，从而 $\ker\varphi = \{e\}$.

知 $G \xrightarrow{\varphi} A_5$ 为单同态，又由于 $|G| = |A_5| = 60$

知 $G \xrightarrow{\varphi} A_5$ 为同构.

这样我们通过 G 为单群证明了 A_5 为单群.

交错群 A_n ($n\geq 5$) 是单群

我们已经证明了 A_5 是单群，下面通过对 n 归纳证明 A_n ($n\geq 5$) 是单群.

首先固定一些记号. 我们记对称群 $S_n := \{f: X_n \to X_n \mid f$ 为双射$\}$. 其中 $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为前 n 个自然数. 由定义知 S_n 自然地作用于集合 X_n 上. 并且该作用是可迁的. 同时可以看出，对任意 $n\geq 5$，S_n 的子群 A_n 在 X_n 上的作用也是可迁的.

对 $i \in X_n$. 我们记 $A_{n,i} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma(i) = i\}$ 为 A_n 在 i 点的稳定子群. 由于 A_n 在 X_n 上作用可迁, 可知 $\forall i, j \in X_n$. $\exists \tau \in A_n$. 使得 $A_{n,j} = \tau A_{n,i} \tau^{-1}$. 即 $A_{n,i}$ 与 $A_{n,j}$ 在 A_n 中共轭. 同时不难看出, $\forall i \in X_n$，有同构 $A_{n,i} \simeq A_{n-1}$. 我们将这些观察总结为如下引理.

引理1. $\forall i \in X_n$, $A_{n,i} \simeq A_{n-1}$. 并且 $\forall i, j \in X_n$. $\exists \tau \in A_n$ 使得 $A_{n,j} = \tau A_{n,i} \tau^{-1}$.

容易看出 A_n 的子群 $\{A_{n,i} \mid i \in X_n\}$ 生成了 A_n. 即如下引理成立.

引理2: A_n 的 n 个子群 $A_{n,i}$ ($i=1,2,\cdots,n$) 生成了 A_n.

证: 任取 $\sigma \in A_n$. 若 $\sigma(1) = 1$. 则 $\sigma \in A_{n,1}$. 若 $\sigma(1) = i$，而 $i \neq 1$. 则很容易构造一个 $\tau \in A_{n,j}$ 使得 $\tau(1) = i$. 其中 j 为与 $1, i$ 均不相同的 X_n 中元. 这样 $\sigma \cdot \tau^{-1} \in A_{n,i}$. 从而 $\sigma = (\sigma \tau^{-1}) \cdot \tau$ 落在 $A_{n,i}$ 和 $A_{n,j}$ 生成的子群中. #

下面的引理是一个关键的观察.

引理3: ~~设 N 为 A_n $(n\geq$~~

设 $n\geq 5$, 并设 $N \lhd A_n$ 为 A_n 的正规子群. 若 $N\neq\{e\}$, 则必存在 $i\in X_n$, 使得 $N\cap A_{n,i}\neq\{e\}$.

先承认该引理, 我们即可完成 A_n $(n\geq 5)$ 为单群的证明.

定理: $\forall n\geq 5$, A_n 为单群.

证: ~~$N\neq\{e\}$. 由引理3 知 $\exists i\in X_n$~~

~~设 $N\lhd A_n$ 且 … 我们对 n 归纳. 假设~~

~~使得 $N\cap A_{n,i}\neq\{e\}$~~

我们已证明 A_5 是单群.

现在假设 $n\geq 6$, 并且假设已知 A_{n-1} 是单群.

下面证 A_n 是单群.

设 $N\lhd A_n$ 且 $N\neq\{e\}$. 由引理3 知 $\exists i\in X_n$ 使得 $N\cap A_{n,i}\neq\{e\}$. 而由引理1, $A_{n,i}\simeq A_{n-1}$ 为单群. 从而由 $N\cap A_{n,i}\lhd A_{n,i}$ 知 $N\cap A_{n,i}=A_{n,i}$, 即 $A_{n,i}\subseteq N$.

又由引理1 知 $\forall j\in X_n$, $A_{n,j}$ 与 $A_{n,i}$ 共轭, 从而由 N 是正规子群知 $\forall j\in X_n$, $A_{n,j}\subseteq N$.

再由引理2 即知 $A_n=N$. #

引理3的证明: 取一个 $\sigma\in N$ 且 $\sigma\neq e$. 不妨设 $\sigma(1)=2$. 通过将 σ 分解为不相交轮换之积容易看到, 一定存在 $\tau\in A_n$ 使得 $\tau(1)=1$, $\tau(2)=2$ 且 $\tau\sigma\tau^{-1}\neq\sigma$. 这样 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}(2)=2$, 从而 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\in N\cap A_{n,2}$ 且 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}\neq e$ 知 $N\cap A_{n,2}\neq\{e\}$. #