近世代数补充题.复习题.

1. p、q是两不相同素数. 决定 pq阶群的共轭类.

2. (有限Abel群的复特征) G : finite abelian group

定义 $\chi: G \to \mathbb{C}^\times$ 为群同态, 称为 G 的特征

$\hat{G} = \{ \chi : \chi \text{为特征} \}$, 例如 $\chi_0 : g \mapsto 1 \quad \forall g \in G$ 是个~, 称为平凡特征

① 验证 $\hat{G}$ 有自然群结构, 证明 $\hat{G} \cong G$, 此同构不是典范的.

② 证明"∧"是 Finite Abelian Group → Finite Abelian Group

的正合反变函子. i.e. :

$G \xrightarrow{f} H$ 自然诱导 $\hat{H} \xrightarrow{f^*} \hat{G}$

且若 $0 \to G_1 \to G \to G_2 \to 0$ 是正合的, 则有正合列

$0 \to \hat{G}_2 \to G \to \hat{G}_1 \to 0$.

③ 证明自然映射 $G \to \hat{\hat{G}}$ 是同构

④ 证明: 若 χ 是 G 的非平凡特征, 则 $\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$

若 $g \neq 1$, 则 $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0$

[References : 参考代数数论, Dirichlet特征, Chebotrev 定理].

3. (Diagonal Map) 设 $\alpha_0 < \alpha_1 \le \alpha_2$ 均是整数. p是素数.

$$\phi : \frac{\mathbb{Z}}{p^{\alpha_0}\mathbb{Z}} \to \frac{\mathbb{Z}}{p^{\alpha_1}\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{p^{\alpha_2}\mathbb{Z}}$$

$$x \mapsto (p^{\alpha_1 - \alpha_0} x, \ p^{\alpha_2 - \alpha_0} x).$$

令 $H = \mathrm{Im}(\phi)$. 试将 $\frac{G}{H}$ 表示成直积的形式

4. (代数数论里的作业题)

G是有限生成 Abel 群, ~~$q \in \mathbb{Z}$~~ $q \geq 1$ $q \in \mathbb{Z}$,

则 G 中指数为 q 的子群只有有限个

[Hint: $M_n(\mathbb{Z})$ 中的 Smith 标准形: $A = PBQ$ $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$, $B = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $r = \operatorname{rank} A$, $d_1 | d_2 | \cdots | d_r$]

[The hint may be misleading to a too long answer]

5. $SO_n(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有自然作用, 将 $\mathbb{R}^n$ 拆分成轨道的无交并.

6. 求 $\mathrm{Aut}(S_5)$.

7. (i). 证明 $385 = 5 \times 7 \times 11$ 阶群G的 Sylow-7-group 位于中心,

且 11-Sylow group 是正规的

(ii) 由(i)推出: G ~~只有两种~~ 在同构意义下只有两个.