卷积与函数逼近

参考文献：《傅立叶分析导论》，Stein，Shakarchi，世界图书出版公司影印．Chapter 2，§3，§4，§5.

主要问题：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的函数．可以用怎样的"好"函数来逼近 $f(x)$．比如，是否对任意 $\varepsilon>0$，均存在可微函数 $f_\varepsilon(x)$，使得

$$|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b]\ ?$$

我们将看到，若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $\forall\varepsilon>0$，均存在多项式 $P_\varepsilon(x)$，使得

$$|f(x)-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

（Weierstrass 逼近定理）

我们的主要工具为积分．首先定义一种运算．

定义：设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数，定义 $\mathbb{R}$ 上的新函数 $f*g(x)$ 如下：

$$f*g\,(x):=\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,g(x-y)\,dy$$

练习一：设 $f(x)$，$g(x)$ 均为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数．验证如下性质：

(1) $f*g\,(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,g(y)\,dy$，即 $f*g\,(x)=g*f\,(x)$.

(2) 若 $h(x)$ 也为 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数，则

$$f*(g+h)(x)=f*g\,(x)+f*h\,(x).$$

(3) 设 c 为常数，则 $c\cdot f*g\,(x)=(cf)*g\,(x)=f*(cg)\,(x)$.

(4) $f*g\ (x)$ 为 $\mathbb{R}$上 以 2π 为周期的函数

(5) $f*g\ (x)$ 为连续函数.

(6) 若 $g(x)$ 为无穷次可微函数. 则 $f*g\ (x)$ 也为无穷次可微函数.

定义: 设 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个函数序列, 且 $\forall n\geq 1$, $K_n(x)$ 均为 $\mathbb{R}$上 以 2π 为周期的连续函数. 如果 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足如下三条性质, 我们就称 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个好的核函数族:

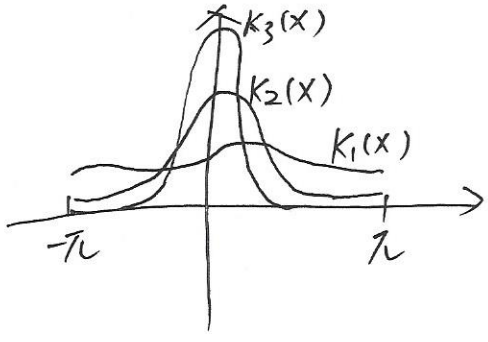
(1) $\forall n\geq 1$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$

(2) 存在 $M>0$, 使得 $\forall n\geq 1$, $\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,dx \leq M$

(3) $\forall\ \delta>0$. 若 $\delta<\pi$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}|K_n(x)|\,dx + \int_{\delta}^{\pi}|K_n(x)|\,dx\right)=0.$$

注: $K_n(x)$ 的图像大体上为随着 n 变大, 不断集中到 $x=0$ 这一点. 例如下面的形状:



练习二：设 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个好的核函数族，

$f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数。

则 $f*K_n$ 一致收敛到 f。

即 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 N，使得 $\forall\ n\geq N$，

$\forall\ x\in\mathbb{R}$，均有 $\left|f*K_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

提示：

$$f*K_n(x)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)\left[f(x-y)-f(x)\right]dy$$

$$=\int_{-\pi}^{-\delta}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]dy+\int_{-\delta}^{\delta}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]dy$$

$$+\int_{\delta}^{\pi}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]dy.$$

取 δ 充分小，再分别估计。

下面具体构造一个好的核函数族。

练习三：(1) $\forall\ m\geq 1$，$\displaystyle\sum_{n=-m}^{m}e^{inx}=\frac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$

(2) 记 $D_m(x)=\displaystyle\sum_{n=-m}^{m}e^{inx}$，记 $D_0(x)=1$.

$\forall\ N\geq 1$，记 $F_N(x):=\dfrac{D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}$

验证：$F_N(x)=\dfrac{1}{N}\dfrac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

(3) 验证 $\{F_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ 为一个好的核函数族。

练习四：综合练习二和练习三，证明如下重要结论：

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数，则 $\forall\, \varepsilon>0$，存在一个三角函数 $f_\varepsilon(x)$，使得

$$|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in\mathbb{R} \text{ 成立}.$$

这里我们称一个函数 $g(x)$ 为三角函数，如果存在正整数 N，和常数 a_n，b_n $(0\le n\le N)$，使得 $g(x)=b_0+\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n\sin nx+b_n\cos nx)$.

练习五（Weierstrass 逼近定理）：

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数.

(1) 若 $-\pi<a<b<\pi$，证明存在 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数 $\tilde{f}(x)$，使得

$$f(x)=\tilde{f}(x),\quad \forall\, x\in[a,b].$$

(2) 设 n 为正整数，证明：$\forall\,\varepsilon>0$，存在多项式 $P_\varepsilon(x)$，使得 $|\sin nx-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon$，

$|\cos nx-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon$，~~$\forall\, x\in\mathbb{R}$~~ $\forall\, x\in[-\pi,\pi]$ 成立.

提示：带拉格朗日余项的泰勒展开.

(3) 证明：$\forall\,\varepsilon>0$，存在多项式 $P_\varepsilon(x)$，使得

$$|f(x)-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in[a,b] \text{ 成立}.$$

~~练习六~~

其它类型的逼近：

定义：称 $[a,b]$ 上的函数 $g(x)$ 为阶梯函数，如果存在 $[a,b]$ 的分割：$x_0=a<x_1<\cdots<x_N=b$，存在常数 C_i $(0\le i\le N-1)$，使得：

$$f(x)=C_i,\quad \forall x\in[x_i,x_{i+1}),\ \forall i=0,\cdots,N-1.$$

练习六：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数，证明：$\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 $f_\varepsilon(x)$，使得 $\int_a^b|f(x)-f_\varepsilon(x)|dx<\varepsilon$

提示：取一个充分细的分割 $x_0=a<x_1<\cdots<x_N=b$，令 $C_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_i,x_{i+1}]\}$.

练习七（黎曼-勒贝格引理）：(1) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$

(2) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的阶梯函数，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$$

(3) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$