有限胞腔复形的定义

设 X, Y 为拓扑空间, $A \subseteq X$ 为子空间. $f: A \to Y$ 为连续映射. 则映射 f 的贴空间 $Y \cup_f X$ 定义为 $\dfrac{X \sqcup Y}{\sim}$, 其中 $X \sqcup Y$ 为 X 与 Y 的无交并, 赋予拓扑为 X 与 Y 的拓扑和. 而 $\sim$ 为 $X \sqcup Y$ 上由关系 $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ 生成的等价关系.

这个定义也可见教材87页习题14之前的小字部分.

一个集合上关系和等价关系以及关系生成的等价关系的定义可以看我写的另一个材料"群的自由积".

我们~~称~~记一个 n 维圆盘 $D_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ 的边界为 ∂D_n, 容易看出 $\partial D_1 = \{-1, 1\}$, $\partial D_n \cong S^{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

称一个拓扑空间 X 为有限胞腔复形(或有限CW复形), 如果存在有限个拓扑空间 $X^0, X^1, \cdots, X^n = X$, 满足:

1) X^0 为有限个点形成的离散拓扑空间.

2) $\forall i \geq 1$, 或者 $X^i = X^{i-1}$, 或者 $X^i \cong X^{i-1} \cup_{f_i} Z_i$, 其中 Z_i 为有限个 i 维圆盘 $D_i^{(1)}, \cdots, D_i^{(m_i)}$ 的拓扑和, 而 $f_i: \coprod_{j=1}^{m_i} \partial D_i^{(j)} \longrightarrow X^{i-1}$ 为 Z_i 的子空间 $\coprod_{j=1}^{m_i} \partial D_i^{(j)}$ 到 X^{i-1} 的连续映射.

例：设 $n\geq 1$，则 $X=S^n$ 为有限胞腔复形。

因为可令 $X^0=\{p\}$ 为单点空间。

令 $X^1=X^0$，而 $X=X^2\cong X^1\cup_{f_1} D_n$，其中 $f_1:\partial D_n \to X^1=X^0=\{p\}$ 为唯一的映射（将 ∂D_n 中的点全映为点 p）。

练习1：我们常见的紧空间均为有限胞腔复形：Möbius带、有限长圆柱面、Klein瓶、环面、闭曲面，$\mathbb{RP}^n$，S^n，$\mathbb{CP}^n$ 等。

练习2：证明有限胞腔复形均为紧~~空间~~ Hausdroff空间。

练习3：证明有限胞腔复形定义中的每个 X^i 到 X 的自然映射均为嵌入映射，从而可将 X^i 看作 X 的子空间，称为 X 的 i 维骨架。

练习4：证明若 K 为复形，则 $|K|$ 为有限胞腔复形。

练习5：设 X 为有限胞腔复形，X^i 为其 i 维骨架。设 X 连通，则 $\forall x_0\in X^0$，空间的嵌入诱导基本群的满同态：$\pi_1(X^1,x_0)\twoheadrightarrow \pi_1(X,x_0)$，空间的嵌入诱导基本群同构：$\pi_1(X^2,x_0)\xrightarrow{\sim}\pi_1(X,x_0)$。

提示：利用Van-Kampen定理，做法同教材137页例2。