定理（Van-Kampen定理的常用形式）：

如果拓扑空间 X 可分解为两个闭集 X_1 与 X_2 之并，并且 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 非空，道路连通，且 X_0 是它的一个开邻域 U 的强形变收缩核，则 $\forall x_0 \in X_0$，有

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / [\{ i_{1*}(\alpha) \cdot i_{2*}(\alpha^{-1}) \mid \alpha \in \pi_1(X_0, x_0) \}].$$

其中 $i_i : X_0 \to X_i \ (i=1,2)$ 为包含映射.

证：我们承认课本上定理4.7来证明上述定理.为此，首先构造满足定理4.7条件的 X 的分解.

令 $U_1 = X_1 \cup U = \cancel{X_2 \setminus X}\ X \setminus (X_2 \setminus U)$

$U_2 = X_2 \cup U = X \setminus (X_1 \setminus U)$

则容易验证 U_1, U_2 为 X 的开集，$X = U_1 \cup U_2$，且 $U = U_1 \cap U_2$.

由于 X_0 与 U 同伦等价，从而由 X_0 道路连通知 U 道路连通.这样 U_1, U_2 满足定理4.7的条件.从而有

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) / [\{ i'_{1*}(\alpha)\, i'_{2*}(\alpha^{-1}) \mid \alpha \in \pi_1(U, x_0) \}]$$

其中 $i'_i : U \to U_i \ (i=1,2)$ 为包含映射.

下面证明 自然的包含映射

$X_1 \hookrightarrow U_1, \quad X_2 \hookrightarrow U_2$

使得 X_i 为 U_i 的形变收缩核 $(i=1,2)$.

再由 X_0 为 U 的形变收缩核. 从而可完成定理的证明.

设 $H: U\times[0,1] \to U$ 给出 U 到 X_0 的强形变收缩, 即:

$\cdot\ H(y,0) = id_U(y) = y,\ \forall y\in U;\ H(y,1)\in X_0,\ \forall y\in U,$

$\cdot\ H(x,s) = x,\ \forall x\in X_0,\ \forall s\in[0,1].$

~~对于 $i=1,2$~~, 令 $Y_1 = U\cap X_2$ 则 X_1, Y_1 均为 U_1 的闭集. 且 $X_1\cap Y_1 = X_0$. 以及 $U_1 = X_1\cup Y_1$.

构造 U_1 到 X_1 的形变收缩 $H_1: U_1\times[0,1]\to U_1$ 如下.

$$H_1(x,s) = \begin{cases} x, & 若\ x\in X_1; \\ H(x,s), & 若\ x\in Y_1. \end{cases}$$

由粘合引理. H_1 为连续映射. 并且容易验证 H_1 给出了 U_1 到 X_1 的形变收缩. 从而 X_1 为 U_1 的形变收缩核.

同理可验证 X_2 为 U_2 的形变收缩核.

从而定理证毕. #