# 2023 年秋交换代数期末试题

**时间: 2024 年 1 月 9 日 16:00-18:00**

1. (15 分) 叙述下列命题或概念, 不需要给出证明.
   (i) Nakayama 引理
   (ii) Artin-Rees 引理
   (iii) Noether 正规化定理
   (iv) 模的伴随素理想

2. (25 分) 设 $A \longrightarrow B$, $A \longrightarrow C$, $C \longrightarrow D$ 均为环同态. 证明有环同构
$$(B \otimes_A C) \otimes_C D \simeq B \otimes_A D.$$

3. (25 分) 设 $A$ 为约化环 (即 $\sqrt{(0)} = (0)$), 并且 $\operatorname{Spec} A$ 为不可约空间. 证明 $A$ 为整环.

4. (25 分) 设 $A$ 为环, $\{D(f_j) \mid j \in J\}$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的一些主开集形成的开覆盖. 设 $\forall\, j \in J$, $A_{f_j}$ 为 Noether 环. 证明: $A$ 为 Noether 环.

5. (30 分) 我们考察整系数多项式环 $\mathbb{Z}[x]$.
   (i) 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为不可约多项式. 证明 $\dim \mathbb{Z}[x]/(f(x)) = 1$. $\mathbb{Z}[x]/(f(x))$ 是否一定为平坦 $\mathbb{Z}$-模? 说明理由.
   (ii) 证明: $\dim \mathbb{Z}[x] = 2$.
   (iii) 设 $m$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 的极大理想. 证明: $m \cap \mathbb{Z} \neq (0)$.
   (iv) 设 $p$ 为素数. 证明: $\mathbb{Z}[x]/(x^p - p)$ 为 Dedekind 整环.