

2025 年秋交换代数期末试题

时间: 2026 年 1 月 6 日 16:00-18:00

1. (30 分) 判断下列断言是否正确, 并简要说明理由.
 - (i) 设 A 为 Noether 环, 并且 $\text{Spec } A$ 为有限集, 则 A 为一些局部环的乘积.
 - (ii) 设 M 为 Noether 环 A 上的有限长度模, 并且 M 为平坦 A -模, 则 $M = 0$.
 - (iii) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{7}]$ 为 Dedekind 整环.
 - (iv) 设 $A \rightarrow B$ 为有限生成 \mathbb{Z} -代数之间的环同态, 那么 $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 把闭点映到闭点.
 - (v) Noether 环中的素理想降链一定在有限步稳定.
2. (20 分) 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 为环同态.
 - (i) 如果 φ 为单同态, 证明 $\overline{\varphi^*(\text{Spec } B)} = \text{Spec } A$.
 - (ii) 设 J 为 B 的理想, 记 $I := J \cap A$. 证明 $\overline{\varphi^*(V(J))} = V(I)$.
3. (20 分) 设 B 为环, G 为 $\text{Aut}(B)$ 的有限子群, $A = B^G$. 设 A 为 Noether 环, 并且 B 为有限生成 A -代数. 设 $Q \in \text{Spec } B$, $P = Q \cap A \in \text{Spec } A$. 设 G 在 Q 处的稳定子群是平凡的, 即 $\{g \in G \mid gQ = Q\} = \{\text{id}\}$. 证明: 在局部环 B_Q 中有 $PB_Q = QB_Q$.
4. (20 分) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M_1, M_2, M_3 为有限 A -模. 设 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2, \psi: M_2 \rightarrow M_3$ 为 A -模同态, 且对任意 $i \geq 1$, $M_1 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\varphi \otimes 1} M_2 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\psi \otimes 1} M_3 \otimes_A (A/m^i)$ 在 $M_2 \otimes_A (A/m^i)$ 处正合. 证明: $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 在 M_2 处正合.
5. (30 分) 设 A 为环. 我们称 A 为正规环 (normal ring), 如果对任意 $P \in \text{Spec } A$, 局部环 A_P 均为整闭整环. 设 S 为 A 的全体正则元, 我们称 $\text{Tot}(A) := A_S$ 为 A 的全分式环.
 - (i) 设 A 为正规环, 证明 A 为约化环 (即 A 的所有幂零元均为零元素).
 - (ii) 设 A 为 Noether 约化环, 极小素理想集合为 P_1, \dots, P_r . 证明 $\text{Tot}(A) \simeq K_1 \times \dots \times K_r$, 其中 $K_i = k(P_i)$ 为 A 在 P_i 处的剩余类域.
 - (iii) 设 A 为 Noether 正规环, 证明 $A \simeq A_1 \times \dots \times A_r$, 并且每个 A_i 均为整闭整环.
 - (iv) 设 A 为 Noether 环, 证明 A 为正规环 $\iff A$ 为约化环, 并且 A 在 $\text{Tot}(A)$ 中的整闭包为 A 自身.