作业汇总

2023-09-22 作业

(1) 设 A 为环, $P \in \operatorname{Spec} A$. 证明: 点 P 的闭包为 $V(P)$. 特别地, P 为闭点 $\iff$ P 为极大理想.

(2) 设 $\varphi : A \to B$ 为环同态, $P \in \operatorname{Spec} A$. 我们已经证明自然同态 $B \to B_P/PB_P$ 诱导了一一对应 $\varphi^{*-1}(P) \simeq \operatorname{Spec}(B_P/PB_P)$. 证明这个一一对应是拓扑空间的同胚. 其中在纤维 $\varphi^{*-1}(P)$ 上赋予 $\operatorname{Spec} B$ 的子空间拓扑.

(3) 设 I 为 A 的理想, 证明商同态 $A \to A/I$ 诱导的素谱空间映射 $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ 为 $\operatorname{Spec} A/I$ 到 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子空间 $V(I)$ 的同胚.

2023-09-27 作业

(1) 设 A 为 Noether 环. 对 $x \in A$, 令 $\operatorname{ann}(x) \coloneqq \{a \in A \mid ax = 0\}$ 为 x 的零化理想. 令 $S \coloneqq \{\operatorname{ann}(x) \mid x \in A, x \neq 0\}$ 为所有不等于 A 的零化理想的集合. 证明 S 的每个极大元均为素理想.

(2) 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想, $P \in \operatorname{Spec} A$. 设 IA_P 为 A_P 的主理想. 证明: 存在 $f \in A$, 使得 $P \in D(f)$, 并且 IA_f 为 A_f 的主理想.

2023-10-13 作业

(1) 设 A 为整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 M, N 均为 K 的有限 A-子模, $\varphi : M \longrightarrow N$ 为 A-模同态. 证明: 存在 $a \in K$, 使得 $\varphi(x) = ax, \forall\, x \in M$.

(2) 设 A 为环, 证明 A 为整环 $\iff$ A 为约化环, 并且 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的 (即 $\operatorname{Spec} A$ 不能写成两个真闭子集的并).

2023-10-20 作业

(1) 设 $A \longrightarrow B$, $A \longrightarrow C$, $C \longrightarrow D$ 为环同态. 证明有环同构

$$(B \otimes_A C) \otimes_C D \simeq B \otimes_A D.$$

(2) 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为 Noether 局部环之间的环同态, 并且 $mB = n$. 记 $k = A/m$, $k' = B/n$. 证明有 k-线性空间的同构: $\dfrac{m}{m^2} \otimes_A B \simeq \dfrac{m}{m^2} \otimes_k k'$.

2023-10-31 作业

(1) 设以下两个复形均为 A-模短正合列:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} N \xrightarrow{g} N' \longrightarrow 0$$

证明: $M' \otimes_A N' \simeq (M \otimes_A N)/T$, 其中 $T = (i \otimes 1)(K \otimes_A N) + (1 \otimes j)(M \otimes L)$.

(2) 设 A 为环, M 为 A-模. 设 $\operatorname{Spec} A = \bigcup\limits_{i \in I} D(f_i)$ 为主开集的开覆盖, 使得每个 M_{f_i} 均为有限 A_{f_i}-模. 证明 M 为有限 A-模.

2023-11-10 作业

(1) 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想, M, N 均为有限 A-模. 证明:
   (i) 有 $\widehat{A}$-模同构 $\widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{N} \simeq \widehat{M \otimes_A N}$, 其中完备化均指在 I 处的完备化.
   (ii) 有 $\widehat{A}$-模同构 $\operatorname{Hom}_{\widehat{A}}(\widehat{M}, \widehat{N}) \simeq \widehat{\operatorname{Hom}_A(M, N)}$.

(2) 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想, 设 $\widehat{A}$ 为 A 在 I 处的完备化. 记 $\hat{\hat{A}}$ 为 $\widehat{A}$ 在 $I\widehat{A}$ 处的完备化. 证明有环同构 $\hat{\hat{A}} \simeq \widehat{A}$.

2023-11-17 作业

(1) 设 k 为域, A 为 k-代数, 且 $\dim_k A = n$. 证明: $|\operatorname{Spec} A| \leq n$.

(2) 设 $A \longrightarrow B$ 为有限扩张, 并且存在 $b_1, \ldots, b_n \in B$ 使得 $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$. 证明: $\forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 P 处的纤维中点的个数不超过 n.

2023-11-24 作业

设 k 为域, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包. 我们分析 $k[x,y]$ 的素理想.

(i) 设 m 为 $k[x,y]$ 的极大理想, 证明存在 $a, b \in \bar{k}$, 使得 $m = (x-a, y-b) \cap k[x,y]$.

(ii) 设 P 为 $k[x,y]$ 的素理想, $P \neq (0)$, 并且 P 不是极大理想. 证明: 存在不可约多项式 $f \in k[x,y]$, 使得 $P = (f)$.

2023-12-01 作业

(1) 设 A 为 Dedekind 整环. 证明:

 (i) 对 $0 \neq a \in A$, 有 $A/aA = A_1 \times \cdots \times A_n$, 且每个 A_i 均为离散赋值环的商环.

 (ii) 设 I 为 A 的非零理想, 则存在 a, $b \in I$, 使得 $I = (a,b)$.

(2) 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ 为 Dedekind 整环, 并写出 (2) 和 (3) 上方的各个素理想处的分歧指数和剩余类域次数.

2023-12-15 作业

(1) 设 k 为域. 设 X 为 $\mathbb{A}_k^n := \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$ 的不可约闭子集, 并且 $\dim X = n-2$. 证明: 存在 $f_1, f_2 \in k[x_1, \ldots, x_n]$, 使得 X 为 $V(f_1, f_2)$ 的一个不可约分支.

(2) 设 A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $A \to B$ 为 k-代数同态, $f : Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间映射. 设 $\dim Y = \dim X$, 并且存在 X 的闭点 x, 使得 $f^{-1}(x)$ 为非空的有限集. 证明: $f(Y)$ 在 X 中稠密.

2023-12-22 作业

定义 0.0.1 $a \in A$ 称为正则元, 如果乘 a 映射 $A \xrightarrow{a\cdot} A$ 为单射. 我们称 A 中元素的序列 $(a_1, \ldots, a_n)$ 为正则序列, 如果其同时满足如下两个条件:

(i) a_1 为 A 中正则元, a_2 在环 $A/(a_1)$ 中为正则元, $\ldots$, a_n 在环 $A/(a_1, \ldots, a_{n-1})$ 中为正则元.

(ii) $A/(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

(1) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, $(a_1, \ldots, a_r) \in m$ 为 A 的一个正则序列. 证明: $\dim A/(a_1, \ldots, a_r) = \dim A - r$.

提示: A 的非正则元的全体等于所有伴随素理想的并集.

(2) 设 k 为域. f, g 为 $k[x, y]$ 中互素的多项式. 证明 $k[x, y]/(f, g)$ 是零维环, 并由此证明 f, g 在 k^2 中的公共零点集是有限集.