

作业汇总

2025-09-19 作业

- (1) 设 A 为环, $P \in \text{Spec } A$. 证明点 P 的闭包为 $V(P)$. 特别地, P 为闭点 $\iff P$ 为极大理想.
- (2) 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 为环同态.
 - (i) 若 φ 为单同态, 则 $\overline{\varphi^*(\text{Spec } B)} = \text{Spec } A$.
 - (ii) 若 $\overline{\varphi^*(\text{Spec } B)} = \text{Spec } A$, 并且 A 为约化环, 则 φ 为单同态.

2025-09-26 作业

- (1) 设 A 为环, 证明 A 为整环 $\iff A$ 为约化环, 并且 $\text{Spec } A$ 是不可约的.
- (2) 对如下环 A 中理想 I , 计算 \sqrt{I} :
 - (i) $A = \mathbb{Z}$, $I = (12)$
 - (ii) $A = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x, y^4)$.

2025-09-30 作业

设 A 为 Noether 环, $\{P_1, \dots, P_n\}$ 为 A 的所有极小素理想. 设 A 为约化环 (即没有非零的幂零元). 证明:

- (i) 对任意乘法子集 S , 局部化 A_S 是约化环.
- (ii) 对任意 i , A_{P_i} 为域.
- (iii) $A \rightarrow A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_n}$, $a \mapsto (a, \dots, a)$ 为单同态. 从而 A 同构于域的乘积的子环.

2025-10-18 作业

- (1) 设 A 为环, M 为 A -模. 设 $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ 为主开集的开覆盖, 使得每个 M_{f_i} 均为有限 A_{f_i} -模. 证明 M 为有限 A -模.
- (2) 考虑如下环同态的卡氏图:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A C & \longleftarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xleftarrow{\varphi_1} & A \end{array}$$

假设 p 为素数, $pA = 0$, 并且对任意 $b \in B$, 均存在正整数 n , 使得 $b^{p^n} \in \varphi_1(A)$, 证明 $\text{Spec}(B \otimes_A C) \rightarrow \text{Spec } B \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } C$ 为双射.

2025-10-25 作业

- (1) 设 A 为 Noether 环, I 为理想. 设 $n \geq 1$. 证明: A/I 为有限长度 A -模 $\iff A/I^n$ 为有限长度 A -模.
- (2) 设 k 为域. 令 $f(x, y) \in k[x, y]$ 为多项式, 满足 $f(0, y) \neq 0$. 设 $n \geq 1$. 证明: $k[x, y]/(x^n, f)$ 为有限长度的 $k[x, y]$ -模. 并计算 $k[x, y]/(x^3, x^2 + y^2)$ 的长度.

2025-10-29 作业

- (1) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M 为有限 A -模, N 为 M 的子模. 证明

$$\bigcap_{n \geq 1} (N + m^n M) = N.$$

- (2) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M_1, M_2, M_3 为有限 A -模. 设 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$,

$\psi: M_2 \rightarrow M_3$ 为 A -模同态, 并且对任意 $i \geq 1$,

$$M_1 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\varphi \otimes 1} M_2 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\psi \otimes 1} M_3 \otimes_A (A/m^i)$$

在 $M_2 \otimes_A (A/m^i)$ 处正合. 证明: $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 在 M_2 处正合.

2025-11-08 作业

设 A 为 Noether 环. 设 S 为 A 的正则元全体. 则 S 为 A 的乘法子集. 记 $\text{Tot}(A) = A_S$ 为 A 在 S 处的局部化, 称为 A 的全分式环. 设 A 还是约化环. 记 P_1, \dots, P_r 为 A 的所有极小素理想.

- (i) 证明 $A \rightarrow A/P_1 \times \dots \times A/P_r$ 为单同态.
- (ii) 证明 $\text{Ass}(A) = \{P_1, \dots, P_r\}$.
- (iii) 记 $K_i = \text{Frac}(A/P_i)$. 证明 $\text{Tot}(A) \simeq K_1 \times \dots \times K_r$.

2025-11-14 作业

分析 $\mathbb{R}[x, y]$ 中极大理想的形状.

2025-11-21 作业

- (1) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M 为有限 A -模. 设 N_1, N_2 是 M 的子模. 并且作为 \widehat{M} 的子模, 有 $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$. 其中完备化是指在 m 处的完备化. 证明: $N_1 = N_2$.
- (2) 设 B 为环, G 为 $\text{Aut}(B)$ 的有限子群, $A = B^G$. 设 A 为 Noether 环, 并且 B 为有限生成 A -代数. 设 $Q \in \text{Spec } B$, $P = Q \cap A \in \text{Spec } A$. 设 G 在 Q 处的稳定子群是平凡的, 即 $\{g \in G \mid gQ = Q\} = \{\text{id}\}$. 证明: 在局部环 B_Q 中有 $PB_Q = QB_Q$.

2025-11-29 作业

证明 $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ 为 Dedekind 整环, 并写出 (2) 和 (3) 上方的各个素理想处的分歧指数和剩余类域次数.

2025-12-05 作业

设 A 为 Dedekind 整环, K 为 A 的分式域, M 为有限 A -模. 证明如下几条互相等价:

- (i) $M \otimes_A K = 0$.
- (ii) $\text{ann}(M) \neq 0$.
- (iii) $\text{Supp}(M)$ 为有限个闭点的并集.
- (iv) 存在 A 的非零素理想 P_1, \dots, P_n , 以及非负整数 a_1, \dots, a_n , 使得有 A -模同构:

$$M \simeq A/P_1^{a_1} \times \cdots \times A/P_n^{a_n}.$$

2025-12-12 作业

设 k 为域, A, B 均为有限生成 k -代数, 且均为整环. 设 $\varphi: A \hookrightarrow B$ 为单的 k -代数同态. 记 $K := \text{Frac}(A)$, $L := \text{Frac}(B)$, 并设 φ 诱导的域扩张 L/K 为有限扩张. 证明:

- (i) $\dim A = \dim B$.
- (ii) $B \otimes_A K = L$.
- (iii) 存在 $0 \neq g \in A$, 使得 $A_g \hookrightarrow B_g$ 为有限扩张, A_g 为整闭整环, 并且 B_g 为 A_g 在 L 中的整闭包.

2025-12-20 作业

- (1) 设 k 为域, A 为 k -代数, 且 $\dim_k A = n$. 证明: $|\text{Spec } A| \leq n$.
- (2) 设 $A \rightarrow B$ 为有限扩张, 并且存在 $b_1, \dots, b_n \in B$ 使得 $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$. 证明: $\forall P \in \text{Spec } A, \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ 在 P 处的纤维包含的点的个数不超过 n .