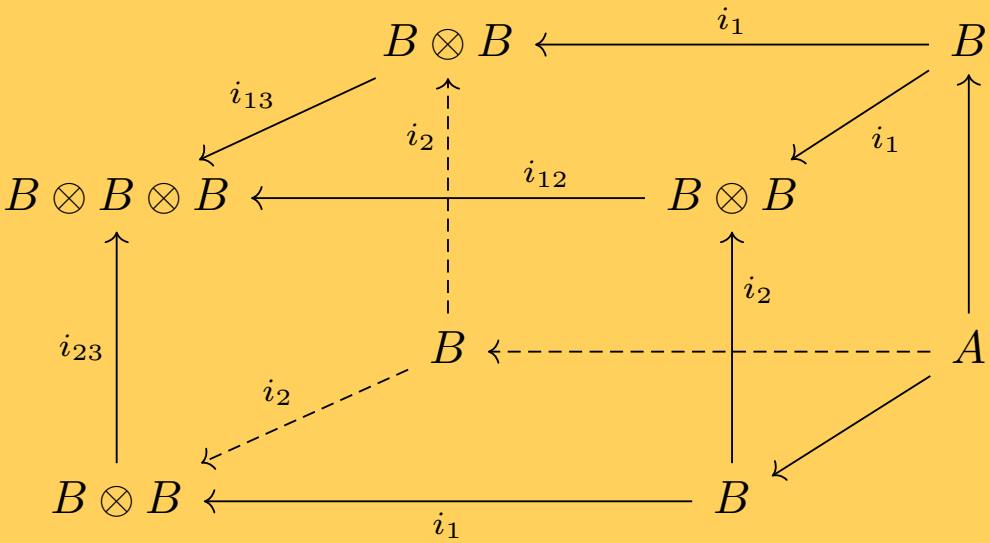
交换代数讲义

许金兴　编著



目 录

前言 1

符号约定 5

第一章　环及其局部化 7

1.1　空间与函数环 7

1.2　素谱空间 8

1.3　环的局部化 10

1.4　层的观点 17

1.4.1　层与 $\mathcal{B}$-层 17

1.4.2　环看作 $\mathcal{B}$-层 20

1.4.3　中国剩余定理 21

1.5　Noether 环 23

习题 24

第二章　模及其局部化 29

2.1　基本概念与基本构造 29

2.2　张量积 33

2.2.1　模的张量积 33

2.2.2　代数的张量积 37

2.3 函子性与正合性 . . . 42
2.4 Noether 模 . . . 47
2.5 层的观点 . . . 52
习题 . . . 55

第三章 一些常用技术 . . . 59
3.1 行列式技巧 . . . 59
3.2 素避引理 . . . 61
3.3 Artin–Rees 引理与完备化 . . . 61
3.4 伴随素理想 . . . 66
3.5 应用: 符号幂与准素分解 . . . 69
3.6 整扩张 . . . 72
3.7 有限群作用的不变子环 . . . 82
习题 . . . 86

第四章 Dedekind 整环 . . . 91
4.1 离散赋值环 . . . 91
4.2 Dedekind 整环 . . . 94
4.3 Dedekind 整环的有限扩张 . . . 96
4.4 Dedekind 整环的理想类群 . . . 101
习题 . . . 106

第五章 维数理论 . . . 109
5.1 基本定理 . . . 109
5.2 有限生成代数的维数 . . . 114
5.3 Zariski 主定理 . . . 120
5.3.1 拟有限同态 . . . 120
5.3.2 一个变元的情形 . . . 121
5.3.3 主定理及应用 . . . 125
5.4 Hilbert–Samuel 多项式 . . . 126
5.5 正则局部环初步 . . . 129
习题 . . . 130

第六章 同调工具 . . . 135
6.1 复形的同调群 . . . 135
6.2 标准单形与 Čech 复形 . . . 137
6.3 投射消解 . . . 141

6.4 Tor 函子与 Ext 函子 . . . 148
习题 . . . 152

第七章 平坦性 . . . 155
7.1 基本性质 . . . 155
7.2 局部判别法 . . . 160
7.3 忠实平坦性 . . . 164
7.4 忠实平坦下降 . . . 167
7.4.1 Amitsur 复形 . . . 167
7.4.2 模的下降 (粘合) . . . 170
7.4.3 Galois 下降 . . . 179
习题 . . . 184

第八章 Cohen–Macaulay 环 . . . 187
8.1 Koszul 复形与正则序列 . . . 187
8.2 深度 . . . 190
8.3 Cohen–Macaulay 环 . . . 191
8.4 CM 环与平坦性 . . . 194
8.5 CM 环与整闭性 . . . 197
习题 . . . 198

第九章 正则局部环 . . . 201
9.1 极小自由消解 . . . 201
9.2 正则局部环的同调刻画 . . . 203
9.3 正则局部环是唯一因子分解整环 . . . 206
习题 . . . 208

第十章 微分模 . . . 211
10.1 基本正合列 . . . 211
10.2 光滑同态 . . . 224
10.3 平展同态 . . . 229
10.4 相对 Frobenius 同态 . . . 233
习题 . . . 238

第十一章 可积联络与下降 . . . 241
11.1 联络与 p-曲率 . . . 241
11.2 下降资料的重新表述 . . . 246

11.3 无穷小扩张与下降 250
11.3.1 晶体与分层 250
11.3.2 微分算子 257
11.3.3 特征 0 情形 261
11.3.4 特征 p 情形 262
习题 269

附录 A Grothendieck–Katz p-曲率猜想介绍 275
A.1 微分方程的代数解 275
A.2 微分方程与联络 278
A.3 诱导联络与基变换 279
A.4 联络的代数解 283

参考文献 287

名词索引暨英译 291

前言

本讲义的主要目的是为进一步学习代数几何中的概型理论做一些技术和观念上的准备. 我们较为详细地介绍了诸如维数, 平坦性, 光滑性等基本概念和结果, 并主要在域上有限生成代数这样的例子中展示了上述结果的实际用法. 局部化技术与粘合的观念是我们处理问题的指导思想. 局部化可以将问题约化到局部环上, 从而可以使用如 Nakayama 引理之类的工具, 而粘合或者层的观念可以将局部的信息拼接得到整体的信息. 与 Matsumura [26] 相比, 我们尽可能精简内容, 主要介绍学习标准的代数几何教材如 Hartshorne [18] 所需的交换代数知识. 同时限于篇幅以及没有假定读者具有足够多的几何预备知识, 我们对相关的几何背景也只是偶尔提及, 没有像 Eisenbud [11] 一样展开作详细介绍. 另一方面, 与这些经典教材相比, 我们较为详细地介绍了模的忠实平坦下降以及与之相关的无穷小下降, 可积联络和 Cartier 下降等内容. 为此, 我们尽可能早地引入素谱空间上预层与层的概念, 并在后续发展中不断深化. 比如介绍基本的同调知识时, 作为最重要的例子介绍了标准单形的链复形, 并将 Čech 复形和 Koszul 复形看作其衍生出的复形. 这种看法的好处是可以直接借鉴标准单形上的锥构造来证明一些特定条件下 Čech 复形和 Koszul 复形的零调性. Čech 复形的零调性又可以反过来给出拟凝聚模层为层的更自然的证明. 如果将环的忠实平坦扩张看作某种开覆盖, 此时 Čech 复形的类比就是 Amitsur 复形, 而零调性的证明也完全可以类比过来. 在这个看法下, 模的忠实平坦下降的提出和证明也就变得非常自然了. 有了这些观念上的准备, 进一步也不难理解晶体 (crystal), 分层 (stratification) 和可积联络的关系. 与这个例子类似, 很多代数命题在表述和证明时的繁杂只是为了严格性而不得不作出的妥协, 其动机甚至证明思路其实都是非常朴素的几何观念.

以下对各章内容作一个简介和说明.

第一章: 环及其局部化 我们从将环解释为某个空间上的函数环这一动机出发, 引出素谱空间以及环中元素在素理想处取值的概念. 进而将环的局部化解释为函数在一

个开子集上的限制. 由此自然有预层和层的概念. 作为应用, 我们用层的看法给出了中国剩余定理及相关命题的证明.

第二章: 模及其局部化 模可以看作向量丛截面的某种推广. 本章主要介绍模的各种常用操作: 直和, 同态, 局部化, 张量积, 并研究这些操作的交换性. 为此, 我们引入正合列的概念, 并从函子的角度考察以上操作. 与环类似, 我们介绍了模在主开集上的局部化形成的层.

第三章: 一些常用技术 本章介绍了交换代数论证中最基本的一些概念和方法. 这些基本结果会在后面的章节中反复用到, 读者也应在后面章节的学习中体会其实际用法. 其中符号幂与准素分解一节只是为了介绍符号幂的概念, 并展示伴随素理想和 Noether 性的用法, 与后续章节基本上没有联系.

第四章: Dedekind 整环 本章主要从局部化的观点讨论 Dedekind 整环的基本性质. 利用相对于 $\mathbb{Z}$ 的整扩张以及考察分歧性, 我们给出了分圆整数环 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 是 Dedekind 整环的证明. 同时介绍了分歧指数, 剩余类域次数等基本概念. 本章最后一节介绍 Dedekind 整环的理想类群, 主要论述了可逆模, 理想类群和除子类群这三个观点的等价性, 并由此得到理想的唯一分解性.

第五章: 维数理论 我们将上升和下降定理, 理想链版本的 Noether 正规化定理, 以及 Noether 局部环的 Krull 维数等于参数系包含的元素个数这几个命题看作维数理论的基本定理. 利用这几个基本定理, 可以比较容易地得到域上有限生成代数维数的常用性质, 如超曲面的维数, 像集的可够造性, 纤维维数的上半连续性等. 关于 Noether 局部环维数的基本性质, 我们首先给出了基于 Krull 主理想定理的利用符号幂的直接证明, 又利用 Hilbert-Samuel 多项式的次数给出了另一个更加流行的证明. 初学者完全可以直接承认这些基本定理而不去纠缠证明细节, 把重点放在体会其在域上有限生成代数的应用上.

第六章: 同调工具 本章介绍了后面章节中需要用到的同调代数知识. 作为复形的例子, 我们重点介绍了标准单形的链复形及其零调性的证明. 将 Čech 复形看作标准单形衍生而来的复形, 则标准单形上的锥构造自然会给出一定条件下 Čech 复形的零调性质. 而这个零调性质又给出了第二章中拟凝聚模层是层的另一个证明. 关于 Tor 和 Ext 函子, 我们主要介绍了其长正合列.

第七章: 平坦性 本章重点有两个, 一是平坦性的局部判别法及其推论, 这些可以直接用来判断 Noether 环上有限生成代数的平坦性. 另一个是模的忠实平坦下降. 我们先在素谱空间主开集的开覆盖情形讨论了模的粘合的充要条件, 其关键之处为 Čech 复形的零调性. 在 Grothendieck 拓扑的意义下, 环的忠实平坦扩张成为开覆盖的类比, 从而也可以得到 Čech 复形的类比: Amitsur 复形. 在这些类比下, 忠实平坦下降定理的叙述和证明均变得非常自然. 最后我们以 Galois 下降及 Hilbert 定理 90 作为例子展示了忠实平坦下降的用法.

第八章: Cohen–Macaulay 环 本章主要介绍 Cohen–Macaulay 环的基本性质. 作为应用, 我们介绍了利用纤维维数稳定来判断平坦性的定理, 以及 Serre 整闭性判据.

第九章：正则局部环 本章主要介绍了 Serre 利用投射维数对正则局部环作的刻画. 作为推论, 给出了正则局部环是唯一因子分解整环的证明.

第十章：微分模 微分模是微分流形中光滑一形式的代数类比. 我们首先介绍了微分模的两个基本正合列, 并以基本正合列及其给出的 Jacobian 判据为中心, 详细梳理了光滑同态和平展同态的几个等价定义及一些常用性质.

第十一章：可积联络与下降 本章我们将无穷小扩张和相对 Frobenius 同态时模的下降统一在忠实平坦下降的框架内进行考察. 通过具体写出下降资料, 我们介绍了晶体, 分层和 D-模的一一对应. 在特征零的情况, 又得到上述结构与可积联络的对应. 在正特征情形, 作为推论得到了关于相对 Frobenius 同态的 Cartier 下降定理和 Katz 关于 D-模与 F-可除模结构之间的对应.

每章最后安排了若干习题, 其中有些是为了说明正文中概念和定理在具体例子中的应用, 有些是正文中限于篇幅没有详细介绍的一些重要概念和命题, 如可构造集等. 我们鼓励读者尽量理解习题所说的意思, 并尝试给出证明. 同时, 正文并没有引用习题中的结论, 所以习题的完成度不会影响正文内容的学习.

本讲义采用了北京大学李文威教授的 LaTeX 模板 (https://gitee.com/wen-wei-li/AlJabr-1). 讲义中大量交换图表的编辑使用了 quiver(https://q.uiver.app/) 这个非常方便的工具. 封面的制作借鉴了 TeXromancers 的模板 (https://aareyanmanzoor.github.io/Texromancers.html). 感谢以上作者在技术上的无私分享!

本讲义于 2023 年秋季初次编写, 该学期的交换代数课程讲授了前七章的大部分内容. 由于还没有经过长期的实际教学检验, 同时也囿于编著者的学识和经验, 本讲义在诸如内容取舍, 章节安排, 语言表述及术语翻译等方面一定还有很多不妥之处. 非常欢迎各位专家及读者反馈宝贵意见和建议, 以期进一步完善本讲义.

许金兴 (xujx02@ustc.edu.cn)

2025 年 7 月于合肥

符号约定

- 符号 $\subset$ 代表集合的包含, 也包括相等的情形. 集合的真包含用符号 $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$ 表示.
- 如不特别说明, 环均指含幺交换环. 环同态均要求将乘法单位元映到乘法单位元.
- 在不影响严格性的情况下, 我们不区分相等符号"$=$" 和同构符号"$\simeq$".
- 注意素理想和极大理想根据定义都是真理想.
- 环 A 的所有乘法可逆元形成的集合记为 A^*.
- 设 A 为环, 一个 A-代数是指一个环同态 $\varphi : A \longrightarrow B$. 其中 φ 称为结构同态. 在结构同态明确的情况下也称 B 为 A-代数. 设 $\psi : A \longrightarrow C$ 也为 A-代数, 则 B 到 C 的一个 A-代数同态是指一个满足 $\psi = f \circ \varphi$ 的环同态 $f : B \longrightarrow C$.
- 我们经常将一个环同态 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 称为环扩张, 即使 φ 不是单同态. 对 A 的理想 I, 经常将 $\varphi(I)$ 在 B 中生成的理想记为 IB. 对 B 的理想 J, 经常将 $\varphi^{-1}(J)$ 记为 $J \cap A$. 我们用 $\varphi^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$, $Q \mapsto Q \cap A$ 表示 φ 诱导的素谱空间映射.
- 对环 A 的素理想 P, 用 $k(P)$ 表示 P 处的剩余类域 $\operatorname{Frac}(A/P) = A_P/PA_P$(同构的证明见推论 1.3.1).
- 环 A 称为局部环, 如果 A 只有唯一的极大理想 m. 常用符号 (A, m) 或 (A, m, k) 明确局部环 A 的极大理想 m 和剩余类域 $k = A/m$.
- 对于一个域 k, 我们总是用 $\overline{k}$ 表示其代数闭包.

第一章 环及其局部化

1.1 空间与函数环

设 X 为拓扑空间, 令 $C(X)$ 为 X 上所有复值连续函数形成的 $\mathbb{C}$-代数. 我们的观点是用环 $C(X)$ 的信息来理解空间 X. 出发点是 X 中的一个点 a 可以对应 $C(X)$ 中的极大理想 $m_a \coloneqq \{f \in C(X) \mid f(a) = 0\}$. 当 X 具有比较好的分离性质时, 若 $a \neq b$, 则 $m_a \neq m_b$, 此时将空间 X 中的点对应为 $C(X)$ 中的极大理想并没有损失信息. 我们也可以将函数 f 在点 a 处的取值利用环中的语言重新表述. 具体而言, 考虑剩余类域 $k(m_a) \coloneqq C(X)/m_a$. 这是一个 $\mathbb{C}$-代数, 并且结构同态 $\mathbb{C} \longrightarrow k(m_a)$ 为同构. 在这个同构下, f 在 a 点的取值 $f(a) = \bar{f}$, 其中 $\bar{f}$ 表示 f 在商同态 $C(X) \longrightarrow k(m_a)$ 下的像. 设 $g\colon X \longrightarrow Y$ 为拓扑空间的连续映射, 则其诱导了函数环的拉回同态 (k-代数同态)

$$\begin{aligned} g^\sharp\colon C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

如果 $g(a) = b$, 则 $g^{\sharp -1}(m_a) = m_b$. 因此环同态 $g^\sharp$ 可以认为是空间映射 g 的对应物.

在上面的讨论中, 拓扑空间也可换作其它带结构的空间, 如微分流形, 复流形, 仿射代数簇等, 而相应的函数环为光滑函数环, 全纯函数环, 或正则函数环.

例 1.1.1 记 $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ 为复平面. 考虑其上的多项式函数环 $\mathbb{C}[x]$. 则 $\mathbb{A}^1$ 中的点 a 一一对应到 $\mathbb{C}[x]$ 中的极大理想 $m_a = (x - a)$. 设 $g\colon \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ z \mapsto f(z)$ 为多项式映射. 则容易验证 $g^\sharp\colon \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ 为 $x \mapsto f(x)$. 这说明 $\mathbb{A}^1$ 到自身的多项式映射一一对应到 $\mathbb{C}[x]$ 到自身的 $\mathbb{C}$-代数同态.

1.2 素谱空间

对一般的环 A, 我们也希望将其看作某个空间上的函数环. 根据上节的讨论, 一个自然的空间是 A 上所有极大理想形成的集合. 为了更方便的处理理想的拉回, 我们考虑所有素理想形成的空间.

定义 1.2.1 *环 A 的素谱空间 $\operatorname{Spec} A$ 定义为 A 的所有素理想形成的集合.*

对 $P \in \operatorname{Spec} A$, 对 $f \in A$, 我们定义 f 在 P 处的取值 $f(P)$ 为 f 在自然同态 $A \longrightarrow k(P) = \operatorname{Frac}(A/P)$ 下的像. 从而 $f(P) \in k(P)$. 以这样的方式, 我们将 f 看作 $\operatorname{Spec} A$ 上的 "函数", 其与真正函数的差别在于值域 $k(P)$ 随着点 P 变化. 如果 A 为某个域 k 上的代数, 并且自然同态 $k \longrightarrow k(P)$ 为同构, 则通过该同构, f 可看作真正的 k-值函数. 一般情况下, 虽然这种看法得不到真正的函数, 我们仍然可以通过要求 f 是 "连续的" 来定义 $\operatorname{Spec} A$ 上的拓扑. 由于在不同的剩余类域 $k(P)$ 中, 元素 0 和 1 仍然是能够统一表述的元素, 我们自然要求 f 不等于 0 的集合为开集.

定义 1.2.2 *设 $f \in A$, 称 $D(f) \coloneqq \{P \in \operatorname{Spec} A | f(P) \neq 0\}$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的一个主开集.*

根据定义, 条件 $f(P) \neq 0$ 也等价于 $f \notin P$. 下面的简单性质说明所有主开集形成 $\operatorname{Spec} A$ 上的一个开集基.

命题 1.2.1 *设 $f, g \in A$, 则 $D(f) \bigcap D(g) = D(fg)$.*

证明 根据定义即得. □

由此, 以主开集为开集基得到 $\operatorname{Spec} A$ 上的拓扑, 称为 Zariski 拓扑. 由定义, $U \subset \operatorname{Spec} A$ 为开集当且仅当 U 为一些主开集的并. 我们以后在素谱空间上默认赋予 Zariski 拓扑.

命题 1.2.2 *$\operatorname{Spec} A$ 中的子集 F 为闭集 $\iff$ 存在 A 的理想 I, 使得*

$$F = V(I) \coloneqq \{P \in \operatorname{Spec} A | f(P) = 0,\ \forall\ f \in I\} = \{P \in \operatorname{Spec} A | I \subset P\}.$$

证明 由 $\bigcup_{j \in J} D(f_j)$ 和 $V(\sum_{j \in J}(f_j))$ 互为补集即得. □

由定义, $V(I)$ 为理想 I 中所有 "函数" 的公共零点. 下面的命题给出了当理想作运算时, $V(I)$ 的变化.

命题 1.2.3 *设 I, J 均为 A 的理想, 则有*

(i) *如果 $I \subset J$, 那么 $V(J) \subset V(I)$.*

(ii) $V(I) \bigcap V(J) = V(I + J)$.

(iii) $V(I) \bigcup V(J) = V(I \bigcap J) = V(IJ)$.

证明 由定义直接验证即得. 作为例子, 下面证明 (iii). 首先由 (i) 知 $V(I)\bigcup V(J)\subset V(I\bigcap J)\subset V(IJ)$. 其次, 对任意 $P\in V(IJ)$, 如果 $P\notin V(I)$, 则可以找到 $f\in I$, 使得 $f(P)\neq 0$. 从而 $\forall\, g\in J$, 由 $fg\in IJ$ 知 $fg(P)=0$, 故 $g(P)=0$. 这样得到 $P\in V(J)$. 这说明 $V(IJ)\subset V(I)\bigcup V(J)$. 从而 (iii) 得证. □

在实际应用中, 我们经常需要利用主开集给出 $\operatorname{Spec}A$ 的开覆盖. 下面的命题是一个非常方便的判断开覆盖的方法.

命题 1.2.4 设 $f_j(j\in J)$ 为 A 的一族元素, 则以下几条互相等价:

(i) $D(f_j)$ 形成 $\operatorname{Spec}A$ 的一个开覆盖.

(ii) 理想 $\sum_{j\in J}(f_j)=A$.

(iii) 存在有限个指标 $j_1,\dots,j_n\in J$, 存在 $c_1,\dots,c_n\in A$, 使得 $\sum_{k=1}^{n}c_kf_{j_k}=1$.

证明 由于 $\bigcup_{j\in J}D(f_j)$ 的补集为 $V(\sum_{j\in J}(f_j))$, 故 $\bigcup_{j\in J}D(f_j)=\operatorname{Spec}A\iff V(\sum_{j\in J}(f_j))=\varnothing\iff\sum_{j\in J}(f_j)=A$. □

如果一个 (不一定 Hausdorff 的) 拓扑空间 X 的任意开覆盖都存在有限子覆盖, 则称 X 是**拟紧**的. 由上述命题, $\operatorname{Spec}A$ 总是拟紧空间. 注意素谱空间一般不是 Hausdorff 的. 设 $\varphi\colon A\longrightarrow B$ 为环同态, 则有素谱空间之间的映射

$$\begin{aligned}\varphi^*\colon \operatorname{Spec}B &\longrightarrow \operatorname{Spec}A\\ Q &\longmapsto \varphi^{-1}(Q)\end{aligned}$$

对于 $Q\in\operatorname{Spec}B$, 记 $P=\varphi^{-1}(Q)\in\operatorname{Spec}A$, 则 φ 诱导整环的单同态 $A/P\hookrightarrow B/Q$, 进而诱导剩余类域的同态 $\varphi_P\colon k(P)\longrightarrow k(Q)$. 由取值的定义可以看到对于 $f\in A$, $\varphi(f)(Q)=\varphi_P(f(P))$. 这说明环同态 φ 可以看做空间映射 φ^* 诱导的函数环的拉回同态. 由这个看法或者直接由定义, 对于 $\operatorname{Spec}A$ 的主开集 $D(f)$, 有 $\varphi^{*-1}(D(f))=D(\varphi(f))$. 从而 φ^* 为连续映射.

例 1.2.1 我们分析 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. 首先作为集合, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}=\{(0),(2),(3),(5),\dots\}$. 其中 (0) 处的剩余类域为 $\mathbb{Q}$, (p) 处的剩余类域为 $\mathbb{F}_p$. 对非零的 $n\in\mathbb{Z}$, n 在 (p) 处的取值为 $\bar{n}\in\mathbb{F}_p$. 主开集 $D(n)=\{(p):p\nmid n\}$. 由于 $\mathbb{Z}$ 为主理想整环, 对任意非零理想 $I=(n)$, 对应的闭集 $V(I)=\{(p):p\mid n\}$. 由此, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 的闭集或者为全空间 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, 或者为 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\setminus\{(0)\}$ 的有限子集. 另外, 点 (0) 的闭包为 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, 称为一般点 (generic point), 而其它点自身均为闭子集, 称为闭点.

1.3 环的局部化

根据上几节的讨论, 我们将环 A 中的元素看作 $\operatorname{Spec} A$ 上的“函数”. 一个自然的问题是主开集 $D(f)$ 上的“函数”应该是哪个环中的元素? 直观上看, 由于 $D(f)$ 表示 f 取值不为零的开子集, 任意形如 $\frac{g}{f^n}$ 的“函数”都应该在 $D(f)$ 上有定义. 与通常的分数表示法类似, 当 $gf^m = hf^n$ 时, 两个元素 $\frac{g}{f^n}$, $\frac{h}{f^m}$ 应该代表同一个“函数”. 为了将上述分析严格化, 我们考虑集合 $\tilde{A} \coloneqq \{(g, f^n) | g \in A,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. 考虑 $\tilde{A}$ 上的如下关系 $\equiv$: $(g, f^n) \equiv (h, f^m) \iff gf^m = hf^n$. 不难看到, 关系 $\equiv$ 并不是 $\tilde{A}$ 上的等价关系 (不满足传递性). 为此, 我们将其进行修正, 变成等价关系. 令 $\sim$ 为 $\tilde{A}$ 上的如下关系: $(g, f^n) \sim (h, f^m) \iff$ 存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $(gf^m - hf^n)f^k = 0$. 容易看到, $\sim$ 为 $\tilde{A}$ 上的等价关系. 我们记 A_f 为商集 $\tilde{A}/\sim$, 并将 (g, f^n) 代表的 A_f 中元素记为 $\frac{g}{f^n}$. 这样在 A_f 中, $\frac{g}{f^n} = \frac{h}{f^m} \iff$ 存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $(gf^m - hf^n)f^k = 0$. 在 A_f 中, 通过如下方式定义加法和乘法, 使其成为环:

$$\frac{g}{f^n} + \frac{h}{f^m} \coloneqq \frac{gf^m + hf^n}{f^{m+n}}$$
$$\frac{g}{f^n} \cdot \frac{h}{f^m} \coloneqq \frac{gh}{f^{m+n}}.$$

容易验证, 上述定义不依赖于代表元的选取, 从而是良好的. 并且通过这样定义的加法和乘法, A_f 成为环, 称为 A 在 f 处的局部化. 对于 $\frac{g}{f^n} \in A_f$, 对 $P \in D(f)$, 通过令 $\frac{g}{f^n}(P) = \frac{g(P)}{f(P)^n} \in k(P)$, 我们将 $\frac{g}{f^n}$ 看作 $D(f)$ 上的“函数”. 不难看到, 当 $f \in A^*$ 为 A 中乘法可逆元时 (比如 $f = 1$), 局部化 A_f 与 A 同构.

我们将上述构造过程推广到一般情形. 称环 A 的子集 S 为一个乘法子集, 如果 $1 \in S$, 并且 $\forall\ s_1, s_2 \in S$, 均有 $s_1 s_2 \in S$. 对于乘法子集 $S \subset A$, 令

$$\tilde{A} \coloneqq A \times S = \{(a, s) \mid a \in A,\ s \in S\}.$$

考虑 $\tilde{A}$ 上的关系 $\sim$: $(a, s_1) \sim (b, s_2) \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $(as_2 - bs_1)s = 0$. 可以验证这是 $\tilde{A}$ 上的等价关系. 记商集合 $\tilde{A}/\sim$ 为 A_S 或 $S^{-1}A$, 并将 (a, s) 代表的 A_S 中元素记为 $\frac{a}{s}$. 这样在 A_S 中, $\frac{a}{s_1} = \frac{b}{s_2} \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $(as_2 - bs_1)s = 0$. 在 A_S 中, 通过如下方式定义加法和乘法, 使其成为环:

$$\frac{a}{s_1} + \frac{b}{s_2} \coloneqq \frac{as_2 + bs_1}{s_1 s_2}$$
$$\frac{a}{s_1} \cdot \frac{b}{s_2} \coloneqq \frac{ab}{s_1 s_2}.$$

容易验证, 上述定义不依赖于代表元的选取, 从而是良好的. 并且通过这样定义的加法

和乘法, A_S 成为环, 称为 A 在 S 处的**局部化**.

例 1.3.1 以下为常用的三种乘法子集处的局部化:

- 对 $f \in A$, 乘法子集 S 取为 $\{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. 此时 A_S 恰为前面定义的在 f 处的局部化 A_f.
- 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, 取 S 为 P 的补集 $\{s \in A | s \notin P\}$. 此时 A_S 也记为 A_P, 称为 A 在点 P 处的局部化.
- 对环同态 $\varphi\colon A \longrightarrow B$, 对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, 取 B 的乘法子集 $S = \varphi(A \setminus \mathfrak{p})$. 此时 B_S 也记为 $B_{\mathfrak{p}}$.

一般地, 对同态 $\varphi\colon A \longrightarrow B$, 对 A 的乘法子集 S, 我们将 B 在 $\varphi(S)$ 处的局部化记为 B_S 或 $S^{-1}B$.

映射 $i\colon A \longrightarrow A_S,\ a \longmapsto \frac{a}{1}$ 显然为环同态, 并且其满足如下万有性质:

命题 1.3.1 (局部化的万有性质) *$i(S) \subset A_S^*$, 并且对任意环同态 $\varphi\colon A \longrightarrow B$, 如果 $\varphi(S) \subset B^*$, 那么存在唯一的环同态 $\bar{\varphi}\colon A_S \longrightarrow B$, 使得 $\varphi = \bar{\varphi} \circ i$. 用交换图表表示如下:*

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow{\scriptstyle i} & \searrow^{\varphi} & \\ A_S & \overset{\exists!\bar{\varphi}}{\dashrightarrow} & B \end{array}$$

证明 我们说明 $\bar{\varphi}$ 的存在性, 其它易验证. 给定 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 满足 $\varphi(S) \subset B^*$. 对 $\frac{a}{s} \in A_S$, 令 $\bar{\varphi}(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. 不难验证, $\bar{\varphi}$ 不依赖代表元的选取, 从而给出了良好定义的 $\bar{\varphi}\colon A_S \longrightarrow B$. □

在不引起歧义的情况下, 对 $a \in A$, 我们也将 $i(a) = \frac{a}{1} \in A_S$ 记作 a. 利用万有性质可以避免构造环同态时繁琐的验证定义良好性的问题.

命题 1.3.2 (局部化与商交换) *设 S 为环 A 的乘法子集, I 为 A 的理想. 记 $\bar{S} \subset A/I$ 为 S 在商环 A/I 中的像. 则 $\bar{S}$ 为 A/I 的乘法子集, 并且有同构 $A_S/IA_S \simeq (A/I)_{\bar{S}}$.*

证明 直接验证可知 $\bar{S}$ 为 A/I 的乘法子集. 利用局部化的万有性质, 自然同态 $A \longrightarrow (A/I)_{\bar{S}}, a \longmapsto \frac{\bar{a}}{1}$ 诱导了环同态 $A_S \longrightarrow (A/I)_{\bar{S}}$. 再由商环的万有性质, 又得到环同态 $\varphi\colon A_S/IA_S \longrightarrow (A/I)_{\bar{S}}$. 同理, 先由商环的万有性质, 再由局部化的万有性质, 也可以从自然同态 $A \longrightarrow A_S/IA_S$ 诱导一个环同态 $\psi\colon (A/I)_{\bar{S}} \longrightarrow A_S/IA_S$. 通过写出在具体元素上的作用, 可以验证 φ 和 ψ 互逆, 从而得到所要证的同构. □

推论 1.3.1 *设 A 为整环, $P \in \operatorname{Spec} A$, 则有域同构 $\operatorname{Frac}(A/P) \simeq A_P/PA_P$.*

证明 注意到 $\operatorname{Frac}(A/P)$ 为整环 A/P 在素理想 (0) 处的局部化. 利用上面的命题即得所需同构. □

命题 1.3.3 (局部化的复合) 设 S_1, S_2 均为 A 的乘法子集, 则

$$S \coloneqq \{s_1 s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

也为 A 的乘法子集, 并且有环同构 $(A_{S_1})_{S_2} \simeq A_S$.

证明 直接验证可知 S 为 A 的乘法子集. 利用局部化的万有性质, 自然同态 $A \longrightarrow A_S$ 诱导了同态 $A_{S_1} \longrightarrow A_S$, 再次利用局部化万有性质, 得到同态 $(A_{S_1})_{S_2} \longrightarrow A_S$. 同理可得同态 $A_S \longrightarrow (A_{S_1})_{S_2}$. 通过在具体元素上进行验证得到这两个同态互逆. □

命题 1.3.4 (局部化与多项式环交换) 设 S 为环 A 的乘法子集, 则有环同构

$$A[x]_S \simeq A_S[x].$$

证明 与前面类似, 利用局部化的万有性质和多项式环的万有性质即得互逆的同态. □

下面讨论局部化的素谱空间. 我们有如下基本性质.

命题 1.3.5 设 S 为 A 的乘法子集. 则自然同态 $i\colon A \longrightarrow A_S$ 诱导如下集合的同胚, 其中对 X 赋予 $\operatorname{Spec} A$ 的子空间拓扑:

$$\begin{aligned} i^*\colon \operatorname{Spec} A_S &\xrightarrow{\sim} X \coloneqq \left\{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \cap S = \varnothing\right\} \\ Q &\longmapsto i^{-1}(Q) \end{aligned}$$

其逆映射为 $P \longmapsto PA_S$.

证明 直接验证可知这是一个双射. 为了验证这是同胚, 只需注意到 $\forall\ f \in A$, i^* 将 $\operatorname{Spec} A_S$ 中的主开集 $D(\frac{f}{1})$ 双射到 X 的开子集 $X \cap D(f)$ 即可. □

在例 1.3.1 的三种情形, $\operatorname{Spec} A_S$ 有更具体的描述:

- 对 $f \in A$, 自然同态 $i\colon A \longrightarrow A_f$ 诱导 $\operatorname{Spec} A_f$ 到 $\operatorname{Spec} A$ 的主开集 $D(f)$ 的双射.
- 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} A_P$ 的点一一对应到 A 的包含在 P 中的素理想. 特别地, A_P 为局部环, 其唯一的极大理想是 PA_P, 剩余类为 $k(P) = \operatorname{Frac}(A/P) = A_P/PA_P$.
- 对环同态 $A \longrightarrow B$, 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} B_P$ 的点一一对应到 B 的满足 $Q \cap A \subset P$ 的素理想 Q.

作为对比, 环同态基本定理告诉我们商环 A/I 的素理想一一对应到 A 的包含 I 的素理想. 所以作局部化和作商都有筛选 A 的一部分素理想的效果. 实际上这些一一对应还是保持拓扑结构的, 即有下面的命题.

命题 1.3.6 设 $f \in A$, I 为 A 的理想. 则有:

(i) 自然同态 $i\colon A \longrightarrow A_f$ 诱导的双射 $i^*\colon \operatorname{Spec} A_f \xrightarrow{\sim} D(f)$ 为同胚. 其中赋予 $D(f)$ 作为 $\operatorname{Spec} A$ 的开子集的子空间拓扑.

(ii) 商同态 $\pi\colon A \longrightarrow A/I$ 诱导的双射 $\pi^*\colon \operatorname{Spec}(A/I) \xrightarrow{\sim} V(I)$ 为同胚. 其中赋予 $V(I)$ 作为 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集的子空间拓扑.

证明 (i): 由命题 1.3.5 即得.

(ii): 易知 π^* 为连续的双射. 只需再验证 π^* 把 $\operatorname{Spec}(A/I)$ 的主开集映为 $V(I)$ 的开集. 任取 $g \in A$, 则 $\operatorname{Spec}(A/I)$ 的主开集 $D(\bar{g})$ 满足 $\pi^*(D(\bar{g})) = D(g) \cap \operatorname{Im}\pi^* = D(g) \cap V(I)$. 这就验证了所需要的性质. □

综合利用局部化和取商的操作, 我们得到下面关于纤维的描述.

命题 1.3.7 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$. 则自然同态 $B \longrightarrow B_P/PB_P$ 诱导的素谱空间映射给出同胚: $\operatorname{Spec}(B_P/PB_P) \xrightarrow{\sim} \varphi^{*-1}(P)$, 其中 $\varphi^{*-1}(P)$ 为素谱空间映射 $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在点 P 处的纤维, 并且赋予 $\operatorname{Spec} B$ 的子空间拓扑.

证明 由命题 1.3.5 知 $B \longrightarrow B_P$ 诱导同胚 $\operatorname{Spec} B_P \xrightarrow{\sim} X \coloneqq \{Q \in \operatorname{Spec} B \mid Q \cap A \subset P\}$. 再由命题 1.3.6 知 $B_P \longrightarrow B_P/PB_P$ 诱导同胚 $\operatorname{Spec}(B_P/PB_P) \xrightarrow{\sim} V(PB_P) \subset \operatorname{Spec} B_P$. 综合这两个同胚即得同胚 $\operatorname{Spec}(B_P/PB_P) \xrightarrow{\sim} \varphi^{*-1}(P)$. □

例 1.3.2 考虑 $\mathbb{C}$ 的子环 $\mathbb{Z}[i]$, 其中 $i = \sqrt{-1}$. 我们考察环同态 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$. 设 p 为素数. 则根据前面的命题, 纤维 $\{Q \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[i] \mid Q \cap \mathbb{Z} = (p)\}$ 与 $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i]_{(p)}/(p))$ 一一对应. 注意到有环同构 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[i]$, $x \longmapsto i$. 从而有环的一系列同构

$$\frac{\mathbb{Z}[i]_{(p)}}{(p)} \simeq \frac{(\mathbb{Z}[x]/(x^2+1))_{(p)}}{(p)} \simeq \left(\frac{\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)}{(p)}\right)_{(p)} \simeq \left(\frac{\mathbb{F}_p[x]}{(x^2+1)}\right)_{(p)} \simeq \frac{\mathbb{F}_p[x]}{(x^2+1)}.$$

最后一个同构是因为 $\mathbb{Z} \setminus (p)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1)$ 中的像已经全为可逆元. 通过上面的同构, 我们看到 $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i]_{(p)}/(p)) \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1))$. 从而 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 在 (p) 处纤维的元素个数不超过两个, 并且由 x^2+1 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的因子分解确定.

命题 1.3.8 设 A 为环. 则 $\bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A} P$ 等于 A 的所有幂零元形成的理想.

证明 显然 A 的幂零元包含在 $\bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A} P$ 中. 反之, 设 $f \in \bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A} P$, 考虑 A_f. 由上面的描述, $\operatorname{Spec} A_f \simeq D(f)$. 而根据 f 的取法, $D(f) = \varnothing$. 这样得到 $\operatorname{Spec} A_f = \varnothing$, 从而 A_f 为零环, 即在 A_f 中 $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$. 故 f 为幂零元. □

该命题的几何意义是说, 对 $f \in A$, 如果 f 作为 $\operatorname{Spec} A$ 上的 "函数" 处处取值为 0, 则 f 为幂零元. 特别地, 如果 A 没有非平凡幂零元, 那么处处取值为 0 的 "函数" 也是零元素, 这说明此时将 A 中的元素看作 $\operatorname{Spec} A$ 上的 "函数" 不损失信息.

定义 1.3.1 称环 A 为**约化环**, 如果 A 没有非平凡幂零元, 或等价地, $\bigcap_{P\in\operatorname{Spec} A} P = (0)$.

作为几何看法的说明, 我们证明如下经常用到的性质.

命题 1.3.9 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态.

(i) 若 φ 为单同态, 则 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = \operatorname{Spec} A$.

(ii) 若 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = \operatorname{Spec} A$, 并且 A 为约化环, 则 φ 为单同态.

证明 (i) 假设 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = V(I)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的真闭子集, 则存在 $f \in I$, 使得 f 在 $\operatorname{Spec} A$ 上不恒取零值. 但另一方面, 由 f 在 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)}$ 上取值为零可知 $\varphi(f)$ 在 $\operatorname{Spec} B$ 上恒取零值. 故 $\varphi(f)$ 为 B 中的幂零元. 由 φ 为单同态可知 f 为 A 中幂零元, 故 f 在 $\operatorname{Spec} A$ 恒取零值. 这个矛盾说明 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = \operatorname{Spec} A$.

(ii) 设 $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. 则 $\varphi(f)$ 在 $\operatorname{Spec} B$ 上取值恒为零. 从而 f 在 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)}$ 上取值恒为零. 由于 $\overline{\varphi^*(\operatorname{Spec} B)} = \operatorname{Spec} A$, 可知 f 在 $\operatorname{Spec} A$ 上取值恒为零, 故 f 为 A 中幂零元. 由于 A 为约化环即知 $f = 0$. □

定义–命题 1.3.1 设 I 为环 A 的理想, 则 $\sqrt{I} \coloneqq \{a \in A | \exists\ n \geq 0,\ a^n \in I\}$ 也为 A 的理想. 如果 $\sqrt{I} = I$, 则称 I 为**根式理想**.

命题 1.3.8 可以用上面的符号写为 $\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A} P = \sqrt{(0)}$. 更一般地, 我们有如下性质.

命题 1.3.10 设 I 为环 A 的理想, 则 $\bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A, P \supseteq I} P = \sqrt{I}$.

证明 应用命题 1.3.8 到商环 A/I 即可. □

该命题的几何意义是说, $\sqrt{I}$ 中的元素恰为在 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集 $V(I)$ 上取值为 0 的“函数”. 这说明 $V(\sqrt{I}) = V(I)$. 下面的命题说明根式理想和 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集一一对应.

命题 1.3.11 设 A 为环. 则 $I \mapsto V(I)$ 和 $Z \mapsto I(Z) \coloneqq \{f \in A | f(x) = 0,\ \forall\ x \in Z\}$ 给出了如下两个集合的一一对应:

$$\{A\text{的根式理想}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\operatorname{Spec} A\text{的闭子集}\}.$$

证明 利用命题 1.3.10 验证 $I \mapsto V(I)$ 和 $Z \mapsto I(Z)$ 是互逆映射即可. □

我们称一个拓扑空间 X 是**不可约的**, 如果 X 不能写成两个真闭子集的并. 不难看到, X 不可约等价于 X 的每个非空开子集都是稠密的, 也等价于 X 的任何两个非空开子集的交非空. X 的子集 F 称为不可约子集, 如果 F 在子空间拓扑下是不可约的.

命题 1.3.12 设 I 为环 A 的理想, 则 $V(I)$ 是 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约闭子集 $\iff$ $\sqrt{I}$ 为 A 的素理想.

证明 由于 $V(I) = V(\sqrt{I})$, 我们不妨设 $I = \sqrt{I}$ 为根式理想. 又由于 $V(I) \simeq \operatorname{Spec} A/I$, 通过考虑 A/I, 又不妨设 $I = (0)$. 这样 A 为约化环, 并且只需证明

$$\operatorname{Spec} A \text{ 不可约} \iff A \text{ 为整环}.$$

$\Longrightarrow$: 设 $f,g\in A$ 并且 $fg=0$. 则 $\forall\, P\in\operatorname{Spec}A$, $f(P)g(P)=0$. 从而 $D(f)\cap D(g)=\varnothing$. 由 X 不可约知 $D(f)=\varnothing$ 或 $D(g)=\varnothing$. 不妨设 $D(f)=\varnothing$. 则 $\forall\ P\in\operatorname{Spec}A$, $f(P)=0$. 由 A 为约化环知 $f=0$.

$\Longleftarrow$: 设 $D(f)$, $D(g)$ 为 $\operatorname{Spec}A$ 的两个非空主开集. 则 f,g 均非零, 从而由 A 为整环知 $fg\neq 0$. 再由 A 为约化环即知 $D(fg)\neq\varnothing$. 这样证明了任意两个非空主开集的交非空. 由主开集形成开集基即知 $\operatorname{Spec}A$ 的任意两个非空开子集的交非空. □

设 X 为拓扑空间. 设 $F_0\supsetneq F_1\supsetneq\cdots\supsetneq F_n$ 为 X 的不可约闭子集形成的降链, 称 n 为该降链的长度. 我们定义 X 的**维数**, 记为 $\dim X$, 为所有 X 的不可约闭子集降链长度的上确界. 设 Y 为 X 的闭子集, 我们定义 Y 在 X 中的**余维数**, 记为 $\operatorname{codim}_X(Y)$, 为 X 的所有包含 Y 的不可约闭子集形成的降链长度的上确界. 设 A 为环, 定义 A 的 (Krull) 维数为素谱空间 $\operatorname{Spec}A$ 的维数, 记为 $\dim A$. 对于 A 的理想 I, 我们称 $V(I)$ 在 $\operatorname{Spec}A$ 中的余维数 $\operatorname{codim}_{\operatorname{Spec}A}(V(I))$ 为 I 的**高度**, 记为 $\operatorname{ht}I$.

由不可约闭子集和素理想的一一对应, 可以看到 $\dim A$ 为 A 中所有素理想链 $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_n$ 的长度 n 的上确界. 同理, 对 A 的理想 I, $\operatorname{ht}I$ 为 A 中所有满足 $P_n\subset\sqrt{I}$ 的素理想链 $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_n$ 的长度 n 的上确界.

一般而言, 在一个理想处的局部化 A_P 因为是局部环, 所以比 A 更容易研究. 但是从 A 过渡到 A_P 的过程中只保留了 P 附近的信息. 为了弥补这个损失, 我们可以让 P 遍历 $\operatorname{Spec}A$ 中的所有点. 这样考虑所有 A_P 时就不会损失信息了. 下面的两个命题就说明了这种观点.

命题 1.3.13 设 A 为环, 设 $f\in A$. 则 $f=0\iff\forall\, P\in\operatorname{Spec}A$, f 在 A_P 中为 0.

证明 只需证 $\Longleftarrow$. 记 $\operatorname{ann}(f):=\{a\in A\mid af=0\}$ 为 f 的零化理想. 如果 $\operatorname{ann}(f)\neq A$, 则存在 A 的极大理想 m 包含 $\operatorname{ann}(f)$. 由于 f 在 A_m 中为 0, 可以看到存在 $s\in A\setminus m$, 使得 $sf=0$, 即 $s\in\operatorname{ann}(f)$. 而这与 $\operatorname{ann}(f)\subset m$ 矛盾. 故 $\operatorname{ann}(f)=A$, 从而 $f=0$. □

命题 1.3.14 设 A 为整环. 对每个 $P\in\operatorname{Spec}A$, 通过自然的单同态将 A_P 看作 $\operatorname{Frac}(A)$ 的子环. 则 $A=\bigcap_{P\in\operatorname{Spec}A}A_P$.

证明 设 $0\neq x\in\bigcap_{P\in\operatorname{Spec}A}A_P$. 考虑理想 $I:=\{a\in A\mid ax\in A\}$. 只需证明 $I=A$. 假设 $I\subsetneq A$, 则存在 A 的极大理想 m 包含 I. 由于 $x\in A_m$, 根据局部化的定义可以找到 $s\in A\setminus m$, 使得 $sx\in A$, 从而 $s\in I$. 这与 $I\subset m$ 矛盾. 故 $I=A$, 从而 $x\in A$. 另一个方向的包含关系 $A\subset\bigcap_{P\in\operatorname{Spec}A}A_P$ 是显然的. □

注记 1.3.1 命题 1.3.14 中证明一个分式域中的元素属于 A 的方法还会在处理整闭整环时出现 (定理 4.1.1, 定理 8.5.1).

由上面的讨论, 我们看到在一个元素处的局部化 A_f 对应着 $\operatorname{Spec}A$ 的主开集 $D(f)$, 因此有明确的几何意义, 而在一个点处的局部化 A_P 虽然有更好的代数性质 (是局部环), 但其几何意义并不像 A_f 那样明显. 下面的命题说明, 在常见的代数中, 一个点处

的局部化可以决定在某个元素处的局部化, 因此研究局部环 A_P 也可以反映包含 P 点的一个主开集的性质.

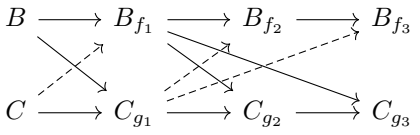
命题 1.3.15 设 A 为环, $B = A[x_1, \dots, x_n]/I$, $C = A[x_1, \dots, x_n]/J$ 均为有限生成 A-代数, 并且 I 和 J 均为多项式环 $A[x_1, \dots, x_n]$ 的有限生成理想. 设 $P \in \operatorname{Spec} B$, $Q \in \operatorname{Spec} C$, 并且有 A-代数同构 $\varphi\colon B_P \xrightarrow{\sim} C_Q$. 则 φ 可以扩张为主开集上的同构, 即存在 $f \in B$, $g \in C$, 以及 A-代数同构 $\tilde{\varphi}\colon B_f \xrightarrow{\sim} C_g$, 使得 $P \in D(f)$, $Q \in D(g)$, 并且如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} B_f & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_P & \xrightarrow{\varphi} & C_Q \end{array}$$

其中竖直箭头代表局部化诱导的自然同态.

证明 记 $\psi\colon C_Q \xrightarrow{\sim} B_P$ 为 φ 的逆映射. 我们首先将 φ "提升" 为从 B 出发的同态. 由于 $B = A[x_1, \dots, x_n]/I$, 存在 $h \in C$, 使得 $Q \in D(h)$, 并且 $\forall\, 1 \leq i \leq n$, 均存在 $c_i \in C$, 使得 $\varphi(x_i) = \frac{c_i}{h} \in C_Q$. 这样 $x_i \longmapsto \frac{c_i}{h}$ 给出了 A-代数同态 $\varphi'\colon A[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow C_h$. 设 $I = (F_1, \dots, F_m)$, $F_j \in A[x_1, \dots, x_n]$. 对每个 $j = 1, \dots, m$, 由于 $\varphi(F_j) = 0 \in C_Q$, 我们看到 $\varphi'(F_j)$ 在 $(C_h)_Q = C_Q$ 中为 0. 故存在 $g' \in C$, 使得 $Q \in D(g')$, 并且 $g'\varphi'(F_j) = 0 \in C_h$, $\forall\ j = 1, \dots, m$. 令 $g_1 \coloneqq hg' \in C$, 则 $Q \in D(g_1)$, 并且复合同态 $A[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\varphi'} C_h \longrightarrow C_{g_1}$ 将每个 F_j 均映为 0, 故诱导了 A-代数同态 $\varphi_1\colon B = A[x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow C_{g_1}$. 由构造过程, φ_1 在 P 处的局部化给出了同态 φ. 同理, 我们可以找到 $f_1 \in B$ 以及 A-代数同态 $\psi_1\colon C \longrightarrow B_{f_1}$, 使得 $P \in D(f_1)$, 并且 ψ_1 在 Q 处的局部化给出同态 ψ.

设 $\psi_1(g_1) = \frac{f_2'}{f_1^{n_1}}$, 其中 $f_2' \in B$, $n_1 \geq 0$. 由于 $\psi_1^{-1}(P) = Q$, 并且 $g_1 \notin Q$, 可知 $f_2' \notin P$. 令 $f_2 \coloneqq f_1 f_2'$, 则 $P \in D(f_2)$, 并且 $\psi_1(g_1) \in B_{f_2}^*$. 从而由局部化的万有性质可知 ψ_1 诱导了 A-代数同态 $\psi_2\colon C_{g_1} \longrightarrow B_{f_2}$. 考虑复合同态 $\psi_2 \circ \varphi_1\colon B \longrightarrow B_{f_2}$. 由于 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}\colon B_P \longrightarrow B_P$, 可以找到 $f_3' \in B$, 使得 $f_3' \notin P$, 并且对每个 $i = 1, \dots, n$, 在 B_{f_2} 中均有 $f_3'(\psi_2 \circ \varphi_1(x_i) - x_i) = 0$. 令 $f_3 \coloneqq f_2 f_3' \in B$, 则 $P \in D(f_3)$, 并且复合同态 $\psi_3\colon C_{g_1} \xrightarrow{\psi_2} B_{f_2} \longrightarrow B_{f_3}$ 满足 $\psi_3 \circ \varphi_1\colon B \longrightarrow B_{f_3}$ 为局部化给出的自然同态. 同理, 我们可以找到 $g_2, g_3 \in C$, 以及 A-代数同态 $\varphi_2\colon B_{f_1} \longrightarrow C_{g_2}$, 使得 $Q \in D(g_2 g_3)$, $g_1 \in C_{g_2}^*$, $g_2 \in C_{g_3}^*$, φ_2 在 P 处的局部化为 φ, 并且 $\varphi_3 \circ \psi_1\colon C \longrightarrow C_{g_3}$ 为局部化给出的自然同态. 其中 $\varphi_3\colon B_{f_1} \longrightarrow C_{g_3}$ 为同态 $B_{f_1} \xrightarrow{\varphi_2} C_{g_2}$ 和自然同态 $C_{g_2} \longrightarrow C_{g_3}$ 的复合. 我们将上述构造总结为下面的交换图表:



设 $\psi_1(g_3)=\frac{f_4'}{f_1^n}\in B_{f_1}$, 其中 $f_4'\in B$, $n\geq 0$. 令 $f\coloneqq f_3f_4'\in B$. 则 $P\in D(f)$. 同样地, 设 $\varphi_1(f_3)=\frac{g_4'}{g_1^m}\in C_{g_1}$, 其中 $g_4'\in C$, $m\geq 0$. 令 $g\coloneqq g_3g_4'\in C$, 则 $Q\in D(g)$. 下面验证 f 在复合同态 $B_{f_1}\xrightarrow{\varphi_3}C_{g_3}\longrightarrow C_g$ 下的像为 C_g 中的可逆元. 为此, 由 B_{f_1} 中的等式 $\psi_1(g_3)=\frac{f_4'}{f_1^n}$ 可得 C_{g_3} 中的等式 $\varphi_3(\psi_1(g_3))=\frac{\varphi_3(f_4')}{\varphi_3(f_1^n)}$. 由于 $\varphi_3\circ\psi_1\colon C\longrightarrow C_{g_3}$ 为局部化给出的自然同态, 故在 C_{g_3} 中有 $g_3=\frac{\varphi_3(f_4')}{\varphi_3(f_1^n)}$. 这样就得到 $\varphi_3(f_4')$ 为 C_{g_3} 的可逆元. 由此可知复合同态 $B_{f_1}\xrightarrow{\varphi_3}C_{g_3}\longrightarrow C_g$ 诱导了同态 $\tilde{\varphi}\colon B_f\longrightarrow C_g$. 同理有 g 在复合同态 $C_{g_1}\xrightarrow{\psi_3}B_{f_3}\longrightarrow B_f$ 下的像为 B_f 中的可逆元, 从而这个复合同态诱导了同态 $\tilde{\psi}\colon C_g\longrightarrow B_f$. 直接验证可知 $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 为互逆的映射. 故 $\tilde{\varphi}$ 为同构. 不难看到其满足所要的交换图表条件. □

1.4 层的观点

设 X 为拓扑空间. 为了构造 X 上的连续函数 f, 我们只需构造 X 的一个开覆盖 U_i, 以及每个 U_i 上的连续函数 f_i, 使得对每个 i,j, 在交集 $U_i\cap U_j$ 上有 $f_i=f_j$. 满足这些条件的 f_i 通过粘合给出整体的连续函数 f. 层的概念将这种通过粘合局部对象得到整体对象的方法抽象化, 以适应各种不同的语境.

1.4.1 层与 $\mathcal{B}$-层

定义 1.4.1 设 X 为拓扑空间, X 上的一个 (Abel 群) 预层 $\mathcal{F}$ 是指满足下列条件的一个结构:

(i) 对 X 的每个开集 U, 指定一个 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$, 并且 $\mathcal{F}(\varnothing)=0$.

(ii) (限制同态) 对任意两个开集 $V\subset U$, 指定一个群同态 $\rho_{UV}\colon\mathcal{F}(U)\longrightarrow\mathcal{F}(V)$, 并且 $\rho_{UU}=\mathrm{id}$.

(iii) (相容性) 对任意三个开集 $W\subset V\subset U$, 有 $\rho_{UW}=\rho_{VW}\circ\rho_{UV}$.

在上述定义中, 如果每个 $\mathcal{F}(U)$ 均为环, 并且限制同态 ρ_{UV} 均为环同态, 则得到的预层称为环预层. 我们称 $s\in\mathcal{F}(U)$ 为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的一个截面. $\mathcal{F}(X)$ 中的元素称为整体截面. 对 $s\in\mathcal{F}(U)$, $V\subset U$, 一般将 $\rho_{UV}(s)$ 记作 $s\mid_V$, 称为 s 在 V 上的限制. 为了从局部截面粘合得到整体截面, 我们经常需要预层进一步满足如下的粘合条件.

定义 1.4.2 设 X 为拓扑空间. X 上的一个预层 $\mathcal{F}$ 称为层, 如果其满足如下粘合条件:

(1) 对任意开集 U, 对 U 的任意开覆盖 U_i ($i\in I$), 如果 $s\in\mathcal{F}(U)$ 满足 $s\mid_{U_i}=0$, $\forall\, i\in I$, 那么 $s=0$.

(2) 对任意开集 U, 对 U 的任意开覆盖 U_i ($i\in I$), 如果对每个 $i\in I$, 给定 $s_i\in\mathcal{F}(U_i)$, 并且满足 $\forall\, i,j\in I$, $s_i\mid_{U_i\cap U_j}=s_j\mid_{U_i\cap U_j}$, 那么存在 $s\in\mathcal{F}(U)$, 使得 $s\mid_{U_i}=s_i$, $\forall\, i\in I$.

由 (1) 可知 (2) 中的 s 是唯一的.

例 1.4.1 设 X 为拓扑空间, 对开集 $U \subset X$, 令 $C_X(U)$ 为 U 上的连续复值函数形成的环, 对 $V \subset U$, 令限制同态 ρ_{UV} 为函数在子集上的限制. 这样得到的预层 C_X 为层, 称为 X 上的连续函数层. 这是一个环层. 同样的方式, 如果 X 为微分流形 (复流形, 代数簇), X 上的光滑函数 (全纯函数, 正则函数) 也形成层.

在微分流形中, 为了描述在一个点附近的光滑函数性质, 我们有函数芽的概念. 对于抽象的预层或层也有类似的推广. 设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的一个预层, 设 $x \in X$. 给定一个满足如下条件的 x 的开邻域形成的集合 S:

$$\text{对 } x \text{ 的任意开邻域 } U,\ \exists\, V \in S, \text{使得 } V \subset U. \tag{1.4–1}$$

注意这样的 S 一定存在, 比如可以将 S 取为 x 的所有开邻域形成的集合. 对满足 (1.4–1) 的 S, 考虑无交并 $\bigsqcup_{U\in S} \mathcal{F}(U)$ 的如下商集:

$$\varinjlim_{U\in S} \mathcal{F}(U) \coloneqq \bigsqcup_{U\in S} \mathcal{F}(U)/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 定义为: 对 $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$, 定义 $s_1 \sim s_2 \iff$ 存在 $U_3 \in S$, 使得 $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$, 并且 $s_1 \mid_{U_3} = s_2 \mid_{U_3}$.

我们通过如下方式定义 $\varinjlim_{U\in S} \mathcal{F}(U)$ 上的加法: 对 $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$, 取 $U_3 \in S$ 满足 $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$, 令 $\overline{s_1} + \overline{s_2} \coloneqq \overline{s_1 \mid_{U_3} + s_2 \mid_{U_3}}$. 由定义可以验证上述定义不依赖于代表元的选取, 并且在这个加法运算下 $\varinjlim_{U\in S} \mathcal{F}(U)$ 成为 Abel 群. 更进一步, 下面的命题说明 $\varinjlim_{U\in S} \mathcal{F}(U)$(在同构意义下) 不依赖于 S 的选取.

命题 1.4.1 *设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层. 设 S_1 和 S_2 均为点 $x \in X$ 的一些开邻域形成的满足条件 (1.4–1) 的集合. 则有 Abel 群同构:*

$$\varinjlim_{U\in S_1} \mathcal{F}(U) \simeq \varinjlim_{U\in S_2} \mathcal{F}(U).$$

证明 对 $U \in S_1$, 以及 $s \in \mathcal{F}(U)$, 由于 S_2 满足条件 (1.4–1), 可以找到 $V \in S_2$, 使得 $V \subset U$. 可以验证 $\bar{s} \mapsto \overline{s \mid_V}$ 是一个良好定义的从 $\varinjlim_{U\in S_1} \mathcal{F}(U)$ 到 $\varinjlim_{U\in S_2} \mathcal{F}(U)$ 的群同态. 同理可以构造反方向的同态并验证这两个同态互逆. □

设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的预层. 对 $x \in X$, 定义

$$\mathcal{F}_x \coloneqq \varinjlim_{U\in S} \mathcal{F}(U).$$

其中 S 为 x 的所有开邻域形成的集合. 这样得到的 Abel 群 $\mathcal{F}_x$ 称为 $\mathcal{F}$ 在 x 处的**茎**.

由命题 1.4.1, 可以将 S 换作任意一个满足条件 (1.4–1) 的集合来计算茎. 设 U 为 X 的开集, $x \in U$. 截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ 在自然的商映射 $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ 下的像记作 s_x, 称为 s 在 x 处的**芽**. 容易验证, 自然的商映射 $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ 为群同态.

命题 1.4.2 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的层. 设 U 为 X 的开子集, $s \in \mathcal{F}(U)$ 为一个截面. 如果 $\forall\, x \in U,\ s_x = 0$, 则 $s = 0$.

证明 由 $s_x = 0$ 的定义, 存在 x 的开邻域 U_x, 使得 $U_x \subset U$, 并且 $s\,|_{U_x} = 0$. 由于 U_x $(x \in U)$ 形成 U 的一个开覆盖, 由层的定义得到 $s = 0$. □

设 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个开集基. 很多情况下我们只能对层 $\mathcal{F}$ 在 $U \in \mathcal{B}$ 上的截面有比较具体的描述. 为了更方便的使用层, 我们引入如下开集基上预层和层的概念.

定义 1.4.3 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为 X 的一个开集基. X 上的一个 (Abel 群)$\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$ 是指满足下列条件的一个结构:

(i) 对每个开集 $U \in \mathcal{B}$, 指定一个 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$, 并且 $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

(ii) (限制同态) 对任意两个满足 $V \subset U$ 的开集 $U, V \in \mathcal{B}$, 指定一个群同态 $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$, 并且 $\rho_{UU} = \mathrm{id}$.

(iii) (相容性) 对任意三个满足 $W \subset V \subset U$ 的开集 $W, V, U \in \mathcal{B}$, 有 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

定义 1.4.4 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个开集基. X 上的一个 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$ 称为 $\mathcal{B}$-层, 如果其满足如下粘合条件:

(1) 对任意 $U \in \mathcal{B}$, 对 U 的任意满足 $U_i \in \mathcal{B}$ 的开覆盖 U_i $(i \in I)$, 如果 $s \in \mathcal{F}(U)$ 满足 $s\,|_{U_i} = 0,\ \forall\, i \in I$, 那么 $s = 0$.

(2) 对任意 $U \in \mathcal{B}$, 对 U 的任意满足 $U_i \in \mathcal{B}$ 的开覆盖 U_i $(i \in I)$, 如果对每个 $i \in I$, 给定 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, 满足相容性条件: $\forall\, i, j \in I$, 对任意 $\mathcal{B}$ 中满足 $V \subset U_i \cap U_j$ 的元素 V, 均有 $s_i\,|_V = s_j\,|_V$, 那么存在 $s \in \mathcal{F}(U)$, 使得 $s\,|_{U_i} = s_i,\ \forall\, i \in I$.

注记 1.4.1 不难验证, 如果开集基 $\mathcal{B}$ 中任意两个开集的交还在 $\mathcal{B}$ 中, 则 $\mathcal{B}$-层定义中的相容性条件可以改为 $s_i\,|_{U_i \cap U_j} = s_j\,|_{U_i \cap U_j}$, 而得到等价的定义.

由定义可以看出, 任何预层 (层) 只看 $\mathcal{B}$ 中元素上的截面就得到 $\mathcal{B}$-预层 ($\mathcal{B}$-层). 反之, 可以证明任何 $\mathcal{B}$-层也可以 (同构意义上) 唯一地扩张为层. 由于我们后面并不需要这个结论, 故省略详细证明, 有兴趣的读者可以自行查阅相关资料 (如 [12, §I.1.3]).

对于 $\mathcal{B}$-预层而言, 同样也有茎和芽的概念. 具体而言, 对 X 上的一个 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$, 对 $x \in X$, 定义:

$$\mathcal{F}_x \coloneqq \varinjlim_{U \in S} \mathcal{F}(U).$$

其中 S 为 x 的所有在 $\mathcal{B}$ 中的开邻域形成的集合. 这样得到的 Abel 群 $\mathcal{F}_x$ 称为 $\mathcal{F}$ 在 x 处的茎. 同样由命题 1.4.1, 可以将 S 换作任意一个满足条件 (1.4–1) 的 x 的开邻域形成的 $\mathcal{B}$ 的子集来计算茎. 设 $U \in \mathcal{B}$, $x \in U$, 截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ 在商同态 $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ 下的像记作 s_x, 称为 s 在 x 处的芽.

与命题 1.4.2 的证明类似, 我们有如下命题.

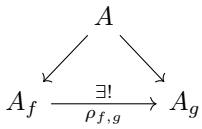
命题 1.4.3 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的 $\mathcal{B}$-层. 设 $U \in \mathcal{B}$, $s \in \mathcal{F}(U)$. 如果 $\forall\, x \in U$, $s_x = 0$, 则 $s = 0$.

1.4.2 环看作 $\mathcal{B}$-层

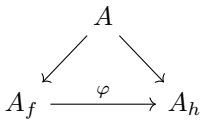
设 A 为环, 在 $X = \operatorname{Spec} A$ 上赋予 Zariski 拓扑. 令

$$\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$$

为主开集形成的开集基. 由于我们将 A_f 看作 $D(f)$ 上的 "函数" 环, 自然希望这些环形成 X 上的一个 $\mathcal{B}$-层. 为了实现这个想法, 首先定义 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{O}_X$. 对 $f, g \in A$, 如果 $D(g) \subset D(f)$, 易验证 f 为 A_g 中的可逆元, 从而由局部化的万有性质 (命题 1.3.1), 存在唯一的环同态 $\rho_{f,g}$ 使得下图交换:



设 $D(h) \subset D(g) \subset D(f)$, 则在下图中令 φ 为 $\rho_{f,h}$ 或 $\rho_{g,h} \circ \rho_{f,g}$ 均使其成为交换图



这样由唯一性得到 $\rho_{f,h} = \rho_{g,h} \circ \rho_{f,g}$. 特别地, 如果 $D(f) = D(g)$, 则 $\rho_{f,g}$ 给出了 A_f 和 A_g 的同构, 我们利用这个同构将 A_f 等同到 A_g. 则对 $D(f) \in \mathcal{B}$, 令 $\mathcal{O}_X(D(f)) \coloneqq A_f$, 对 $D(g) \subset D(f)$, 令 $\rho_{D(f),D(g)} \coloneqq \rho_{f,g}$, 就得到一个良好定义的 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{O}_X$. 事实上, 我们有如下更强的性质.

命题 1.4.4 上面定义的 $\mathcal{O}_X$ 是一个 $\mathcal{B}$-层.

证明 由于 $\operatorname{Spec} A_f \simeq D(f)$, 我们只需考虑全空间 X 的开覆盖即可. 首先考虑有限覆盖的情形. 设 $X = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ 为开覆盖. 我们分别验证 $\mathcal{B}$-层定义中的两条.

(1) 设 $s \in \mathcal{O}_X(X) = A$, 并且 $s\,|_{D(f_i)} = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$. 由 s 在 A_{f_i} 中为 0 知存在 $N_i \geq 1$, 使得 $s f_i^{N_i} = 0$. 取 $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, 则 $s f_i^N = 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$. 由 $X = \bigcup_{i=1}^n D(f_i^N)$ 及命题 1.2.4, 存在 $c_i \in A$, 使得 $c_1 f_1^N + \ldots c_n f_n^N = 1$. 故 $s = c_1 s f_1^N + \ldots c_n s f_n^N = 0$.

(2) 设对每个 i, 给定 $s_i \in \mathcal{O}_X(D(f_i)) = A_{f_i}$, 满足 $\forall\, i, j$, 在 $\mathcal{O}_X(D(f_i) \cap D(f_j)) = A_{f_i f_j}$ 中成立 $s_i\,|_{D(f_i)\cap D(f_j)} = s_j\,|_{D(f_i)\cap D(f_j)}$. 设 $s_i = \frac{g_i}{f_i^{a_i}}$, $g_i \in A$, $a_i \geq 0$. 则

$s_i\mid_{D(f_i)\cap D(f_j)}=s_j\mid_{D(f_i)\cap D(f_j)}$ 等价于存在 $a_{ij}\geq 0$, 使得在 A 中成立

$$(g_if_j^{a_j}-g_jf_i^{a_i})(f_if_j)^{a_{ij}}=0.$$

取 $N=\max\{a_{ij}\mid 1\leq i,j\leq n\}$. 令 $b_i=a_i+N$, $h_i=g_if_i^N$. 则 $s_i=\frac{g_i}{f_i^{a_i}}=\frac{h_i}{f_i^{b_i}}$. 并且对每个 i,j, 有 $h_if_j^{b_j}=h_jf_i^{b_i}$. 由 $X=\bigcup_{i=1}^n D(f_i^{b_i})$ 及 命题 1.2.4, 存在 $c_i\in A$, 使得 $c_1f_1^{b_1}+\ldots c_nf_n^{b_n}=1$. 令 $s:=c_1h_1+\ldots c_nh_n\in A=\mathcal{O}_X(X)$. 直接验证可得对每个 i, 有 s 在 A_{f_i} 中与 $\frac{h_i}{f_i^{b_i}}$ 相等, 即 $s\mid_{D(f_i)}=s_i$. 这样就证明了有限开覆盖的情形.

设 $X=\bigcup_{i\in I}D(f_i)$ 是 $X=\operatorname{Spec}A$ 的一个主开集形成的任意开覆盖. 由 X 的拟紧性. 可以找到有限个 $i_1,\ldots,i_n\in I$, 使得 $D(f_{i_1}),\ldots,D(f_{i_n})$ 为 X 的开覆盖. 假设 $s\in\mathcal{O}_X(X)$ 满足 $s\mid_{D(f_i)}=0,\ \forall\, i\in I$, 则 s 限制在每个 $D(f_{i_k})$ 上为 $0,\forall\, k=1,\ldots,n$. 由上面已证的关于有限覆盖的情形即知 $s=0$. 特别地, 这也说明给定局部截面粘合得到的整体截面至多有一个. 假设对每个 $i\in I$, 给定 $s_i\in\mathcal{O}_X(D(f_i))$, 并且满足 $\forall\, i,j\in I$, 有 $s_i\mid_{D(f_i)\cap D(f_j)}=s_j\mid_{D(f_i)\cap D(f_j)}$. 由上面已证的有限覆盖情形, 存在 $s\in\mathcal{O}_X(X)$, 使得对每个 $k=1,\ldots,n$, 均有 $s\mid_{D(f_{i_k})}=s_{i_k}$. 对任意 $j\in I$, 注意到 $D(f_{i_k})\cap D(f_j)$ $(k=1,\ldots,n)$ 为 $D(f_j)\simeq\operatorname{Spec}A_{f_j}$ 的一个主开集形成的有限覆盖. 由于 $s\mid_{D(f_j)}$ 和 s_j 在每个 $D(f_{i_k})\cap D(f_j)$ 上的限制都相等 $(k=1,\ldots,n)$, 从而由粘合得到的截面至多有一个知 $s\mid_{D(f_j)}=s_j$. 这就验证了 $\mathcal{O}_X$ 确实为一个 $\mathcal{B}$-层. □

注记 1.4.2 命题 6.2.3 将给出 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}A}$ 为 $\mathcal{B}$-层的更加概念性的证明. 见注记 6.2.1.

命题 1.4.5 设 $P\in X=\operatorname{Spec}A$, 则 $\mathcal{O}_{X,P}\simeq A_P$.

证明 利用局部化 A_P 的万有性质, 同态 $A\longrightarrow\mathcal{O}_{X,P}$, $s\longmapsto s_P$ 诱导了环同态 $A_P\longrightarrow\mathcal{O}_{X,P}$. 直接验证这是一个既单又满的映射即可. □

由这个将 A_P 解释为茎的看法, 命题 1.3.13 成为命题 1.4.3 在 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}A}$ 情形的推论.

1.4.3 中国剩余定理

利用 $\mathcal{B}$-层的看法, 可以将 A 中的元素看作 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}A}$ 的整体截面. 从而可以利用粘合局部截面的方法来证明 A 中某些元素的存在性. 本节我们利用这个看法证明一些命题.

命题 1.4.6 设 A 为环. 设 Z 为 $\operatorname{Spec}A$ 的既开又闭的子集. 则 Z 为主开集.

证明 令 $W=Z^c$ 为 Z 的补集. 则 Z 和 W 均为既开又闭的子集. 我们希望能构造 A 中的一个元素 f, 使其在 Z 上取值恒为 1, 而在 W 上取值恒为 0. 为此, 取 Z 的开覆盖 $Z=\bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ 和 W 的开覆盖 $W=\bigcup_{j=1}^m D(g_j)$ (覆盖的有限性由 Z 和 W 均为拟紧空间得到), 则 $D(f_i)\bigcap D(g_j)=\varnothing,\ \forall\, i=1,\ldots,n,\ \forall\, j=1,\ldots,m$. 取 $s_i:=1\in\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}A}(D(f_i))$ 以及 $s_j:=0\in\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}A}(D(g_j))$, 则这些局部截面显然满足粘合条件, 从而粘合为一个整体截面 $f\in A$. 由此得到 $Z=D(f)$ 为主开集. □

由维数的定义, 一个环 A 为零维环当且仅当 A 的每个素理想均为极大理想.

命题 1.4.7 设 A 为零维环, 并且 $\operatorname{Spec} A = \{P_1, \ldots, P_n\}$ 为有限集. 则有环同构:

$$A \simeq A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_n}.$$

证明 由条件知每个 P_i 均为 $\operatorname{Spec} A$ 的既开又闭的子集. 从而由命题 1.4.6 知每个 P_i 均为主开集. 这样由 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 为 $\mathcal{B}$-层, 得到限制同态诱导的环同态

$$\begin{aligned} A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) &\longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(P_i) \\ s &\longmapsto (s\mid_{P_i}) \end{aligned}$$

为同构. 由点 P_i 本身也为主开集知 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(P_i) \simeq \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, P_i} \simeq A_{P_i}$. 故得

$$A \simeq A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_n}.$$

□

定理 1.4.1 (中国剩余定理) 设 $I_1, \ldots, I_n$ 为环 A 的两两互素的理想. 这里两两互素是指对任意 $i \neq j$, 有 $I_i + I_j = A$. 则有环同构:

$$\frac{A}{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \simeq \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n}.$$

证明 通过考虑商环 $\frac{A}{I_1 \cap \cdots \cap I_n}$, 不妨假设 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = 0$. 令 $Z_i = V(I_i)$. 则 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = 0$ 蕴含 $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$. 又可验证 $I_i + I_j = A$ 蕴含 $Z_i \bigcap Z_j = \varnothing$. 故 $Z_1, \ldots, Z_n$ 为两两不交的既开又闭的子集, 从而由命题 1.4.6 均为主开集. 令 $A_i = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(Z_i)$, 则由 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ 为 $\mathcal{B}$-层知限制同态诱导了环同构 $A \simeq A_1 \times \cdots \times A_n$. 进而又得到 $A_i \simeq A/J_i$, 其中 $J_i = \{f \in A : f\mid_{Z_i} = 0\}$. 对 $j \neq i$, 设 $a \in I_i$, $b \in I_j$ 使得 $a + b = 1$. 容易看到 $\forall\, P \in Z_i$, 有 $b(P) = 1 \neq 0$, 故 $b \in A_P^*$, 特别地, $I_j A_P = A_P$. 进而得到 $\forall\, P \in Z_i$, $0 = (I_1 \cap \cdots \cap I_n)A_P = (I_1 A_P) \cap \cdots \cap (I_n A_P) = I_i A_P$. 这说明 $I_i \subset J_i$. 设 $f \in J_i$, 由 $f\mid_{Z_i} = 0$ 知 $\forall\, P \in Z_i = V(I_i)$, 有 f 在 A_P 中为 0, 从而在 $(A/I_i)_P$ 中为 0. 由于 P 遍历 $\operatorname{Spec} A/I_i \simeq Z_i$, 根据命题 1.3.13 得到 f 在 A/I_i 中为 0, 故 $f \in I_i$. 这样得到反向包含 $J_i \subset I_i$. 从而 $J_i = I_i$, 即得 $A_i \simeq A/I_i$. □

1.5 Noether 环

回忆一个环 A 称为 Noether 环, 如果 A 的任意理想升链均在有限步稳定, 这也等价于 A 的理想形成的任意非空集合均有极大元, 同时又等价于 A 的任意理想都是有限生成的. 熟知若 A 为 Noether 环, 则 A 的商环 A/I 以及多项式环 $A[x]$ 均为 Noether 环 (Hilbert 基定理). 下面的命题说明局部化也保持 Noether 性.

命题 1.5.1 设 A 为 Noether 环, S 为 A 的乘法子集, 则局部化 A_S 也为 Noether 环.

证明 任取 A_S 的理想 J, 令 $I = J \bigcap A$, 容易验证 $J = IA_S$. 从而由 I 为有限生成知 J 为有限生成. □

下面分析 $\operatorname{Spec} A$ 在 A 是 Noether 环时的特点.

命题 1.5.2 设 A 为 Noether 环, 则 $\operatorname{Spec} A$ 是 Noether 空间, 即 $\operatorname{Spec} A$ 的任意闭子集降链均在有限步之后稳定, 或者等价地, $\operatorname{Spec} A$ 的任意非空的由闭子集形成的集合均有极小元.

证明 由闭子集与根式理想的对应 (命题 1.3.11), $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集降链对应于 A 的理想升链. 从而由 A 为 Noether 环即得结论. □

推论 1.5.1 设 A 为 Noether 环, U 为 $\operatorname{Spec} A$ 的开子集, 则 U 是拟紧空间.

证明 设 $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ 为 U 的开覆盖. 考虑如下 $X \coloneqq \operatorname{Spec} A$ 的闭子集形成的非空集合:

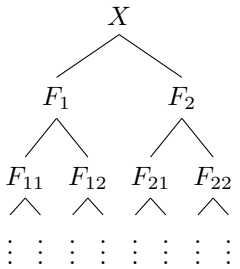
$$S \coloneqq \left\{ X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \mid i_1, \ldots, i_n \in I, n \geq 1 \right\}.$$

由命题 1.5.2, S 存在极小元 $F = X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}$. 对任意 $x \in U$, 设 $x \in U_i$, $i \in I$, 则 $F \setminus U_i \in S$, 从而由 F 的极小性知 $F \setminus U_i = F$. 这样得到 $F = X \setminus U$. 由此即知 $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{i_j}$. □

命题 1.5.3 (不可约分解) 设 A 为 Noether 环. 则 $\operatorname{Spec} A$ 可以写为有限个不可约闭子集的并.

证明 令 $X = \operatorname{Spec} A$. 如果 X 本身不可约, 则结论显然成立. 如果 X 可约, 则有分解 $X = F_1 \bigcup F_2$, 并且 F_1, F_2 均为 X 的真闭子集. 若 F_1 和 F_2 均不可约, 则结论成立. 反之, 不妨设 F_1 可约, 则可以将其分解为两个真闭子集的并 $F_1 = F_{11} \bigcup F_{12}$, 继续讨论 F_{ij} 的可约性. 如果以上讨论过程在有限步不能终止, 那么可以找到 X 的一个无限长的闭子集降链, 并且其在有限步不能稳定住. 这将与 X 为 Noether 空间矛盾. 故上面的

讨论在有限步终止, 从而 X 可写为有限个不可约闭子集的并. 这个讨论过程可以表示为如下二叉树图表:



我们也可以更形式化地进行如下论证: 考虑如下集合

$$S := \{F \mid F \text{ 为}X \text{ 的非空闭子集, 并且}F \text{ 不能写为有限个不可约闭子集的并.}\}$$

下面证明 S 为空集. 假设 S 非空, 由 X 为 Noether 空间知 S 存在一个极小元 F. 由于 $F \in S$, 知 F 一定可约. 设 $F = F_1 \bigcup F_2$, 并且 $F_i (i = 1, 2)$ 为 F 的真闭子集. 由 F 的极小性知 F_i 不在 S 中, 从而可写为有限个不可约闭子集的并. 从而 F 也可写为有限个不可约闭子集的并. 这与 $F \in S$ 矛盾! 故 S 为空集. 这样 $X \notin S$, 从而结论得证.□

对 Noether 环 A, 由命题 1.5.3 知存在分解 $\operatorname{Spec} A = F_1 \bigcup \cdots \bigcup F_n$, 使得 F_i 均为不可约闭子集, 并且 F_i 之间没有包含关系. 我们称这样的分解为 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分解, 每个 F_i 称为 $\operatorname{Spec} A$ 的**不可约分支**. 由维数的定义可以看到 $\dim A = \max\limits_{1 \le i \le n} \dim F_i$. 对 $\operatorname{Spec} A$ 的任意不可约闭子集 F, 由 $F = (F \bigcap F_1) \bigcup \ldots (F \bigcap F_n)$ 以及 F 的不可约性知存在某个 i, 使得 $F = F \bigcap F_i$, 从而 $F \subset F_i$. 由此不难看到 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分解在不计顺序的情况下是唯一的. 设 $W = V(I)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的任意闭子集, 由同胚 $V(I) \simeq \operatorname{Spec}(A/I)$ 以及 A/I 也为 Noether 环, 知 W 也存在不可约分解 $W = W_1 \cup \ldots W_m$, 使得 W_i 互不包含. 这些 W_i 称为 W 的不可约分支.

对任意交换环 A, 由 Zorn 引理, 不难看到 A 一定存在极小素理想, 但极小素理想的个数不一定有限. 而下面的性质说明在 Noether 环时可以得到极小素理想的有限性.

命题 1.5.4 *设 A 为 Noether 环, 则 A 的极小素理想只有有限个.*

证明 由命题 1.3.11 和命题 1.3.12, A 的极小素理想一一对应到 $\operatorname{Spec} A$ 的极大不可约闭子集, 又一一对应到 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分支, 从而由命题 1.5.3 得到有限性. □

习题

1. 本习题从关系生成的等价关系角度来考察局部化定义中的等价关系. 集合 X 上的一个关系是指 $X \times X$ 的一个子集 R. 关系 R 称为等价关系, 如果其满足

(i) (自反性) $\forall\, x \in X$, $(x,x) \in R$.

(ii) (对称性) $\forall\, x,y \in X$, $(x,y) \in R \implies (y,x) \in R$.

(iii) (传递性) $\forall\, x,y,z \in X$, $(x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in R \implies (x,z) \in R$.

证明:

(1) 对 X 上的任一关系 R, 必存在最小的包含 R 的等价关系 $\tilde{R}$. 这称为 R 生成的等价关系.

(2) 设 A 为环, S 为 A 的乘法子集. 令 $X = A \times S$. 定义 X 上的如下关系 $R \subset X \times X$: $((a,s_1),(b,s_2)) \in R \iff as_2 = bs_1$. 则 R 生成的等价关系 $\tilde{R}$ 满足: $((a,s_1),(b,s_2)) \in \tilde{R} \iff \exists\, s \in S$, 使得 $(as_2 - bs_1)s = 0$.

2. 设 A 为环, $P \in \operatorname{Spec} A$. 证明点 P 的闭包为 $V(P)$. 特别地, P 为闭点 $\iff$ P 为极大理想.

3. 证明命题 1.3.13 与命题 1.3.14 可以加强为只考虑极大理想, 即:

(i) 设 A 为环, $f \in A$. 则 $f = 0 \iff$ 对 A 的每个极大理想 m, 均有 f 在 A_m 中为 0.

(ii) 设 A 为整环. 对每个 A 的极大理想 m, 通过自然的单同态将 A_m 看作 $\operatorname{Frac}(A)$ 的子环. 则 $A = \bigcap_m A_m$. 其中 m 遍历 A 的极大理想.

4. 设 I,J 均为环 A 的理想. 证明 $I = J \iff$ 对每个素理想 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均有 $IA_P = JA_P$ 在 A_P 中成立.

5. 设 I,J 均为环 A 的理想, 并且 $I + J = A$. 证明 $I \bigcap J = IJ$.

6. 设 A 为环, $f \in A$. 证明 $f \in A^* \iff \forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, $f \in A_P^* \iff \forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, $f(P) \neq 0$.

7. 设 A 为环. 证明 A 可写为两个子环的乘积 $\iff \operatorname{Spec} A$ 不连通 (即 $\operatorname{Spec} A$ 可写为两个互不相交开子集的并).

8. 设 A 为环, 证明 A 为整环 $\iff$ A 为约化环, 并且 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的.

9. 设 A 为 Noether 环, 并且对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 局部化 A_P 均为整环. 证明 A 为有限个整环的乘积.

10. 设 A 为环, 证明 $A/\sqrt{(0)}$ 为约化环, 并且 $\operatorname{Spec}(A/\sqrt{(0)})$ 与 $\operatorname{Spec} A$ 同胚.

11. 设 A 为环. 证明 $\operatorname{Spec} A$ 是不可约的 $\iff$ $\sqrt{(0)}$ 是 A 的素理想.

12. 设 $I_1, I_2, \ldots$ 为环 A 中的无限个理想, 是否总有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} V(I_i) = V(\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i)$?

13. 设 I, J 为环 A 的理想, 证明

(i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(ii) 对任意 $n \geq 1$, $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$.

(iii) $\sqrt{I \bigcap J} = \sqrt{I} \bigcap \sqrt{J}$.

(iv) 若 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 $\sqrt{P} = P$.

14. 对如下环 A 中理想 I, 计算 $\sqrt{I}$:

(i) $A = \mathbb{Z}$, $I = (12)$

(ii) $A = \mathbb{C}[x,y]$, $I = (x, y^4)$.

15. 设 A 为 Noether 环, $X = \operatorname{Spec} A$. 我们称 X 的一个子集 Z 为局部闭子集, 如果对任意 $x \in Z$, 存在 x 在 X 中的开邻域 U, 使得 $Z \cap U$ 为 U 的闭子集. 称 X 的子集 W 为**可构造子集**, 如果 W 可以写为有限个局部闭子集的并.

(i) 证明: X 的子集 Z 为局部闭子集 $\iff$ 存在 X 的开子集 U 和 X 的闭子集 F, 使得 $Z = U \cap F$.

(ii) 在欧式空间 $\mathbb{R}^2$ 中举出一个不是局部闭子集的可构造子集的例子.

(iii) 证明可构造子集的有限交, 有限并和补集均为可构造子集.

(iv) 设 W 为 X 的子集. 证明 W 为 X 的可构造子集 $\iff$ 存在 X 的闭子集形成的有限降链 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} = \varnothing$, 以及 $F_i \setminus F_{i+1}$ 的稠密开子集 U_i, $i = 1, \ldots, n$, 使得 $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

(v) 设 W 为 X 的可构造子集. 证明 W 包含其闭包 $\overline{W}$ 的一个稠密开子集.

(vi) 设 W 为 X 的非空子集. 证明 W 为 X 的可构造子集 $\iff \forall\, x \in W$, W 包含 $\{x\}$ 在 X 中的闭包 $\overline{\{x\}}$ 的一个非空开子集.

(vii) 设 W 为 X 的可构造子集. 证明 W 为 X 的开子集 $\iff \forall\, Q \in W$, 对任意满足 $P \subset Q$ 的 A 的素理想 P, 均有 $P \in W$.

16. 设 G 为 $GL_n(\mathbb{C})$ 的有限子群. 对 $g \in G$, 对 $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, 令 $gf \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 为如下多项式: $(gf)(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq f((x_1, \ldots, x_n)g^{-1})$. 其中 $(x_1, \ldots, x_n)g^{-1}$ 为行向量与 n 阶方阵的乘法. 这样给出了 G 在 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的作用. 令

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \coloneqq \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid gf = f,\ \forall\, g \in G\}$$

为所有 G-不变多项式形成的 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 的子代数. 本习题的目标是通过以下步骤证明 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数, 即存在有限个元素 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$, 使得 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G = \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_m]$.

(i) 记 I 为 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 中的正次数齐次多项式在 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中生成的理想. 证明: 存在正次数齐次多项式 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$, 使得 $I = (f_1, \ldots, f_k)$.

(ii) 证明: 任取正次数齐次多项式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$, 存在齐次多项式 $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, 使得 $f = h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k$.

(iii) 证明: 任取正次数齐次多项式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$, 存在齐次多项式 $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$, 使得 $f = h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k$.

(iv) 证明 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数.

注记 1.5.1 上述定理和证明是 Hilbert 给出的. Hilbert 基定理也是在证明这个定理的过程中提出的. 关于其更多的背景和历史, 可见 [19, Introduction]. 更一般的结论为命题 3.7.2.

习题提示

9. A_P 为整环 $\Longrightarrow$ 过 P 点只有一个不可约分支. 由 P 的任意性可知 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分支互不相交, 从而不可约分支都是连通分支.

15. (iv): 设 $W = \bigcup_{i=1}^{n}(Z_i \cap Y_i)$, 并且 Z_i 为不可约闭子集, Y_i 为开子集. 不妨设 $Z_1, \dots, Z_m$ $(m \leq n)$ 为 $F_1 \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ 的所有不可约分支, 则对每个 $1 \leq i \leq m$, 存在 Z_i 的非空开子集 V_i, 使得 $V_i \subset W$, 并且 $V_i \cap Z_j = \varnothing$, $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq m$. 令 $U_1 = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, 则 $F_1 \setminus U_1$ 为 X 的闭子集, 并且 $W_1 \coloneqq W \setminus U_1$ 包含在 $F_1 \setminus U_1$ 中. 将上面对 W 的讨论应用到 W_1 上, 可以继续得到 F_2, U_2, W_2. 不断进行下去, 利用 Noether 性可知有限步之后这个过程终止, 即对某个 N 有 $W_N = \varnothing$.

(vi): $\Longleftarrow$: 考虑 $\overline{W}$ 的不可约分解, 与 (iv) 的证明类似, 构造一系列递降的闭集.

(vii): $\Longleftarrow$: 考虑 U 的补集. 证明 $\overline{X \setminus U} = X \setminus U$.

16. (i): 利用 Hilbert 基定理.

(iii): 设 $f = h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k$ 并且 f, f_i $(1 \leq i \leq k)$ 均为 G-不变多项式. 对任意 $g \in G$, 通过 g 的作用得到

$$f = gf = (gh_1)(gf_1) + \cdots + (gh_k)(gf_k) = (gh_1)f_1 + \cdots + (gh_k)f_k.$$

再取平均得到

$$f = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gf = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gh_1)f_1 + \cdots + \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gh_k)f_k.$$

而每个 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gh_i)$ 均为 G-不变多项式.

第二章 模及其局部化

模的概念比环更广, 很多熟知的结构都可以看作模, 如理想, 线性空间, 代数等. 而模的各种构造更加方便, 从而为我们处理很多代数对象提供了更具有弹性的结构.

2.1 基本概念与基本构造

定义 2.1.1 设 A 为环. 一个 A-**模** M 是指 M 为一个 Abel 群, 同时带一个 A 的作用

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

满足如下条件:

(i) $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2, \ \forall\, a \in A, \ \forall\, x_1, x_2 \in M,$
(ii) $(a_1 + a_2)x = a_1x + a_2x, \ \forall\, a_1, a_2 \in A, \ \forall\, x \in M,$
(iii) $(a_1a_2)x = a_1(a_2x), \ \forall\, a_1, a_2 \in A, \ \forall\, x \in M.$
(iv) $1x = x, \ \forall\, x \in M.$

不难看到, M 为 A-模也等价于 M 为一个 Abel 群, 同时指定了一个环同态 $A \longrightarrow \mathrm{End}(M)$. 其中 $\mathrm{End}(M)$ 是指 M 作为 Abel 群的自同态环.

例 2.1.1

- 环 A 本身在乘法下可以看成 A-模. 更一般地, A 的理想均为 A-模.
- 设 B 为 A-代数, 则通过结构同态, A 可以作用到 B 上, 使得 B 成为 A-模. 一般地, 任何 B-模 M 均可用类似的方式看成 A-模.

- 设 V 为 k-线性空间, $\varphi \in \mathrm{End}_k(V)$ 为 V 上的 k-线性变换, 则通过定义作用 $f(x)v \coloneqq f(\varphi)(v)$, 可以将 V 看成 $k[x]$-模.

设 M, N 均为 A-模, 其作为 Abel 群的直和 $M \bigoplus N$ 在 A 的如下作用下也成为 A-模:

$$a(x_1, x_2) \coloneqq (ax_1, ax_2),\ a \in A,\ x_1 \in M,\ x_2 \in N.$$

A-模 M 的一个子 Abel 群 N 称为子模, 如果 $ax \in N,\ \forall\, a \in A, x \in N$. 对 M 的子模 N, 商群 M/N 也是一个 A-模, 其中 A 的作用为 $a\bar{x} \coloneqq \overline{ax}$. 我们称 M/N 为商模. 设 N, K 均为 M 的子模, 则 $N + K \coloneqq \{x + y \mid x \in N,\ y \in K\}$ 也为 M 的子模.

对 A-模 M, 对 $x \in M$, $Ax \coloneqq \{ax \mid a \in A\}$ 为 M 的子模, 称为 x 生成的子模. 一组元素 $x_1, \ldots, x_n$ 称为 M 的生成元, 如果 $M = \sum_{i=1}^n Ax_i$. 如果 M 存在有限个元素作为生成元, 则 M 称为**有限生成 A-模**或**有限 A-模**.

A-模 M 的一个子集 S 称为一组基, 如果其满足如下两个条件:

(i) S 为生成元, 即 $\forall\, x \in M$, 存在有限个元素 $x_1, \ldots, x_n \in S$, 存在 $a_1, \ldots, a_n \in A$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

(ii) S 线性无关, 即对任意有限个 S 中的元素 $x_1, \ldots, x_n$, 对任意 $a_1, \ldots, a_n \in A$, 如果 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, 则 $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

与线性空间不同, 并不是所有 A-模均存在基, 比如 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模就没有基. 如果 A-模 M 存在一组基, 则称 M 为一个自由 A-模.

命题 2.1.1 (自由模的万有性质) *设 M 为自由 A-模, S 为一组基. 则对任意 A-模 N, 对任意映射 $f\colon S \longrightarrow N$, 均存在唯一的 A-模同态 $\varphi\colon M \longrightarrow N$, 使得 $\varphi|_S = f$.*

证明 由自由模的定义, 对任意 $x \in M$, 存在 S 中的元素 $x_1, \ldots, x_n$, 以及 A 中的元素 $a_1, \ldots, a_n$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, 并且这样的表达式是唯一的. 令 $\varphi(x) \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$, 即得到所求的模同态. 唯一性直接验证即可. □

下面的命题说明自由模的基所包含的元素个数与基的选取无关, 这是线性空间中类似命题的一个推广, 其证明也与线性空间情形相同. 另一个证明可见命题 2.2.3.

命题 2.1.2 *设 M 为自由 A-模. 设 $e_1, \ldots, e_n \in M$ 和 $f_1, \ldots, f_m \in M$ 均为 M 的基. 则 $n = m$.*

证明 如果 $n \neq m$, 不妨设 $n > m$. 由基的定义, 存在系数在 A 中的 $m \times n$ 矩阵 $P \in M_{m\times n}(A)$ 和 $n \times m$ 矩阵 $Q \in M_{n\times m}(A)$, 使得有如下等式:

$$(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_m)P,$$
$$(f_1, \ldots, f_m) = (e_1, \ldots, e_n)Q.$$

由此得到 $(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n)QP$. 因为 $e_1, \ldots, e_n$ 是 A-线性无关的, 我们得到

$QP = \mathrm{I}_n$ 为单位方阵. 取行列式得到 $\det(QP) = \det \mathrm{I}_n = 1$. 由 Q 和 P 的形状 (Q 的行数大于列数, P 的列数大于行数), 利用下面的引理 2.1.1, 可以看到 $\det(QP) = 0$. 这个矛盾说明 $n = m$. □

引理 2.1.1 设 A 为环, P 为 A 上的 $m \times n$ 矩阵, Q 为 A 上的 $n \times m$ 矩阵, 并且 $n > m$, 则 $\det(QP) = 0$.

证明 设 $P = (a_{ij})$, $Q = (b_{kl})$. 考虑整系数多项式环

$$B \coloneqq \mathbb{Z}[x_{ij}, y_{kl} \mid 1 \leq i, l \leq m, 1 \leq j, k \leq n].$$

定义 B 上的 $m \times n$ 矩阵 $\tilde{P} = (x_{ij})$, 以及 $n \times m$ 矩阵 $\tilde{Q} = (y_{kl})$. 将 $\tilde{P}$ 和 $\tilde{Q}$ 看作 B 的分式域 $\mathrm{Frac}(B)$ 上的矩阵, 由域上矩阵的性质, 知 $\det(\tilde{Q}\tilde{P}) = 0$. 由于 B 为整环, $B \hookrightarrow \mathrm{Frac}(B)$ 为单同态, 故在 B 上也有等式 $\det(\tilde{Q}\tilde{P}) = 0$. 考虑环同态:

$$\begin{aligned} \varphi \colon B &\longrightarrow A \\ x_{ij} &\longmapsto a_{ij} \\ y_{kl} &\longmapsto b_{kl} \end{aligned}$$

容易看到有 $\det(QP) = \varphi(\det(\tilde{Q}\tilde{P})) = 0$. □

对存在有限个元素 $e_1, \ldots, e_n$ 作为基的自由 A-模 M, 我们称基中元素的个数 n 为 M 的**秩**, 记为 $\mathrm{rank}(M)$. 由上面的命题 2.1.2, $\mathrm{rank}(M)$ 不依赖于基的选取.

两个 A-模 M 和 N 之间的一个 A-**模同态**是指一个映射 $\varphi \colon M \longrightarrow N$, 使得 φ 为 Abel 群同态, 并且 $\varphi(ax) = a\varphi(x)$, $\forall\, a \in A$, $x \in M$. 我们用 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 表示所有 M 到 N 的 A-模同态形成的集合, 我们总是赋予其在以下加法和 A 作用下的 A-模结构:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(x) &\coloneqq \varphi_1(x) + \varphi_2(x),\ \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_A(M, N), \forall\, x \in M, \\ (a\varphi)(x) &\coloneqq a\varphi(x),\ \forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N), \forall\, a \in A, x \in M. \end{aligned}$$

对 A-模同态 $\varphi \colon M \longrightarrow N$, 其核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 为 M 的子模, 像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 为 N 的子模, 余核 $\mathrm{Coker}\,\varphi = N/\mathrm{Im}\,\varphi$ 为 N 的商模.

定理 2.1.1 (同态基本定理) 设 $\varphi \colon M \longrightarrow N$ 为 A-模的满同态, 则 φ 诱导了如下 A-模同构:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\mathrm{Ker}\,\varphi} &\xrightarrow{\sim} N \\ \bar{x} &\longmapsto \overline{\varphi(x)} \end{aligned}$$

证明 上述映射为 Abel 群同构, 同时该映射与 A 的作用交换, 从而为模同构. □

推论 2.1.1 设 N, K 均为 A-模 M 的子模, 则有如下的模同构:

$$\begin{aligned} \frac{N}{N\bigcap K} &\xrightarrow{\sim} \frac{N+K}{K} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

证明 验证该同态是满的, 并且其核为 $N\bigcap K$ 即可. □

推论 2.1.2 设 $K \subset N \subset M$ 为 A-模, 则有模同构:

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &\xrightarrow{\sim} \frac{M/K}{N/K} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

证明 验证该同态是满的, 并且其核为 N 即可. □

命题 2.1.3 设 N 为 A-模 M 的子模, 则 M/N 的子模与 M 的包含 N 的子模一一对应:

$$\begin{aligned} \{K \mid K \text{ 为} M \text{ 的子模}, N \subset K \subset M\} &\xrightarrow{\sim} \{M/N \text{ 的子模}\} \\ K &\longmapsto K/N \end{aligned}$$

证明 记 $\pi\colon M \longrightarrow M/N$ 为商同态. 则对 M/N 的每个子模 L, 对应 $L \mapsto \pi^{-1}(L)$ 给出了相应的逆映射. □

与环的局部化类似, 我们可以构造模的局部化. 设环 A 的子集 S 为一个乘法子集, 设 M 为 A-模. 令

$$\tilde{M} = \{(x,s) | x \in M,\ s \in S\}.$$

考虑 $\tilde{M}$ 上的关系 $\sim$: $(x,s_1) \sim (y,s_2) \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $s(s_2x - s_1y) = 0$. 可以验证这是 $\tilde{M}$ 上的等价关系. 记商集合 $\tilde{M}/\sim$ 为 M_S 或 $S^{-1}M$, 并将 (x,s) 代表的 M_S 中元素记为 $\frac{x}{s}$. 这样在 M_S 中, $\frac{x}{s_1} = \frac{y}{s_2} \iff$ 存在 $s \in S$, 使得 $s(s_2x - s_1y) = 0$. 在 M_S 中, 通过如下方式定义加法和 A_S 的作用:

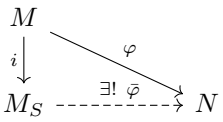
$$\begin{aligned} \frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} &:= \frac{s_2x + s_1y}{s_1s_2},\ x,y \in M,\ s_1,s_2 \in S, \\ \frac{a}{s_1} \cdot \frac{x}{s_2} &:= \frac{ax}{s_1s_2},\ a \in A,\ x \in M,\ s_1,s_2 \in S. \end{aligned}$$

容易验证, 上述定义不依赖于代表元的选取, 从而是良好的. 并且通过这样定义的加法和 A_S 作用, M_S 成为 A_S-模, 称为 M 在 S 处的局部化. 对例 1.3.1 所列的三种特殊乘

法子集 S, 我们有时也将对应的局部化 M_S 分别记作 M_f, M_P 和 $M_{\mathfrak{p}}$.

通过自然环同态 $A \longrightarrow A_S$, M_S 也可看作 A-模, 并且映射 $i\colon x \mapsto \frac{x}{1}$ 是一个 M 到 M_S 的 A-模同态. 容易看到, 环的局部化 A_S 作为 A_S-模, 与 A 作为 A-模的局部化相同, 这说明模的局部化构造与前面环的局部化是相容的.

命题 2.1.4 (局部化的万有性质) 设 M 为 A-模, S 为 A 的乘法子集. 对任意 A_S-模 N, 对任意 A-模同态 $\varphi\colon M \longrightarrow N$, 均存在唯一的 A_S-模同态 $\bar{\varphi}\colon M_S \longrightarrow N$, 使得 $\varphi = \bar{\varphi} \circ i$. 用交换图表表示如下:



证明 对 $x/s \in M_S$, 令 $\bar{\varphi}(x/s) = s^{-1}\varphi(x)$ 即可. 其余易验证. □

与环的情形类似, 要说明模中的一个元素为零, 只需在每个点局部做判断.

命题 2.1.5 设 M 为 A-模, $s \in M$. 则 $s = 0 \iff$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, s 在 M_P 中均为 0.

证明 只需证 $\Longleftarrow$. 假设对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, s 在 M_P 中均为 0. 考虑 s 的零化理想

$$\operatorname{ann}(s) \coloneqq \{a \in A \mid as = 0\}.$$

只需证明 $\operatorname{ann}(s) = A$. 如果 $\operatorname{ann}(s)$ 为 A 的真理想, 则可以找到 A 的极大理想 m 包含 $\operatorname{ann}(s)$. 由于 s 在 M_m 中为 0, 根据定义可知存在 $a \in A \setminus m$, 使得 $as = 0$. 从而 $a \in \operatorname{ann}(s)$. 这与 $\operatorname{ann}(s) \subset m$ 矛盾! 故 $\operatorname{ann}(s) = A$, 即得 $s = 0$. □

2.2 张量积

2.2.1 模的张量积

定义 2.2.1 设 M, N, K 为 A-模, 一个映射 $f\colon M \times N \longrightarrow K$ 称为 (A-) 双线性映射, 如果其满足:

(i) $f(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1f(x_1, y) + a_2f(x_2, y)$,

(ii) $f(x, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1f(x, y_1) + a_2f(x, y_2)$.

其中 $a_i \in A$, $x, x_i \in M$, $y, y_i \in N$.

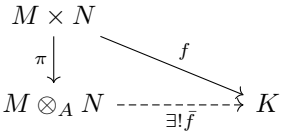
对给定的 A-模 M, N, 其张量积在某种意义上给出了所有从 $M \times N$ 出发的双线性映射. 张量积可用如下方式具体构造出来: 令 $\widetilde{M \times N}$ 为以 $M \times N$ 中的元素作为基生

成的自由 A-模. 考虑 $\widetilde{M\times N}$ 中的如下两个集合:

$$S_1 \coloneqq \{(a_1x_1+a_2x_2,y)-a_1(x_1,y)+a_2(x_2,y) \mid a_i\in A,\ x_i\in M,\ y\in N\},$$
$$S_2 \coloneqq \{(x,a_1y_1+a_2y_2)-a_1(x,y_1)+a_2(x,y_2) \mid a_i\in A,\ x\in M,\ y_i\in N\}.$$

设 R 为 $S_1\bigcup S_2$ 生成的 $\widetilde{M\times N}$ 的子模, 令 $M\otimes_A N\coloneqq \widetilde{M\times N}/R$ 为商模, 称为 M 和 N 的**张量积**. 在环 A 明确的情况下我们也将 $M\otimes_A N$ 简记为 $M\otimes N$. 对 $x\in M$, $y\in N$, 我们记 $x\otimes y\in M\otimes_A N$ 为 (x,y) 在自然的商映射 $\widetilde{M\times N}\longrightarrow M\otimes_A N$ 下的像. 容易看到, $\pi\colon M\times N\longrightarrow M\otimes_A N$, $(x,y)\mapsto x\otimes y$ 是一个双线性映射. 其具有如下万有性质:

命题 2.2.1 (模的张量积的万有性质) 设 M,N 为 A-模. 则对任意 A-模 K 以及任意双线性映射 $f\colon M\times N\longrightarrow K$, 均存在唯一的 A-模同态 $\bar{f}\colon M\otimes_A N\longrightarrow K$, 使得 $f=\bar{f}\circ\pi$. 用交换图表表示为:



证明 根据自由模的万有性质, f 可以扩充为模同态 $\widetilde{M\times N}\longrightarrow K$, 进而再由商的万有性质得到同态 $\bar{f}\colon M\otimes_A N\longrightarrow K$. 不难看到 $\forall\ x\in M$, $y\in N$, $\bar{f}(x\otimes y)=f(x,y)$. 由 $\{x\otimes y \mid x\in M,y\in N\}$ 是 A-模 $M\otimes_A N$ 的生成元可得 $\bar{f}$ 的唯一性. □

根据万有性质, 为了构造从 $M\otimes_A N$ 出发的模同态, 我们只需构造从 $M\times N$ 出发的双线性映射, 其本质是在万有性质中已经验证了定义的良好性, 从而对每个具体情形不用再重新验证一遍. 下面命题的证明展示了万有性质的用法.

命题 2.2.2 设 A 为环, $M,N,L,N_i(i\in I)$ 为 A-模, 则有如下模同构:

(i) $M\otimes_A N\simeq N\otimes_A M$.
(ii) $M\otimes_A (A/I)\simeq M/IM$, 其中 I 为 A 的理想.
(iii) $M\otimes_A A\simeq M$.
(iv) $M\otimes_A (\bigoplus\limits_{i\in I} N_i)\simeq \bigoplus\limits_{i\in I}(M\otimes_A N_i)$.

证明 (i): 由张量积的万有性质, 双线性映射 $M\times N\longrightarrow N\otimes_A M$, $(x,y)\longmapsto y\otimes x$ 诱导模同态 $\varphi\colon M\otimes_A N\longrightarrow N\otimes_A M$. 同理有模同态 $\psi\colon N\otimes_A M\longrightarrow M\otimes_A N$, $y\otimes x\longmapsto x\otimes y$. 易验证在形如 $x\otimes y$ 的元素上, $\varphi\circ\psi$ 与 $\psi\circ\varphi$ 均为恒等映射. 由于所有形如 $x\otimes y$ 的元素为生成元, 故 φ 和 ψ 为互逆的模同态, 从而给出同构.

(ii): 与 (i) 类似, 由张量积的万有性质可以构造模同态 $M\otimes_A (A/I)\longrightarrow M/IM$, $x\otimes\bar{a}\mapsto\overline{ax}$. 另一方面, 由定理 2.1.1 (商的万有性质) 我们有模同态 $M/IM\longrightarrow$

$M \otimes_A (A/I),\ \bar{x} \mapsto x \otimes \bar{1}$. 通过在生成元上验证, 可知这两个模同态互逆, 从而给出所要的模同构.

(iii) 为 (ii) 在 $I = 0$ 时的推论.

(iv): 与前面类似, 我们有良好定义的模同态 $M \otimes_A (\underset{i\in I}{\oplus} N_i) \longrightarrow \underset{i\in I}{\oplus}(M \otimes_A N_i)$, $x \otimes (y_i) \mapsto (x \otimes y_i)$, 以及反方向的模同态 $(x \otimes y_i) \mapsto x \otimes (y_i)$. 易验证这两个同态互逆, 从而给出所要的模同构. □

现在我们可以借助张量积给出命题 2.1.2 的另一个证明.

命题 2.2.3 设 M 为有限 A-模, 并且 M 为自由模. 则 M 的任何一组基中的元素个数有限, 且任何两组基中包含的元素个数相等.

证明 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 M 的一组生成元, 则存在满同态 $A^n \xrightarrow{\varphi} M$. 任取 A 的一个极大理想 m, 令 $k = A/m$. 则 $k^n = A^n \otimes_A k \xrightarrow{\varphi\otimes 1} M \otimes_A k = M/mM$ 为 k-线性空间的满同态. 再由 $(\underset{i\in I}{\oplus} A) \otimes_A k \simeq \underset{i\in I}{\oplus} k$ 知 M 的任意一组基也为 M/mM 的 k-线性空间基. 由此得到 M 的任意基包含的元素个数均等于 $\dim_k M/mM$, 且不超过 n. □

设 B 为 A-代数, M 为 A-模, N 为 B-模. 由张量积的万有性质, 对 $b \in B$, 映射 $x \otimes y \longmapsto x \otimes (by)$ 给出了一个良好定义的 $M \otimes_A N$ 到自身的 A-模同态. 通过这个模同态, 环 B 作用到 $M \otimes_A N$ 上, 并且在这个作用下 $M \otimes_A N$ 成为 B-模. 以下运算中的 "消去" 性质经常用到.

命题 2.2.4 设 M 为 A-模, B 为 A-代数, N 为 B-模. 则有 B-模同构:

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \simeq M \otimes_A N.$$

证明 由张量积的万有性质得到良好定义的模同态 $(M \otimes_A B) \otimes_B N \longrightarrow M \otimes_A N$, $(x \otimes b) \otimes y \longmapsto x \otimes (by)$. 同理有反方向的同态 $M \otimes_A N \longrightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N$, $x \otimes y \longmapsto (x \otimes 1) \otimes y$. 易知这两个同态互逆, 从而给出所要的模同构. □

下面的命题说明 $\bullet \otimes_A B$ 和将 B-模看作 A-模互为伴随函子.

命题 2.2.5 设 B 为 A-代数, M 为 A-模, N 为 B-模. 则以下两个映射互为逆映射, 从而给出双射 $\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \\ f &\longmapsto (x \mapsto f(x \otimes 1)) \\ \mathrm{Hom}_A(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \\ g &\longmapsto (x \otimes b \mapsto bg(x)) \end{aligned}$$

证明 利用张量积的万有性质, 可以看到上述两个映射都是良好定义的. 直接在生成元上验证可知其为互逆的映射. □

下面的命题表明, 我们可以用张量积和环的局部化来得到模的局部化.

命题 2.2.6 设 M 为 A-模, S 为 A 的一个乘法子集. 则有 A_S-模同构:

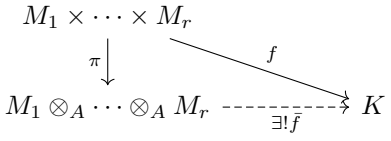
$$M_S \simeq M \otimes_A A_S.$$

证明 M_S 到 $M \otimes_A A_S$ 的同态由 $\frac{x}{s} \mapsto x \otimes \frac{1}{s}$ 给出. $M \otimes_A A_S$ 到 M_S 的同态由 $x \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{ax}{s}$ 给出. □

设 $r \geq 1$, $M_1, \ldots, M_r$ 为 A-模. 很容易将上述张量积 $M \otimes_A N$ 的定义推广为 r 个模的张量积 $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$. 为此, 对于 A-模 K, 我们称映射 $f\colon M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow K$ 为**多重线性映射**, 如果 $\forall\ 1 \leq i \leq r$, $\forall\ x_i, y_i \in M_i$, $\forall\ a, b \in A$, 总有下式成立:

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_{i-1}, ax_i + by_i, x_{i+1}, \ldots, x_r) = \\ &af(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r) + bf(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_r). \end{aligned}$$

与 $M \otimes_A N$ 的构造类似, 可以看到存在 A-模 $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$ 以及多重线性映射 $M_1 \times \cdots \times M_r \xrightarrow{\pi} M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$, $(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$, 满足如下万有性质: 对任意 A-模 K 以及任意多重线性映射 $f\colon M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow K$, 存在唯一的 A-模同态 $\bar{f}\colon M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r \longrightarrow K$, 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$. 用交换图表表示为:



张量积的运算有如下结合性:

命题 2.2.7 设 M_1, M_2, M_3 为 A-模. 则有 A-模同构:

$$\begin{aligned} M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3 \simeq (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 &\simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3) \\ x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \mapsto (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 \qquad &\mapsto x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) \end{aligned}$$

证明 考虑如下多重线性映射

$$\begin{aligned} f\colon M_1 \times M_2 \times M_3 &\longrightarrow (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3. \end{aligned}$$

由张量积的万有性质, f 诱导 A-模同态 $\bar{f}\colon M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3 \longrightarrow (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3$, 满足 $\bar{f}(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3,\ \forall\, x_i \in M_i$. 另一方面, 任意固定 $x_3 \in M_3$, 双线性映射 $M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3$, $(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$ 诱导了 A-模同态 $\psi_{x_3}\colon M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3$. 易知映射 $(M_1 \otimes M_2) \times M_3 \longrightarrow M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3$, $(x, x_3) \longmapsto \psi_{x_3}(x)$ 是双线性映射, 从而诱导 A-模同态 $g\colon (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \longrightarrow M_1 \otimes M_2 \times M_3$, 满足 $g((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3, \forall\, x_i \in M_i$. 在生成元上验证即知 $\bar{f}$ 和 g 为互逆的同态, 故给出同构 $M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3 \simeq (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3$. 同理有同构 $M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$. □

2.2.2 代数的张量积

设 B, C 均为 A-代数. 下面给 A-模 $B \otimes_A C$ 赋予一个 A-代数结构. 只需定义乘法. 考虑如下多重线性映射:

$$\begin{aligned} B \times C \times B \times C &\longrightarrow B \otimes_A C \\ (b_1, c_1, b_2, c_2) &\longmapsto (b_1 b_2) \otimes (c_1 c_2). \end{aligned}$$

由张量积的万有性质, 该多重线性映射诱导 A-模同态 $B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C \xrightarrow{m} B \otimes_A C$. 根据张量积的结合性 (命题 2.2.7), 我们得到如下复合映射, 定义为 $B \otimes_A C$ 上的乘法:

$$\begin{aligned} (B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \longrightarrow (B \otimes_A C) \otimes_A (B \otimes_A C) = B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C &\xrightarrow{m} B \otimes_A C \\ (x, y) &\longmapsto x \otimes y \end{aligned}$$

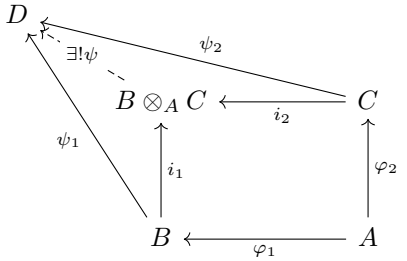
容易看到 $B \otimes_A C$ 在这个乘法运算下成为环, 满足 $(b_1 \otimes c_1) \cdot (b_2 \otimes c_2) = (b_1 b_2) \otimes (c_1 c_2)$, $\forall\, b_i \in B, \forall\, c_i \in C$. $B \otimes_A C$ 在结构同态 $A \longrightarrow B \otimes_A C,\ a \mapsto a \otimes 1 = 1 \otimes a = a(1 \otimes 1)$ 下成为一个 A-代数, 并且 $i_1\colon B \longrightarrow B \otimes_A C$, $b \longmapsto b \otimes 1$ 以及 $i_2\colon C \longrightarrow B \otimes_A C$, $c \longmapsto 1 \otimes c$ 均为 A-代数同态. 作为 A-代数, $B \otimes_A C$ 有如下万有性质.

命题 2.2.8 (代数张量积的万有性质) 设 B, C 均为 A-代数, 结构同态为 $\varphi_1\colon A \longrightarrow B$, $\varphi_2\colon A \longrightarrow C$. 则

(1) $i_1 \circ \varphi_1 = i_2 \circ \varphi_2$.

(2) 对任意环 D 以及环同态 $\psi_1\colon B \longrightarrow D$ 和 $\psi_2\colon C \longrightarrow D$, 如果 $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, 那么存在唯一的环同态 $\psi\colon B \otimes_A C \longrightarrow D$, 使得 $\psi_1 = \psi \circ i_1$, $\psi_2 = \psi \circ i_2$.

用交换图表表示为:

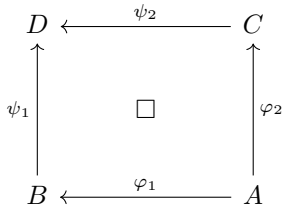


(2.2–1)

证明 (1): 直接验证即可.

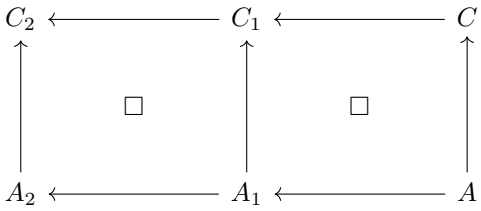
(2): 通过同态 $\psi_1\circ\varphi_1=\psi_2\circ\varphi_2$, D 成为 A-代数. A-模的双线性映射 $B\times C\longrightarrow D$, $(b,c)\longmapsto\psi_1(b)\psi_2(c)$ 诱导 A-模同态 $\psi\colon B\otimes_A C\longrightarrow D$, $b\otimes c\longmapsto\psi_1(b)\psi_2(c)$. 不难看到 ψ 为环同态. 其余直接验证即可. □

如果上述交换图表 (2.2–1) 中的环同态 ψ 为同构, 则称交换图表

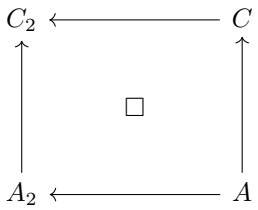


为**卡式图**, 其中的符号 "□" 是卡式图的标志. 由定义可以看到, 卡式图是一类特殊的交换图表, 并且与代数的张量积是等价的. 很多时候张量积的性质用卡式图描述起来更加直观. 如下面的卡式图的复合性质.

命题 2.2.9 设以下环同态的图表中用 "□" 指示的两个方块均为卡式图:



则其复合



也为卡式图.

证明 翻译为张量积的语言, 这等价于说有环同构 $A_2\otimes_{A_1}(A_1\otimes_A C)\simeq A_2\otimes_A C$. 而这又由命题 2.2.4 不难得到. □

下面分析素谱空间 $\operatorname{Spec}(B\otimes_A C)$. 首先注意到我们可以通过 $\operatorname{Hom}(A,k)$ 来 "探测" $\operatorname{Spec}A$ 中的点, 即有如下命题.

命题 2.2.10 设 A 为环. 则

(1) 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均存在域 L 以及环同态 $\varphi\colon A \longrightarrow L$, 使得 $P = \operatorname{Ker}\varphi$.
(2) 设 L 为域, $\varphi\colon A \longrightarrow L$ 为环同态. 设 $P = \operatorname{Ker}\varphi$. 则 $P \in \operatorname{Spec} A$, 并且存在唯一的域嵌入 $\psi\colon k(P) \longrightarrow L$ 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & \searrow^{\varphi} & \\ k(P) & \xrightarrow[\exists!\psi]{} & L \end{array}$$

其中 $\iota\colon A \longrightarrow k(P) = \frac{A_P}{PA_P}$ 为局部化和商诱导的自然同态.

证明 (1): 取 $L = k(P)$, φ 为自然同态即可.
(2): 由自然同态 ι 的定义以及局部化和商的万有性质即得. □

命题 2.2.11 设 B, C 均为 A-代数, 结构同态为 $\varphi_1\colon A \longrightarrow B$, $\varphi_2\colon A \longrightarrow C$. 则交换图表

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A C & \xleftarrow[i_2]{} & C \\ \uparrow{\scriptstyle i_1} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ B & \xleftarrow[\varphi_1]{} & A \end{array}$$

诱导了素谱空间映射的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(B \otimes_A C) & \xrightarrow{i_2^*} & \operatorname{Spec} C \\ \downarrow{\scriptstyle i_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^*} \\ \operatorname{Spec} B & \xrightarrow[\varphi_1^*]{} & \operatorname{Spec} A \end{array}$$

并且由此诱导如下集合之间的映射:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C &\coloneqq \{(P_1, P_2) \in \operatorname{Spec} B \times \operatorname{Spec} C \mid \varphi_1^*(P_1) = \varphi_2^*(P_2)\} \\ Q &\longmapsto (i_1^*(Q), i_2^*(Q)) \end{aligned}$$

我们有:
(i) φ 为满射.
(ii) 当 $A \xrightarrow{\varphi_1} B$ 满足如下条件时, φ 为单射 (从而为双射):

对任意$P_1 \in \operatorname{Spec} B$, 令$P = P_1 \cap A$, 则$\varphi_1$诱导剩余类域的同构$k(P) \xrightarrow{\sim} k(P_1)$.

证明 (i): 设 $P_1 \in \operatorname{Spec} B$, $P_2 \in \operatorname{Spec} C$, 并且 $\varphi_1^*(P_1) = \varphi_2^*(P_2) = P \in \operatorname{Spec} A$. 则有剩余类域之间的同态 $k(P) \longrightarrow k(P_1)$, $k(P) \longrightarrow k(P_2)$. 显然张量积 $k(P_1) \otimes_{k(P)} k(P_2)$ 不是零环. 取 $k(P_1) \otimes_{k(P)} k(P_2)$ 的一个极大理想 m, 令 $L \coloneqq k(P_1) \otimes_{k(P)} k(P_2)/m$, 则有

域嵌入的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} L & \longleftarrow & k(P_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ k(P_1) & \longleftarrow & k(P) \end{array}$$

通过复合自然同态 $B \longrightarrow k(P_1)$ 和 $C \longrightarrow k(P_2)$, 我们得到同态 $B \longrightarrow L$ 和 $C \longrightarrow L$. 不难验证以下图表交换:

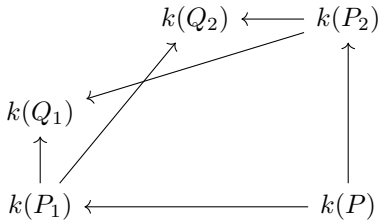
$$\begin{array}{ccc} L & \longleftarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \longleftarrow & A \end{array}$$

从而由张量积的万有性质 (命题 2.2.8) 得到同态 $B \otimes_A C \longrightarrow L$, 设 Q 为这个同态的核, 则由该同态的构造可以看到 Q 在映射 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \longrightarrow \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ 下的像即为 (P_1, P_2).

(ii): 设 $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$, 并且在映射

$$\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \longrightarrow \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$$

下的像均为 (P_1, P_2). 我们需要证明 $Q_1 = Q_2$. 设 $P = i_1^*(P_1) = i_2^*(P_2) \in \operatorname{Spec} A$. 我们有如下域嵌入的交换图表:



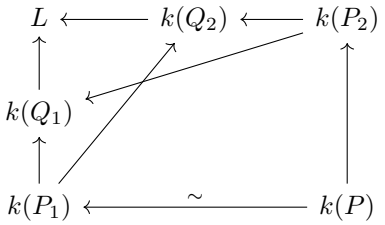
(2.2–2)

跟前面类似, 通过作张量积再商极大理想的方式, 我们可以找到一个域 L, 使得有下面的交换图表:

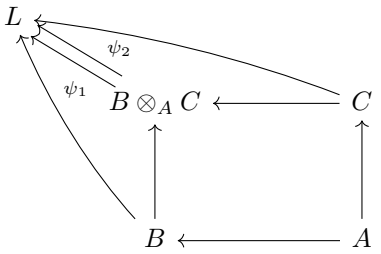
$$\begin{array}{ccc} L & \longleftarrow & k(Q_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ k(Q_1) & \longleftarrow & k(P_2) \end{array}$$

由条件, φ_1 诱导同构 $k(P) \xrightarrow{\sim} k(P_1)$, 从而可知交换图表 (2.2–2) 扩充为下面的交

换图表:



同态 $k(P_1)\longrightarrow L$ 诱导了同态 $B\longrightarrow L$, 同态 $k(P_2)\longrightarrow L$ 诱导了同态 $C\longrightarrow L$. 记 $\psi_i\colon B\otimes_A C\longrightarrow L$ 为 $k(Q_i)\longrightarrow L$ 诱导的同态, $i=1,2$, 则有如下交换图表:



由张量积万有性质中的唯一性即知 $\psi_1=\psi_2$, 从而 $Q_1=\operatorname{Ker}\psi_1=\operatorname{Ker}\psi_2=Q_2$. □

作为推论, 我们得到命题 1.3.7 关于纤维刻画的另一个证明.

推论 2.2.1 设 $\varphi\colon A\longrightarrow B$ 为环同态, $P\in\operatorname{Spec}A$, 则素谱空间映射 $\varphi^*\colon\operatorname{Spec}B\longrightarrow\operatorname{Spec}A$ 在点 P 处的纤维为

$$\varphi^{*-1}(P)\simeq\operatorname{Spec}(B\otimes_A k(P))\simeq\operatorname{Spec}(B_P/PB_P).$$

证明 注意到 $\operatorname{Spec}k(P)$ 为单点集, 故 $\varphi^{*-1}(P)\simeq\operatorname{Spec}k(P)\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}B$. 又因为 $A\longrightarrow k(P)$ 显然诱导剩余类域的同构, 从而可以应用命题 2.2.11 (ii) 得到双射 $\operatorname{Spec}(B\otimes_A k(P))\simeq\operatorname{Spec}k(P)\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}B$. 最后注意到环 $B\otimes_A k(P)$ 与 B_P/PB_P 同构即可. □

注记 2.2.1 以下两种情况满足命题 2.2.11 (ii) 的条件:

(1) $B=A/I$ 为商环, φ_1 为商同态.

(2) $B=A_S$ 为 A 的局部化, φ_1 为自然同态 $A\longrightarrow A_S$.

注意命题 2.2.11 中给出的素谱空间映射 φ 一般不是单射. 下面为两个例子.

例 2.2.1 (1) 设 $A=k$ 为域, $B=k[x]$, $C=k[y]$ 为一元多项式环. 则 $B\otimes_A C\simeq k[x,y]$. 考虑 $k[x,y]$ 中的两个素理想 $Q_1=(x-y)$ 和 $Q_2=(0)$. 则对 $i=1,2$, 均有 $Q_i\cap B=(0)$, $Q_i\cap C=(0)$. 这说明 Q_1, Q_2 在映射 $\operatorname{Spec}(B\otimes_A C)\xrightarrow{\varphi}\operatorname{Spec}B\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}C$

下的像相同.

(2) 设 $A=\mathbb{R}$ 为实数域, $B=C=\mathbb{C}$ 为复数域, 则

$$B\otimes_A C=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\simeq(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}i\simeq\frac{\mathbb{C}[x]}{(x^2+1)}\simeq\mathbb{C}\times\mathbb{C}.$$

由此知 $\operatorname{Spec}(B\otimes_A C)$ 为两个点的集合, 而 $\operatorname{Spec}B\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}C$ 为单点集.

从上面的例子可以看到, 对 $\operatorname{Spec}A$ 而言, 将 "点" 看作同态 $A\longrightarrow L$ (L 为域) 更加合理.

2.3 函子性与正合性

设 M 和 N 为 A-模, 则 $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ 在加法运算 $(\varphi_1+\varphi_2)(x)\coloneqq\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 以及 A 的作用 $(a\varphi)(x)\coloneqq a\varphi(x)$ 下也为 A-模. 我们将算符 $\operatorname{Hom}_A(\bullet,\bullet)$ 看作两个变量的函数, 这样对固定的 M, 符号 $\operatorname{Hom}_A(M,\bullet)$ 将每个 A-模 N 变为 A-模 $\operatorname{Hom}_A(M,N)$. 同时对 A-模同态 $f\colon N_1\longrightarrow N_2$, 有同态 $\operatorname{Hom}_A(M,N_1)\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M,N_2)$, $\varphi\mapsto f\circ\varphi$. 利用范畴语言, 这是说 $\operatorname{Hom}_A(M,\bullet)$ 是一个从 A-模范畴到 A-模范畴的共变函子. 同样地, 固定另一个变量 N, 我们看到 $\operatorname{Hom}_A(\bullet,N)$ 会将每个 A-模 M 变为 A-模 $\operatorname{Hom}_A(M,N)$, 并且对模同态 $f\colon M_1\longrightarrow M_2$, 有诱导的模同态 $\operatorname{Hom}_A(M_2,N)\longrightarrow\operatorname{Hom}_A(M_1,N)$, $\varphi\mapsto\varphi\circ f$. 这样得到反变函子 $\operatorname{Hom}_A(\bullet,N)$.

把上面的讨论过程应用到张量积运算 $\bullet\otimes_A\bullet$ 上, 我们看到对 A-模 M, 运算 $M\otimes_A\bullet$ 把每个 A-模 N 变为 A-模 $M\otimes_A N$, 同时将模同态 $f\colon N_1\longrightarrow N_2$ 变为 $1\otimes f\colon M\otimes_A N_1\longrightarrow M\otimes_A N_2$, $x\otimes y\mapsto x\otimes f(y)$. 这样 $M\otimes_A\bullet$ 为从 A-模范畴到 A-模范畴的共变函子. 同理有共变函子 $\bullet\otimes_A M$. 但由于 $M\otimes_A N\simeq N\otimes_A M$, 函子 $M\otimes_A\bullet$ 与 $\bullet\otimes_A M$ 是同构的.

类似地, 固定环 A 的乘法子集 S, 则在 S 处作局部化这个运算将每个 A-模 M 变为 A_S-模 M_S, 并且将 A-模同态 $f\colon M\longrightarrow N$ 变为 A_S-模同态 $M_S\longrightarrow N_S$, $\frac{x}{s}\mapsto\frac{f(x)}{s}$. 这样在 S 处作局部化为一个从 A-模范畴到 A_S-模范畴的共变函子.

为了分析上述几种运算之间的关系, 我们还需要引入复形与正合列的概念.

定义 2.3.1 对于 A-模同态给出的一个序列 $\cdots\longrightarrow M_{i-1}\xrightarrow{d_{i-1}}M_i\xrightarrow{d_i}M_{i+1}\longrightarrow\cdots$, 如果对每个 i, 均有 $d_i\circ d_{i-1}=0$, 即 $\operatorname{Im}d_{i-1}\subset\operatorname{Ker}d_i$, 则称该序列为 A-模**复形**. 如果等式 $\operatorname{Im}d_{i-1}=\operatorname{Ker}d_i$ 成立, 则称上述复形在 M_i 处**正合**. 如果一个复形在每个 M_i 处均正合, 则称该复形为**正合列**.

形如 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 的正合列称为**短正合列**. 形如 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3$ 的正合列称为**左正合列**. 形如 $M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 的正合列称为**右正合列**. 不难看到, $0\longrightarrow M_1\xrightarrow{\varphi}M_2\xrightarrow{\psi}M_3\longrightarrow 0$ 为短正合列等价于 φ 为单同态, ψ

为满同态, 同时 φ 的像等于 ψ 的核. 同样地, $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为左正合列等价于 φ 为单同态, 并且 φ 的像等于 ψ 的核. 而 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列等价于 ψ 为满同态, 并且 φ 的像等于 ψ 的核.

命题 2.3.1 设有如下 A-模同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 \end{array}$$

(i) 如果 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 均为短正合列, 并且 f_1 和 f_3 均为同构, 则 f_2 也为同构.

(ii) 如果 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ 和 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$ 均为左正合列, 并且 f_2 和 f_3 均为同构, 则 f_1 也为同构.

(iii) 如果 $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 和 $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 均为右正合列, 并且 f_1 和 f_2 均为同构, 则 f_3 也为同构.

证明 图表追踪即得. 作为演示, 我们只验证 (i) 中 f_2 的满射性. 给定 $n_2 \in N_2$, 我们希望找到 $m_2 \in M_2$, 使得 $f_2(m_2) = n_2$. 为此, 考虑 n_2 在 N_3 中的像 n_3, 由 f_3 为满同态, 可以找到 $m_3 \in M_3$, 使得 $f_3(m_3) = n_3$. 由 $M_2 \longrightarrow M_3$ 为满同态, 可以取 $m_2' \in M_2$ 为 m_3 的一个原像. 这样由图表的交换性可以看到 $\delta_2 := n_2 - f(m_2') \in N_2$ 映到 N_3 中为 0. 再由 $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$ 在 N_2 处正合, 可以找到 δ_2 在 N_1 中的一个原像 n_1. 进而由 f_1 为满同态又可以找到 n_1 在 M_1 中的一个原像 m_1. 记 m_1 在 M_2 中的像为 m_2''. 令 $m_2 := m_2' + m_2''$, 则由图表的交换性可以验证 $f_2(m_2) = n_2$. 从而 f_2 为满同态. □

关于上述 Hom, $\otimes$ 及局部化等函子的正合性, 我们总结如下:

命题 2.3.2 设 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为 A-模复形. 设 M, N 为 A-模, S 为 A 的一个乘法子集. 则有:

(i) 局部化为正合函子, 即 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 在 M_2 处正合 $\Longrightarrow$ $S^{-1}M_1 \xrightarrow{\varphi_S} S^{-1}M_2 \xrightarrow{\psi_S} S^{-1}M_3$ 在 $S^{-1}M_2$ 处正合.

(ii) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为左正合列 $\Longleftrightarrow$ 对任意 A-模 M, 均有 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M_1) \xrightarrow{\varphi\circ\bullet} \mathrm{Hom}_A(M, M_2) \xrightarrow{\psi\circ\bullet} \mathrm{Hom}_A(M, M_3)$ 为左正合列.

(iii) $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列 $\Longleftrightarrow$ 对任意 A-模 N, 均有 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\bullet\circ\psi} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\bullet\circ\varphi} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$ 为左正合列.

(iv) $M \otimes_A \bullet$ 为右正合函子, 即 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列 $\Longrightarrow$ $M \otimes_A M_1 \xrightarrow{1\otimes\varphi} M \otimes_A M_2 \xrightarrow{1\otimes\psi} M \otimes_A M_3 \longrightarrow 0$ 为右正合列.

证明 (i): 直接验证即可.

(ii): $\Longrightarrow$ 直接验证即可. 现在证明 $\Longleftarrow$. 为证明 φ 为单同态, 令 $M = \mathrm{Ker}\,\varphi$,

由条件得到 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\varphi, M_1) \xrightarrow{\varphi\circ} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\varphi, M_2)$ 为单同态. 考虑自然的包含同态 $i \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\varphi, M_1)$, 由 $\varphi \circ i = 0$ 知 $i = 0$, 从而 $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$, 即 φ 为单同态. 由 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 为 A-模复形知 $\psi \circ \varphi = 0$, 即 $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,\psi$. 再令 $M = \mathrm{Ker}\,\psi$, 由条件知 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\psi, M_1) \xrightarrow{\varphi\circ} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\psi, M_2) \xrightarrow{\psi\circ} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\psi, M_3)$ 正合. 考虑自然的包含同态 $i \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\psi, M_2)$, 则 $\psi \circ i = 0$, 从而由正合性知存在 $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\,\psi, M_1)$, 使得 $i = \varphi \circ f$. 由此知 $\mathrm{Ker}\,\psi \subset \mathrm{Im}\,\varphi$. 从而 $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$. 这样就完成了 $\Longleftarrow$ 的证明.

(iii): 与 (ii) 类似, 只需证明 $\Longleftarrow$. 要证明 ψ 为满同态, 我们取 $N = \mathrm{Coker}\,\psi = M_3/\mathrm{Im}\,\psi$ 以及自然的商同态 $\pi \in \mathrm{Hom}_A(M_3, \mathrm{Coker}\,\psi)$. 要证明 $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, 我们可以取 $N = \mathrm{Coker}\,\varphi$ 以及自然的商同态 $\pi \in \mathrm{Hom}_A(M_2, \mathrm{Coker}\,\varphi)$. 再与 (ii) 类似进行推理即可.

(iv): 由 (iii), 只需证明对任意 A-模 N, $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A M_3, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A M_1, N)$ 为左正合列. 由张量积的万有性质, 对 $i = 1, 2, 3$, 有自然同构 $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A M_i, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M_i, \mathrm{Hom}_A(M, N))$. 从而又只需证明 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, \mathrm{Hom}_A(M, N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2, \mathrm{Hom}_A(M, N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, \mathrm{Hom}_A(M, N))$ 为左正合列. 而这由条件中的右正合性以及 (ii) 即得. □

注记 2.3.1 上述命题中的 (iv) 还可以证明如下: 显然 $(1 \otimes \psi) \circ (1 \otimes \varphi) = 0$. 双线性映射

$$\begin{aligned} f\colon M \times M_3 &\longrightarrow (M \otimes_A M_2)/(1 \otimes \varphi)(M \otimes M_1) \\ (x, x_3) &\longmapsto \overline{x \otimes x_2} \end{aligned}$$

是良好定义的, 其中 $x_2 \in M_2$ 为任意满足 $\psi(x_2) = x_3$ 的元素. 由张量积的万有性质, 双线性映射 f 诱导了模同态 $\bar{f}\colon M \otimes_A M_3 \longrightarrow (M \otimes_A M_2)/(1 \otimes \varphi)(M \otimes M_1)$. 通过在生成元上直接验证即得 $\bar{f}$ 与 $\overline{1 \otimes \psi}\colon (M \otimes_A M_2)/(1 \otimes \varphi)(M \otimes M_1) \longrightarrow M \otimes_A M_3$ 互为逆映射, 从而为互逆的同构.

设 M 为 A-模, N 为 M 的一个子模. 设 S 为 A 的一个乘法子集. 由于局部化为正合函子, 自然的包含同态 $N \hookrightarrow M$ 在局部化后得到的同态 $N_S \hookrightarrow M_S$ 还是单同态. 我们以后总是通过这个单同态将 N_S 看作 M_S 的子模. 特别地, 设 I 为环 A 的理想, 我们将 I_S 看作 A_S 的子模 (或理想). 容易验证有 A_S 中理想的等式 $I_S = IA_S$, 其中 IA_S 为 I 在环 A_S 中生成的理想.

命题 2.3.3 (商与局部化交换) *设 M 为 A-模, N 为 M 的一个子模. 设 S 为 A 的一个乘法子集. 则有 A_S-模同构 $M_S/N_S \simeq (M/N)_S$.*

证明 考虑短正合列 $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$, 作局部化后得到如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N_S & \longrightarrow & M_S & \longrightarrow & M_S/N_S & \longrightarrow & 0 \\ & & \mathrm{id}\downarrow\wr & & \mathrm{id}\downarrow\wr & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_S & \longrightarrow & M_S & \longrightarrow & (M/N)_S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由局部化为正合函子知 $0 \longrightarrow N_S \longrightarrow M_S \longrightarrow (M/N)_S \longrightarrow 0$ 为短正合列. 再由命题 2.3.1 即知 $M_S/N_S \longrightarrow (M/N)_S$ 为同构. □

命题 2.3.4 *A-模复形 $N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} K$ 在 M 处正合 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均有局部化 $N_P \xrightarrow{\varphi_P} M_P \xrightarrow{\psi_P} K_P$ 在 M_P 处正合.*

证明 由于局部化为正合函子, 不难看到有模同构

$$\operatorname{Im}\varphi_P \simeq (\operatorname{Im}\varphi)_P, \quad \operatorname{Ker}\psi_P \simeq (\operatorname{Ker}\psi)_P.$$

进而有 $\operatorname{Ker}\psi_P/\operatorname{Im}\varphi_P \simeq (\operatorname{Ker}\psi/\operatorname{Im}\varphi)_P$. 再由命题 2.1.5 即得. □

由于单同态, 满同态以及同构均可以由正合列描述, 我们得到如下常用的推论.

推论 2.3.1 *设 $\varphi\colon M \longrightarrow N$ 为 A-模同态. 则 φ 为单同态 (满同态, 同构) $\Longleftrightarrow$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 局部化之后的同态 $\varphi_P\colon M_P \longrightarrow N_P$ 为单同态 (满同态, 同构).*

证明 利用命题 2.3.4, 并且注意到以下事实即可:

(i) φ 为单同态等价于 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ 为左正合列.
(ii) φ 为满同态等价于 $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 为右正合列.
(iii) φ 为同构等价于 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 为正合列. □

下面的推论说明可以通过局部化判断两个子模是否相等.

推论 2.3.2 *设 N, K 均为 A-模 M 的子模. 则 $N = K \Longleftrightarrow$ 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 都有 $N_P = K_P$. 这里通过自然的单同态将 N_P 和 K_P 都看作 M_P 的子模.*

证明 只需证明 $\Longleftarrow$. 设 $L = N + K$. 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有 $(L/N)_P = L_P/N_P = (N_P + K_P)/N_P = 0$. 故 $L/N = 0$. 同理 $L/K = 0$. 从而 $L = N = K$. □

下面讨论张量积与局部化运算的交换性.

命题 2.3.5 (张量积与局部化交换) *设 M, N 均为 A-模. 设 S 为 A 的乘法子集. 则有 A_S-模同构 $(M \otimes_A N)_S \simeq M_S \otimes_{A_S} N_S$.*

证明 这由以下运算即得:

$$M_S \otimes_{A_S} N_S = (M \otimes_A A_S) \otimes_{A_S} (N \otimes_A A_S) = M \otimes_A N \otimes_A A_S = (M \otimes_A N)_S.$$

下面给出另一个约化到自由模的论证. 当 $N = A$ 时, 由张量积的运算性质 (命题 2.2.2), 可知结论成立:

$$(M \otimes_A A)_S \simeq M_S \simeq M_S \otimes_{A_S} A_S.$$

进一步, 当 N 为自由 A-模时, N 同构于一些 (不一定有限个)A 的直和 $\bigoplus_{j\in J} A$, 而局部化和张量积均与直和交换 (命题 2.2.2 (iv)). 故此时结论也成立:

$$(M \otimes_A (\bigoplus_{j\in J} A))_S \simeq \bigoplus_{j\in J}(M \otimes_A A)_S \simeq \bigoplus_{j\in J} M_S \simeq \bigoplus_{j\in J}(M_S \otimes_{A_S} A_S) \simeq M_S \otimes_{A_S} (\bigoplus_{j\in J} A_S).$$

最后, 在一般情形, 通过取生成元, 我们总可以将 N 表达为两个自由模之间同态的余核, 即存在右正合列 $F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow N \longrightarrow 0$, 使得 F_1, F_2 均为自由 A-模. 对这个右正合列依次应用张量积函子 $M \otimes_A \bullet$ 和局部化函子, 并由张量积和局部化均保持右正合性, 仍然得到右正合列 $(M \otimes_A F_1)_S \longrightarrow (M \otimes_A F_2)_S \longrightarrow (M \otimes_A N)_S \longrightarrow 0$. 同样地, 对原右正合列依次应用局部化和张量积函子 $M_S \otimes_{A_S} \bullet$, 又得到右正合列

$$M_S \otimes_{A_S} F_{1S} \longrightarrow M_S \otimes_{A_S} F_{2S} \longrightarrow M_S \otimes_{A_S} N_S \longrightarrow 0.$$

利用张量积的万有性质, 不难建立上面得到的两个右正合列的同态, 即如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
(M \otimes_A F_1)_S & \longrightarrow & (M \otimes_A F_2)_S & \longrightarrow & (M \otimes_A N)_S & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\
M_S \otimes_{A_S} F_{1S} & \longrightarrow & M_S \otimes_{A_S} F_{2S} & \longrightarrow & M_S \otimes_{A_S} N_S & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由前面的讨论已经得到 f_1 和 f_2 均为同构, 从而由命题 2.3.1 知 f_3 为同构. □

命题 2.3.6 (Hom 与局部化交换) *设 M, N 为 A-模, S 为 A 的乘法子集, 并且 M 同构于两个有限秩的自由模之间同态的余核. 则有 A_S-模同构*

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_S \simeq \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S).$$

证明 与命题 2.3.5 的证明思路类似. 首先 M 本身为有限秩自由模时结论成立. 在一般情形, 设 $F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 为右正合列, 并且 F_1, F_2 均为有限秩的自由模. 考虑如下交换图表即可:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, N)_S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(F_2, N)_S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(F_1, N)_S \\
 & & \downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_S}(F_{2S}, N_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_S}(F_{1S}, N_S)
\end{array}$$

□

例 2.3.1 设 A 为环, $f_1,\dots,f_m \in A[x_1,\dots,x_n]$. 令 $I=(f_1,\dots,f_m)$ 为 f_i 生成的理想. 则对于 A-代数 B, 有 B-代数同构

$$\frac{A[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_m)}\otimes_A B \simeq \frac{B[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_m)}.$$

这是因为 A-模的短正合列 $0\longrightarrow (f_1,\dots,f_m)\longrightarrow A[x_1,\dots,x_n]\longrightarrow \frac{A[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_m)}\longrightarrow 0$ 诱导 B-模的右正合列:

$$(f_1,\dots,f_m)\otimes_A B \xrightarrow{\varphi} A[x_1,\dots,x_n]\otimes_A B \longrightarrow \frac{A[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_m)}\otimes_A B\longrightarrow 0,$$

再注意到 $A[x_1,\dots,x_n]\otimes_A B\simeq B[x_1,\dots,x_n]$ 以及 $\operatorname{Im}\varphi$ 由 $f_1,\dots,f_m$ 生成即可.

2.4 Noether 模

定义 2.4.1 我们称环 A 上的模 M 为 Noether 模, 如果 M 的子模满足升链条件, 即任何由 M 的子模形成的升链在有限步稳定.

由于环 A 的理想都是 A 作为自身上的模的子模, 故一个环 A 是 Noether 环等价于 A 作为自身上的模是 Noether 模.

命题 2.4.1 设 M 为 A-模. 则以下三条互相等价:

(i) M 为 Noether 模.

(ii) 任意非空的由 M 的一些子模形成的集合均存在极大元.

(iii) M 的任意子模都是有限 A-模.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由 Zorn 引理即得.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 设 N 为 M 的子模. 考虑 N 的所有有限子模形成的集合. 由 (ii), 可以找到该集合的一个极大元 K. 设 $K=Ax_1+\cdots+Ax_n$. 如果 $K\neq N$, 可以取 $x\in N\setminus K$, 则 $x_1,\dots,x_n,x$ 生成的 N 的子模 K_1 也是有限子模, 并且 $K\subsetneq K_1$. 这与 K 的极大性矛盾. 故 $N=K$ 为有限 A-模.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 设 $N_1\subset N_2\subset\dots$ 为 M 的子模形成的升链. 令 $N=\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i$. 则 N 为 M 的子模. 从而 $N=Ax_1+\dots Ax_n$ 为有限模. 故存在 $m\geq 1$ 使得每个 x_i 均包含在 N_m 中. 这说明 $N_{m+i}=N_m$, $\forall\, i\geq 0$. 从而该子模升链稳定. □

下面的命题说明模的 Noether 性可以遗传到子模和商模上去.

命题 2.4.2 设 M 为 A-模, N 为其子模. 则 M 为 Noether 模 $\Longleftrightarrow$ N 和 M/N 均为 Noether 模.

证明 $\Longrightarrow$: 任取 N 的子模 K, 则 K 也为 M 的子模. 由命题 2.4.1 知 K 为有限模. 由 K 的任意性知 N 为 Noether 模.

任取 M/N 的子模 K, 令 L 为 K 在模同态 $M \longrightarrow M/N$ 下的原像. 则 L 为 M 的子模, 故为有限模, 从而 $K = L/N$ 也为有限模. 由 K 的任意性知 M/N 为 Noether 模.

$\Longleftarrow$: 设 K 为 M 的子模. 则 $K \bigcap N$ 为 N 的子模, 而 $K + N/N$ 为 M/N 的子模. 从而由条件知 $K \bigcap N$ 和 $K + N/N$ 均为有限模. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为 $K \bigcap N$ 的一组生成元, $y_1, \ldots, y_m \in K$ 在 $K + N/N$ 中为一组生成元. 则对任意 $x \in K$, 存在 $a_1, \ldots, a_m \in A$, 使得在 $K + N/N$ 中有 $\bar{x} = a_1\bar{y}_1 + \ldots a_m\bar{y}_m$. 令 $y = x - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$. 则 $y \in K \bigcap N$. 故存在 $b_1, \ldots, b_n \in A$ 使得 $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. 这样得到

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

由此知 $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$ 为 K 的一组生成元. 故 K 为有限模. 由 K 的任意性知 M 为 Noether 模. □

命题 2.4.3 *设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 则 M 为 Noether 模.*

证明 设 $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. 对生成元个数 n 归纳.

(i) 如果 $n = 1$, 则 $M \simeq A/I$, 由 A 为 Noether 环得到 A 和 I 均为 Noether A-模, 从而 A/I 也为 Noether A-模.

(ii) 设 $n \geq 2$. 令 $M_1 = Ax_1$, 则由 $n = 1$ 的情形知 M_1 为 Noether 模. 由于商模 $M/M_1 = A\bar{x}_2 + \cdots + A\bar{x}_n$ 可由 $n - 1$ 个元素生成, 由归纳假设知 M/M_1 为 Noether 模. 从而由命题 2.4.2 得到 M 为 Noether 模. □

如果 A-模 M 没有非平凡子模, 即 M 的子模只有 0 和 M, 则我们称 M 为**单模**. 不难看到 M 为单模等价于存在同构 $M \simeq A/m$, 其中 m 为极大理想. 对 M 的子模链 $M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n$, 我们称其长度为 n, 它的一个加细是指在某些 M_i 和 M_{i+1} 之间再插入一些子模得到的 M 的子模链, 即形如 $M_0 = M_0' \supsetneqq M_1' \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_m' = M_n$, 并且存在 $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_n \leq m$, 使得 $\forall\ 0 \leq j \leq n$, $M_{i_j}' = M_j$. M 的一个子模链 $M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n$ 如果不能进一步加细, 则称为从 M_0 到 M_n 的一个**饱和链**. 如果还有 $M_0 = M$, $M_n = 0$, 则称其为 M 的一个**合成列**. 由定义可以看到, 子模链 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 为 M 的合成列当且仅当每个 M_i/M_{i+1} 均为单模 $(0 \leq i \leq n-1)$. 下面的定理说明, 合成列如果存在, 则有某种唯一性.

定理 2.4.1 (Jordan–Hölder 定理) *设 A-模 M 存在长度为 n 的合成列, 则*

(i) *M 的任意形如 $M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_m = 0$ 的子模链均可加细为一个合成列.*

(ii) *M 的任意两个合成列的长度都相等.*

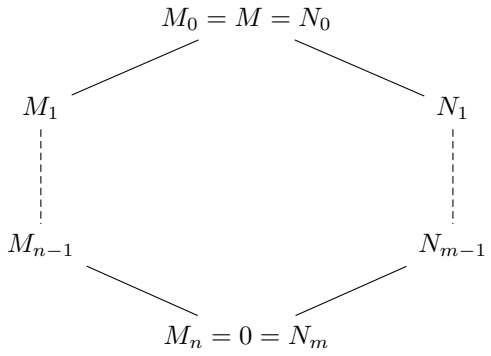
(iii) *设 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 和 $M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_n = 0$ 为 M 的两*

个合成列, 则以下两个带重数的集合 (因子集) 相等:

$$\{M_i/M_{i+1} \mid i = 0, \dots, n-1\} = \{N_i/N_{i+1} \mid i = 0, \dots, n-1\},$$

即存在 $\{0, \dots, n\}$ 的一个置换 σ, 使得 $M_i/M_{i+1} \simeq N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)+1}$, $\forall\, i = 0, \dots, n$.

证明 首先注意到由于因子集中的元素个数 (计重数) 等于合成列的长度, 故 (iii) $\Longrightarrow$ (ii). 设 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 为 M 的一个合成列, 设 $M = N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_m = 0$ 为 M 的一个子模列. 我们只需通过对 n 归纳, 证明 $N_0 \supsetneqq N_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq N_m$ 可以加细为一个合成列, 并且该合成列的因子集与 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 的因子集 (计重数) 相同. 用图表表示如下:



如果 $n = 1$, 则 M 为单模, 从而 $m = 1$, $N_1 = 0$, 此时要证的结论成立.

下面设 $n \geq 2$. 考虑 N_{m-1} 与合成列 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 的交:

$$N_{m-1} = N_{m-1} \cap M_0 \supset N_{m-1} \cap M_1 \supset \cdots \supset N_{m-1} \cap M_n = 0.$$

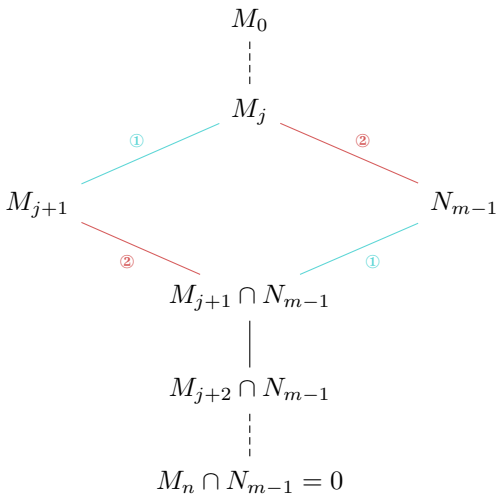
由于对每个 $i = 0, \dots, n-1$, 自然的同态 $\frac{N_{m-1} \cap M_i}{N_{m-1} \cap M_{i+1}} \longrightarrow \frac{M_i}{M_{i+1}}$ 为单同态, 并且 $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ 为单模, 从而知 $\frac{N_{m-1} \cap M_i}{N_{m-1} \cap M_{i+1}} = 0$ 或 $\frac{N_{m-1} \cap M_i}{N_{m-1} \cap M_{i+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{M_i}{M_{i+1}}$ 为同构.

设 j 为最大的非负整数, 使得 $N_{m-1} \cap M_j = N_{m-1}$. 则 $0 \leq j < n$, 并且有

$$N_{m-1} = N_{m-1} \cap M_0 = \cdots = N_{m-1} \cap M_j \supsetneqq N_{m-1} \cap M_{j+1},$$

故 $\frac{N_{m-1}}{N_{m-1} \cap M_{j+1}} = \frac{N_{m-1} \cap M_j}{N_{m-1} \cap M_{j+1}} \xrightarrow{\sim} \frac{M_j}{M_{j+1}}$ 为同构. 从而 $M_j = N_{m-1} + M_{j+1}$, 并由此又

得到同构 $\frac{M_j}{N_{m-1}} \simeq \frac{N_{m-1}+M_{j+1}}{N_{m-1}} \simeq \frac{M_{j+1}}{N_{m-1}\cap M_{j+1}}$. 用图表表示如下:



其中两条蓝线①代表的商同构, 两条红线②代表的商也同构.

由于 M_{j+1} 存在长度为 $n-j-1<n$ 的合成列 $M_{j+1}\supsetneqq M_{j+2}\supsetneqq\cdots\supsetneqq M_n=0$, 由归纳假设知 M_{j+1} 的子模列

$$M_{j+1}\supset M_{j+1}\cap N_{m-1}\supset M_{j+2}\cap N_{m-1}\supset\cdots\supset M_n\cap N_{m-1}=0$$

可以加细为长度 $n-j-1$ 的合成列. 由于

$$M_{j+1}\cap N_{m-1}\supset M_{j+2}\cap N_{m-1}\supset\cdots\supset M_n\cap N_{m-1}=0$$

删掉重复项之后已经是合成列, 故 $M_{j+1}\supset M_{j+1}\cap N_{m-1}$ 可加细为长度不超过 $n-j-1$ 的饱和链. 从而 $M_j\supset N_{m-1}$ 也可加细为长度不超过 $n-j-1$ 的饱和链. 该饱和链与 $M=M_0\supsetneqq M_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq M_j$ 合并, 给出从 M 到 N_{m-1} 的长度不超过 $n-j-1+j=n-1$ 的饱和链. 由于该饱和链对应于 M/N_{m-1} 的合成列, 从而对 M/N_{m-1} 应用归纳假设, 得到 $M=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_{m-1}$ 可加细为饱和链.

注意到 N_{m-1} 的如下子模链

$$N_{m-1}\supset M_{j+1}\cap N_{m-1}\supset M_{j+2}\cap N_{m-1}\supset\cdots\supset M_n\cap N_m=0$$

在删掉重复项之后是一个饱和链. 其与上面 $M=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_{m-1}$ 加细得到的饱和链给出了从 $M=N_0\supsetneqq N_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq N_m=0$ 加细得到的 M 的合成列. 从上面的构造过程, 不难看到其因子集 (计重数) 与合成列 $M=M_0\supsetneqq M_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq M_n=0$ 的因子集 (计重数) 相同. 这样就完成了归纳过程, 从而定理得证. □

我们称 A-模 M 为有限长度的, 如果 M 存在有限长的合成列. 由 Jordan–Hölder 定理, 有限长度模 M 的任一子模列均可加细为合成列, 且这些合成列的长度均相同, 我们称这些合成列的长度为 M 的**长度**, 记为 $\ell_A(M)$, 或者 (在 A 明确的情况下) $\ell(M)$.

命题 2.4.4 设 A-模 M 是有限长度的, 则 M 的任一子模 N 及商模 M/N 也是有限长度的, 并且 $\ell(M)=\ell(N)+\ell(M/N)$.

证明 任取 M/N 的子模列, 并将其等同到 M 的包含 N 的子模列. 这与任意 N 的子模列合并为 M 的一个子模列. 再由 Jordan–Hölder 定理即知这个 M 的子模列可以加细为有限长度的合成列. 由此知 N 和 M/N 的长度有限, 并且 $\ell(M)=\ell(N)+\ell(M/N)$.□

例 2.4.1 域 k 上的单模恰为一维线性空间. 从而 k-线性空间 V 作为 k-模是有限长度的等价于 V 是有限维线性空间, 并且此时 $\ell_k(V)=\dim_k V$.

由于 $\mathbb{Z}$ 存在无限长的子模列 $\mathbb{Z}\supsetneq 2\mathbb{Z}\supsetneq 4\mathbb{Z}\supsetneq 8\mathbb{Z}\supsetneq\dots$, 故 $\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模不是有限长度的. 另一方面, 对素数 p, 可以看到 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为单的 $\mathbb{Z}$-模, 故 $\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})=1$. 一般地, 对 $n\geq 0$, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 有以下合成列

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\supsetneq p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\supsetneq p^2\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\supsetneq\cdots\supsetneq p^n\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}=0.$$

故 $\ell(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=n$.

关于有限长度模, 以下命题给出了常用的一大类例子和长度计算方法.

命题 2.4.5 设 M 为 Noether 局部环 (A,m,k) 上的有限模. 并且存在 $a\geq 1$, 使得 $m^aM=0$. 则 M 的长度有限, 并且

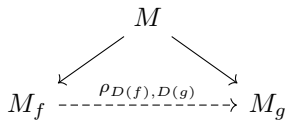
$$\ell_A(M)=\sum_{i=0}^{\infty}\dim_k(m^iM/m^{i+1}M).$$

注意当 $i\geq a$ 时, $m^iM/m^{i+1}M=0$, 故上述和式为有限和.

证明 考虑 M 的子模列 $M=m^0M\supset mM\supset m^2M\supset\cdots\supset m^aM=0$. 由命题 2.4.4 知 $\ell_A(M)=\sum_{i=0}^{a}\ell_A(m^iM/m^{i+1}M)$. 由于 m 零化 $m^iM/m^{i+1}M$, 故 $m^iM/m^{i+1}M$ 的 A-子模等同于 $m^iM/m^{i+1}M$ 作为 k-线性空间的子空间. 再由 M 的 Noether 性知 $m^iM/m^{i+1}M$ 为有限维 k-线性空间, 从而 $\ell_A(m^iM/m^{i+1}M)=\dim_k(m^iM/m^{i+1}M)$. 命题得证. □

2.5 层的观点

设 M 为 A-模. 记 $\mathcal{B}$ 为所有主开集形成的 $\operatorname{Spec} A$ 的开集基. 与环的情形类似, 我们定义 $\operatorname{Spec} A$ 上的如下 $\mathcal{B}$-预层 $\widetilde{M}$: 对主开集 $D(f)$, 令 $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$, 对 $D(g) \subset D(f)$, 令限制同态 $\rho_{D(f),D(g)}$ 为唯一的使下图交换的 A-模同态 (其存在唯一性由局部化的万有性质2.1.4保证):



由唯一性可以验证限制同态的相容性, 从而得到预层 $\widetilde{M}$. 利用1.4.2 节的记号, 不难看到当 $M = A$ 时, 我们有 $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$.

命题 2.5.1 *$\widetilde{M}$ 是 $\mathcal{B}$-层.*

证明 与环的情形一样. 只需在命题 1.4.4的证明中适当地将 A 替换为 M 即可. □

与环的情形类似, 我们可以描述 $\widetilde{M}$ 在每个点的茎.

命题 2.5.2 *对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有 $\widetilde{M}_P \simeq M_P$*

证明 直接验证即可. □

下面讨论 $\widetilde{M}$ 的支集. 为此, 我们先引入层的支集和模的零化理想的概念.

定义 2.5.1 *设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的一个 $\mathcal{B}$-层. 称以下集合*

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) \coloneqq \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

*为 $\mathcal{F}$ 的**支集**.*

设 M 为 A-模. 由 $\widetilde{M}$ 茎的描述, 可以看到 $\operatorname{Supp}(\widetilde{M})$ 与集合 $\{P \in \operatorname{Spec} A \mid M_P \neq 0\}$ 相同. 我们也将 $\operatorname{Supp}(\widetilde{M})$ 记为 $\operatorname{Supp}_A(M)$, 在 A 明确的情况下也直接记为 $\operatorname{Supp}(M)$.

命题 2.5.3 *设 A 为环, M 为 A-模. 设 $\operatorname{Supp}(M) = \{m_1, \ldots, m_r\}$ 为有限个极大理想形成的集合. 则有 A-模同构 $M \simeq M_{m_1} \times \cdots \times M_{m_r}$.*

证明 对任意 i, 对任意主开集 $D(f)$, 满足 $D(f) \cap \{m_1, \ldots, m_r\} = \{m_i\}$, 我们首先证明自然同态诱导同构 $\varphi\colon \widetilde{M}(D(f)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}_{m_i}$. 对任意截面 $s \in \widetilde{M}(D(f))$, 如果在 m_i 处的芽 $s_{m_i} = 0$, 则对每个点 $x \in D(f)$, 均有 $s_x = 0$. 故 φ 为单同态. 任取 $\widetilde{M}_{m_i}$ 中的元素 s_{m_i}, 其中 $s \in \widetilde{M}(D(g))$ 为 $D(g)$ 上的一个截面. 考虑 $D(f)$ 的开覆盖

$D(f) = D(fg) \cup \bigcup_{j=1}^{k} D(f_j)$, 其中每个 $D(f_j)$ 均不包含点 m_i. 在 $D(fg)$ 上指定截面 $s|_{D(fg)}$, 在每个 $D(f_j)$ 上指定截面 0, 容易看到这些截面满足相容性条件, 从而根据 $\widetilde{M}$ 为主开集上的层可以找到截面 $t \in \widetilde{M}(D(f))$, 使得 $t|_{D(fg)} = s|_{D(fg)}$, 故 $\varphi(t) = s_{m_i}$. 这样就得到 φ 也为满同态, 故为同构.

现在取 $\operatorname{Spec} A$ 的开覆盖 $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{k} D(f_i)$, 满足 $\forall\ i = 1, \ldots, r,\ D(f_i) \cap \{m_1, \ldots, m_r\} = \{m_i\}$, 并且 $\forall\ i = r+1, \ldots, k,\ D(f_i) \cap \{m_1, \ldots, m_r\} = \varnothing$. 由 $\operatorname{Supp}(M) = \{m_1, \ldots, m_r\}$ 可知任意指定 $D(f_i)$ 上的截面均满足相容性条件, 同时对每个 $i \geq r+1$, 均有 $\widetilde{M}(D(f_i)) = 0$, 从而由 $\widetilde{M}$ 为主开集上的层得到同构

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\operatorname{Spec} A) &\xrightarrow{\sim} \widetilde{M}(D(f_1)) \times \cdots \times \widetilde{M}(D(f_r)) \\ s &\longmapsto (s|_{D(f_1)}, \ldots, s|_{D(f_r)}) \end{aligned}$$

再结合 $\widetilde{M}(D(f_i)) \simeq \widetilde{M}_{m_i}$ 即知 $\widetilde{M}(\operatorname{Spec} A) \simeq \widetilde{M}_{m_1} \times \cdots \times \widetilde{M}_{m_r}$. 此即所要证的同构 $M \simeq M_{m_1} \times \cdots \times M_{m_r}$. □

命题 2.5.4 设 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模短正合列. 则

$$\operatorname{Supp}(M_2) = \operatorname{Supp}(M_1) \cup \operatorname{Supp}(M_3).$$

证明 由局部化函子的正合性可知, 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有以下短正合列:

$$0 \longrightarrow M_{1P} \longrightarrow M_{2P} \longrightarrow M_{3P} \longrightarrow 0.$$

从而 $M_{2P} = 0$ 当且仅当同时成立 $M_{1P} = 0$ 和 $M_{3P} = 0$. 这说明 $P \notin \operatorname{Supp}(M_2) \iff P \notin \operatorname{Supp}(M_1) \cup \operatorname{Supp}(M_3)$. □

下面的命题说明取支集是与局部化交换的.

命题 2.5.5 设 A 为环, M 为 A-模. 设 S 为 A 的乘法子集. 则 $\operatorname{Supp}_{A_S}(M_S) = \operatorname{Supp}_A(M) \bigcap \operatorname{Spec} A_S$. 这里将 $\operatorname{Spec} A_S$ 等同到 A 中与 S 交集为空的素理想全体.

证明 由局部化的定义即得. □

定义 2.5.2 设 M 为 A-模. 对于 $x \in M$, 称以下理想

$$\operatorname{ann}_A(x) \coloneqq \{a \in A \mid ax = 0\}$$

为 x 的**零化理想**. 称 $\operatorname{ann}_A(M) \coloneqq \{a \in A \mid ax = 0, \forall\ x \in M\}$ 为 M 的**零化理想**. 在环 A 明确的情况下, 我们也将 $\operatorname{ann}_A(x)$ 和 $\operatorname{ann}_A(M)$ 分别记为 $\operatorname{ann}(x)$ 和 $\operatorname{ann}(M)$.

下面的命题说明, 取零化理想和局部化操作是交换的.

命题 2.5.6 设 M 为 A-模, S 为 A 的乘法子集. 则对任意 $x \in M$, $\operatorname{ann}_{A_S}(x) = (\operatorname{ann}_A(x))_S$. 如果 M 为有限 A-模, 则 $\operatorname{ann}_{A_S}(M_S) = (\operatorname{ann}_A(M))_S$.

证明 直接验证即知 $\operatorname{ann}_{A_S}(x) = (\operatorname{ann}_A(x))_S$. 设 M 为有限 A-模, 生成元为 $x_1, \dots, x_n$. 设 $a \in A$, 并且 $a \in \operatorname{ann}_{A_S}(M_S)$, 则对每个 $i = 1, \dots, n$, 可以找到 $s_i \in S$, 使得 $s_i a x_i = 0$ 在 M 中成立. 令 $s \coloneqq s_1 \dots s_n \in S$, 则 $s a x_i = 0$, $\forall\, i$. 由此知 $sa \in \operatorname{ann}_A(M)$. 故 $\operatorname{ann}_{A_S}(M_S) \subset (\operatorname{ann}_A(M))_S$. 另一个方向的包含关系 $(\operatorname{ann}_A(M))_S \subset \operatorname{ann}_{A_S}(M_S)$ 是显然的. □

命题 2.5.7 设 M 为有限 A-模. 则 $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$.

证明 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 M 的生成元. 则对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 有

$$M_P = 0 \iff \exists\, s \in A \setminus P,\ \forall\, i,\ s x_i = 0 \iff \operatorname{ann}(M) \nsubseteq P.$$

由此得到 $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$. □

利用支集的概念, 我们可以在 Noether 环时得到有限长度模的如下刻画.

命题 2.5.8 设 A 为 Noether 环, M 为 A-模. 则有:

(i) M 为有限长度模 $\iff$ M 为有限 A-模, 且 $\operatorname{Supp}(M)$ 为有限个闭点形成的集合.

(ii) 设 M 为有限 A-模, 并且 $\operatorname{Supp}(M) = \{m_1, \dots, m_r\}$, 其中每个 m_i 均为极大理想, 那么 $\ell_A(M) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\infty} \dim_{k(m_i)}(m_i^j M / m_i^{j+1} M)$.

证明 (i): $\Longrightarrow$: 设 $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq M_n = 0$ 为 M 的一个合成列. 则对每个 $i = 0, \dots, n-1$, 有同构 $M_i / M_{i+1} \simeq A/m_i$, 其中 m_i 为极大理想. 由 M_i/M_{i+1} 为有限 A-模可知 M 为有限 A-模. 再由 $\operatorname{Supp}(A/m_i) = \{m_i\}$ 和命题 2.5.4 可知 $\operatorname{Supp}(M) = \{m_0, \dots, m_{n-1}\}$ 为有限个极大理想形成的集合.

$\Longleftarrow$: 设 M 为有限 A-模, 并且 $\operatorname{Supp}(M) = \{m_1, \dots, m_r\}$, 其中每个 m_i 均为极大理想. 由命题 2.5.3 得到 A-模同构: $M \simeq M_{m_1} \times \cdots \times M_{m_r}$. 对每个 i, 由命题 2.5.5 可知 $\operatorname{Spec} A / \operatorname{ann}(M_{m_i}) = V(\operatorname{ann}(M_{m_i})) = \operatorname{Supp}(M_{m_i}) = \{m_i\}$. 由于 A 为 Noether 环, m_i 为有限生成的理想, 从而存在正整数 t, 使得 $m_i^t \subset \operatorname{ann}(M_{m_i})$. 注意到 M_{m_i} 为 M 的商模, 从而是有限 A-模. 对 A_{m_i}-模 M_{m_i} 应用命题 2.4.5 得到 M_{m_i} 是长度有限的 A_{m_i}-模, 从而也是长度有限的 A-模, 并且有

$$\ell_A(M_{m_i}) = \ell_{A_{m_i}}(M_{m_i}) = \sum_{j=0}^{t-1} \dim_{k(m_i)}(m_i^j M / m_i^{j+1} M).$$

由同构 $M \simeq M_{m_1} \times \cdots \times M_{m_r}$ 得到 M 长度有限, 并且

$$\ell_A(M) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\infty} \dim_{k(m_i)}(m_i^j M / m_i^{j+1} M).$$

(ii): 在 (i) 的 "$\Longleftarrow$" 中已证. □

例 2.5.1 设 k 为代数封闭域. 考虑两个不可约多项式 $f, g \in k[x,y]$, 并设 $M \coloneqq k[x,y]/(f,g)$ 为有限长度的 $k[x,y]$-模. 则 $\mathrm{Supp}(M) = \{m_1, \ldots, m_r\}$ 为有限个极大理想形成的集合. 这样得到 $V(f,g) = V(\mathrm{ann}(M)) = \{m_1, \ldots, m_r\}$. 这说明 $m_1, \ldots, m_r$ 恰为曲线 $C_1 \coloneqq \{P \in \mathrm{Spec}\, k[x,y] \mid f(P) = 0\}$ 和曲线 $C_2 \coloneqq \{P \in \mathrm{Spec}\, k[x,y] \mid g(P) = 0\}$ 的交点集. 长度 $\ell(M)$ 实际上为 C_1 和 C_2 的计重数的交点个数. 在每个交点 m_i 处, 其相交重数为 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dim_k(m_i^j M / m_i^{j+1} M) = \dim_k M_{m_i}$.

习题

1. 设 A 为环.

(i) 设 $P \in M_{m\times n}(A)$ 为 A 上的 $m \times n$ 矩阵, 并且 $m < n$. 证明存在非零列向量 $x = (a_1, \ldots, a_n)^t \in A^n$, 使得 $Px = 0$.

(ii) 设 M 为 A-模. 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 M 的一组生成元. 证明 M 中任意 $n+1$ 个元素必线性相关.

(iii) 设 M 为有限 A-模, 且为自由模. 证明 M 的任意一组基的元素个数有限, 即 M 为秩有限的自由模.

2. 计算下列有限 Abel 群:

(i) $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, \dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}})$.

3. 设以下两个复形均为 A-模短正合列:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} N \xrightarrow{g} N' \longrightarrow 0$$

证明: $M' \otimes_A N' \simeq (M \otimes_A N)/T$, 其中 $T = (i \otimes 1)(K \otimes_A N) + (1 \otimes j)(M \otimes L)$.

4. 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 证明 M 同构于两个有限秩的自由模之间同态的余核.

5. 设 m 为任意正整数, $m = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ 为其素因子分解. 证明 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模, 其长度为 $\ell(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

6. 设 A 为环, M 为 A-模, 并且 $\forall\, P \in \mathrm{Spec}\, A$, 局部化 M_P 均为有限 A_P-模.

(i) 是否可以得到 M 为有限 A-模?

(ii) 如果进一步假设 $\forall\ P \in \operatorname{Spec} A$, 局部化 M_P 均为秩 1 的自由 A_P-模, 是否可以得到 M 为有限 A-模?

7. 设 A 为环, M 为 A-模. 设 $\operatorname{Spec} A = \bigcup\limits_{i\in I} D(f_i)$ 为主开集的开覆盖, 使得每个 M_{f_i} 均为有限 A_{f_i}-模. 证明 M 为有限 A-模.

8. 在命题 2.2.11 中, 假设 p 为素数, $pA = 0$, 并且对任意 $b \in B$, 均存在正整数 n, 使得 $b^{p^n} \in \varphi_1(A)$, 证明 $\operatorname{Spec}(B \otimes_A C) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} C$ 为双射.

9. 设 A 为 Noether 环, I 为理想. 设 $n \geq 1$. 证明: A/I 为有限长度 A-模 $\iff$ A/I^n 为有限长度 A-模.

10. 设 k 为域. 令 $f(x,y) \in k[x,y]$ 为多项式, 满足 $f(0,y) \neq 0$. 设 $n \geq 1$. 证明: $k[x,y]/(x^n, f)$ 为有限长度的 $k[x,y]$-模.

习题提示

10. 令 $I=(x,f)$. 先证明 $k[x,y]/(x,f)$ 长度有限, 再利用 $I^n\subset(x^n,f)$.

第三章 一些常用技术

3.1 行列式技巧

对于交换环上的矩阵, 很多在域上熟知的构造和运算性质仍然成立, 如伴随方阵, 行列式等. 我们可以借用一些矩阵技巧得到环上有限生成模的结论.

定理 3.1.1 (Cayley-Hamilton 定理) *设 M 为环 A 上的有限模, $e_1,\dots,e_n$ 为一组生成元. 设 $\varphi\colon M\longrightarrow M$ 为 M 的一个 A-模自同态. 设 $P\in M_n(A)$ 为 A 上的 n 阶方阵, 使得 $\varphi(e_1,\dots,e_n)^t=P(e_1,\dots,e_n)^t$. 则有如下 M 的自同态的等式成立:*

$$\det(\varphi \mathrm{I}_n-P)=0.$$

其中 $(e_1,\dots,e_n)^t$ 代表行向量 $(e_1,\dots,e_n)$ 作转置得到的列向量.

证明 在等式 $(\varphi \mathrm{I}_n-P)(e_1,\dots,e_n)^t=0$ 两边乘以 $\varphi \mathrm{I}_n-P$ 的伴随方阵 $(\varphi \mathrm{I}_n-P)^*$, 得到

$$\det(\varphi \mathrm{I}_n-P)(e_1,\dots,e_n)^t=(\varphi \mathrm{I}_n-P)^*(\varphi \mathrm{I}_n-P)(e_1,\dots,e_n)^t=0.$$

由 $e_1,\dots,e_n$ 为 M 的生成元, 知作为 M 的自同态有 $\det(\varphi \mathrm{I}_n-P)=0$. □

我们将上面证明 Cayley-Hamilton 定理的推理方法称为行列式技巧, 其核心为交换环上的方阵等式 $(\det P)\mathrm{I}_n=P^*P$. 下面讨论行列式技巧的更多应用.

命题 3.1.1 *设 A 为环, M 为有限 A-模. 设 $\varphi\colon M\longrightarrow M$ 为 M 的自同态. 如果 φ 为满同态, 则 φ 为同构.*

证明 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 M 的一组生成元. 由 φ 为满同态知存在 A 上的 n 阶方阵 P, 使得 $(e_1,\dots,e_n)^t = P\varphi(e_1,\dots,e_n)^t$. 在等式 $(\mathrm{I}_n - P\varphi)(e_1,\dots,e_n)^t = 0$ 两边同时乘以伴随方阵 $(\mathrm{I}_n - \varphi P)^*$, 得到 $\det(\mathrm{I}_n - \varphi P)(e_1,\dots,e_n)^t = 0$. 将行列式展开, 则得到 A 中的元 $a_1,\dots,a_n$, 使得 $1 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots + a_n\varphi^n = 0$ 作为 M 的自同态成立. 由此不难看到 φ 为单同态. 从而 φ 为同构. □

行列式技巧的另一个重要应用是如下的 Nakayama 引理.

引理 3.1.1 (Nakayama 引理) *设 (A,m) 为局部环, M 为有限 A-模. 如果 $M = mM$, 则 $M = 0$.*

证明 取 M 的一组生成元 $e_1,\dots,e_n$. 由 $M = mM$ 知存在 A 上的 n 阶方阵 P, 使得 P 的每个元素均在 m 中, 并且 $(e_1,\dots,e_n)^t = P(e_1,\dots,e_n)^t$. 在等式 $(\mathrm{I}_n - P)(e_1,\dots,e_n)^t = 0$ 两边同时乘以伴随方阵 $(\mathrm{I}_n - P)^*$, 得到 $\det(\mathrm{I}_n - P)e_i = 0,\ \forall\ i = 1,\dots,n$. 由 $\det(\mathrm{I}_n - P) \in 1 + m$ 和 (A,m) 为局部环知 $\det(\mathrm{I}_n - P) \in A^*$. 从而 $e_i = 0,\ \forall\ i = 1,\dots,n$. 这样就得到 $M = 0$ □

设 $k = A/m$ 为剩余类域. 由于 $M/mM = M \otimes_A k$, Nakayama 引理也等价于 $M \otimes_A k = 0 \implies M = 0$.

推论 3.1.1 *设 (A,m) 为局部环, M 为有限 A-模. 设 N 为 M 的子模, 并且满足 $M = mM + N$. 则 $M = N$.*

证明 对商模 M/N 应用 Nakayama 引理即可. □

推论 3.1.2 *设 (A,m,k) 为局部环, M 为有限 A-模. 设 $x_1,\dots,x_n \in M$, 使得 $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ 为 k-线性空间 $M \otimes_A k = M/mM$ 的生成元. 则 $x_1,\dots,x_n$ 为 M 的一组生成元.*

证明 令 $N = Ax_1 + \cdots + Ax_n$, 则 $M = mM + N$. 从而由推论 3.1.1 即得

$$M = Ax_1 + \cdots + Ax_n.$$

□

由该推论, 为了找 M 的生成元, 我们只需找 k-线性空间 M/mM 的一组生成元, 再将其提升到 M 中即可.

定义 3.1.1 *设 (A,m,k) 为局部环, M 为有限 A-模. M 的一组元素 $x_1,\dots,x_n$ 称为一组**极小生成元**, 如果 $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ 为 k-线性空间 M/mM 的一组基.*

由推论 3.1.2不难看到, 一组元素是 M 的极小生成元等价于其是元素个数最少的一组生成元.

例 3.1.1 设 p 为素数, 则 $\mathbb{Z}$ 在 (p) 处的局部化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 为局部环. 令 $F = \mathbb{Z}_{(p)}e_1 \oplus \mathbb{Z}_{(p)}e_2$ 是秩为 2 的自由 $\mathbb{Z}_{(p)}$-模. 令 $N = \mathbb{Z}_{(p)}(pe_1 + pe_2)$ 为 F 的子模, $M \coloneqq F/N$ 为商模. 则 $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ 为 M 的极小生成元, 但是 M 并不是自由模.

3.2 素避引理

在后面的讨论中, 我们经常需要找到一个理想 I 中的元素, 使其同时不在一些素理想 P_i 中. 下面的引理说明, 为了证明这样的元素存在, 只需要 I 不包含在每一个 P_i 中.

引理 3.2.1 (素避引理) 设 A 为环, $I, P_1, \dots, P_r$ 为 A 的理想, 并且 $P_3, \dots, P_r$ 为素理想. 如果 $\forall\, i = 1, \dots, r$, 均有 $I \nsubseteq P_i$, 那么 $I \nsubseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} P_i$.

证明 对 r 归纳. $r = 1$ 的情形是平凡的. 当 $r = 2$ 时, 由 $I \nsubseteq P_i$, 我们可以找到 $a_i \in I \setminus P_i$, $i = 1, 2$. 如果 $a_1 \notin P_2$, 则令 $a = a_1$, 如果 $a_2 \notin P_1$, 则令 $a = a_2$, 如果 $a_1 \in P_2$ 且 $a_2 \in P_1$, 则取 $a = a_1 + a_2$. 无论在那种情况, 均有 $a \in I$ 且 $a \notin P_1 \bigcup P_2$. 故 $I \nsubseteq P_1 \bigcup P_2$.

假设 $r \geq 3$. 不妨假设这些 P_i 之间没有包含关系. 由归纳假设, 存在 $a \in I$, 使得 $a \notin \bigcup\limits_{i=1}^{r-1} P_i$. 如果 $a \notin P_r$, 则结论得证. 假设 $a \in P_r$. 由 $P_i \nsubseteq P_r$, $i = 1, \dots, r-1$, 以及 $I \nsubseteq P_r$, 知 $IP_1 \dots P_{r-1} \nsubseteq P_r$. 故可以找到 $b \in IP_1 \dots P_{r-1}$, 使得 $b \notin P_r$. 不难验证 $a + b \in I \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{r} P_i)$. 从而结论得证. □

3.3 Artin–Rees 引理与完备化

引理 3.3.1 (Artin–Rees 引理) 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 设 I 为 A 的理想, N 为 M 的子模. 则存在正整数 $c \geq 1$, 使得对任意 $i \geq c$, 均有

$$I^i M \bigcap N = I^{i-c}(I^c M \bigcap N).$$

证明 设 $a_1, \dots, a_n$ 为 I 的生成元, $e_1, \dots, e_m$ 为 M 的生成元. 考虑如下集合

$$K \coloneqq \big\{(f_1, \dots, f_m) \in A[x_1, \dots, x_n]^m \mid f_1, \dots, f_n \text{ 为同次数的齐次多项式, 且 } \textstyle\sum_{q=1}^{m} f_q(a_1, \dots, a_n) e_q \in N \big\}.$$

将 $A[x_1, \dots, x_n]^m$ 看作秩为 m 的自由 $A[x_1, \dots, x_n]$-模, 令 $\tilde{K}$ 为 K 生成的 $A[x_1, \dots, x_n]^m$ 的子模. 由 Hilbert 基定理, $A[x_1, \dots, x_n]$ 为 Noether 环, 故 $A[x_1, \dots, x_n]^m$ 为 Noether $A[x_1, \dots, x_n]$-模. 从而 $\tilde{K}$ 为有限 $A[x_1, \dots, x_n]$-模. 设 $k_1, \dots, k_r \in K$ 为 $\tilde{K}$ 的生成元, 并且 $k_p = (f_{p1}, \dots, f_{pm})$, $p = 1, \dots, r$. 设 $x \in I^i M \bigcap N$, 则存在 i 次齐次多项式 $g_1, \dots, g_m \in A[x_1, \dots, x_n]$, 使得 $x = \sum_{q=1}^{m} g_q(a_1, \dots, a_n) e_q$. 这样得到 $(g_1, \dots, g_m) \in \tilde{K}$. 令 c 为 $\deg f_{pq}$ $(1 \leq p \leq r, 1 \leq q \leq m)$ 的最大值. 则当 $i \geq c$ 时, 不难看到存在齐次多项式 $h_1, \dots, h_r \in A[x_1, \dots, x_n]$, 使得 $(g_1, \dots, g_m) = \sum_{p=1}^{r} h_p k_p$, 并

且 $\deg h_p = i - \deg k_p \geq i - c$. 这里 $\deg k_p$ 是指 k_p 的任一分量的次数. 再由 x 的表达式即知

$$x = \sum_{q=1}^{m} g_q(a_1, \ldots, a_n)e_q = \sum_{p=1}^{r} h_p(a_1, \ldots, a_n)(\sum_{q=1}^{m} f_{pq}(a_1, \ldots, a_n)e_q) \in I^{i-c}(I^c M \bigcap N).$$

□

作为推论, 有下面的定理.

定理 3.3.1 (Krull 交集定理) 设 (A, m) 为 Noether 局部环, 设 M 为有限 A-模. 则 $\bigcap_{i\geq 0} m^i M = 0$.

证明 令 $N = \bigcap_{i\geq 0} m^i M$. 由 Artin–Rees 引理, 存在 $c \geq 0$, 使得对任意 $i \geq c$, 均有 $m^i M \bigcap N = m^{i-c}(m^c M \bigcap N)$. 取 $i = c + 1$, 即得

$$N = m^{c+1} M \bigcap N = m(m^c M \bigcap N) \subset mN.$$

从而 $N = mN$. 再由 Nakayama 引理即得 $N = 0$. □

设 A 为环, 对 $n \geq 1$, $\varphi_n \colon M_n \longrightarrow M_{n-1}$ 为 A-模同态. 如下集合

$$\varprojlim_n M_n \coloneqq \left\{ (\cdots, x_1, x_0) \in \prod_{n=0}^{\infty} M_n \mid \varphi_n(x_n) = x_{n-1}, \forall\ n \geq 1 \right\}$$

显然为乘积模 $\prod_{n=0}^{\infty} M_n$ 的子模. 我们称 $\varprojlim_n M_n$ 为这一族模 M_n 在同态 φ_n 下的**逆极限**, 或称为 **投射极限**.

如果 I 为环 A 的理想, M 为 A-模. 则商模 $M_n \coloneqq M/I^{n+1}M$ 之间有自然的商同态 $M/I^{n+1}M \longrightarrow M/I^n M,\ n \geq 0$. 这样得到的逆极限 $\varprojlim_n M/I^{n+1}M$ 称为 M 在理想 I 处的**完备化**, 记为 $\widehat{M}$.

注意到 $\widehat{A}$ 为乘积环 $\prod_{n=0}^{\infty} A/I^{n+1}$ 的子环. 这样我们总是将 $\widehat{A}$ 看作环. A 到 $\widehat{A}$ 有一个自然的环同态 $a \mapsto (a_n)$, 其中 $a_n = a,\ \forall\ n \geq 0$. 另一方面, 对 $(a_n) \in \widehat{A}$, 对 $(x_n) \in \widehat{M}$, 通过令 $(a_n) \cdot (x_n) \coloneqq (a_n x_n)$, 我们看到 $\widehat{M}$ 为 $\widehat{A}$-模. 通过自然同态 $A \longrightarrow \widehat{A}$ 将 $\widehat{M}$ 看作 A-模, 则 $x \mapsto (x_i)$, $x_i = x$ 是一个 A-模同态 $M \longrightarrow \widehat{M}$. 我们一般将 $x \in M$ 在 $\widehat{M}$ 中的像仍记作 x. 设 $f \colon M \longrightarrow N$ 为 A-模同态, 则 $\hat{f} \colon \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$, $(x_n) \mapsto (f(x_n))$ 为 $\widehat{A}$-模同态. 这样, 在 I 处作完备化是一个从 A-模范畴到 $\widehat{A}$-模范畴的一个函子. 我们将证明在适当的有限性条件下这个函子是正合的.

例 3.3.1 设 $A=\mathbb{C}[x]$, $I=(x)$. 则容易看到有环同构:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[\![x]\!] &\xrightarrow{\sim} \widehat{A}=\varprojlim_n \mathbb{C}[x]/(x^{n+1})\\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i &\longmapsto (\sum_{i=0}^{n} c_i x^i)\end{aligned}$$

受上面例子的启发, 对任意环 A 以及 A 的理想 I, 对于一族元素 $a_i\in I^i$, $i\geq 0$, 我们用无穷和 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ 代表 $\widehat{A}=\varprojlim_n A/I^{n+1}$ 中的元素 (b_n), 其中 $b_n=\sum_{i=0}^{n} a_i,\ \forall\, n\geq 0$. 不难看到, $\widehat{A}$ 中的每个元素均可以表示为这样的无穷和. 类似地, 对 A-模 M, 对一组元素 $x_i\in I^iM$, 我们用无穷和 $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ 代表 $\widehat{M}=\varprojlim_n M/I^{n+1}M$ 中的元素 (b_n), 其中 $b_n=\sum_{i=0}^{n} x_i,\ \forall\, n\geq 0$. 同样地, $\widehat{M}$ 中的元素均可表示为这样的无穷和.

本节剩下的命题中, 对于环 A 以及 A 上的模, 如不特别说明, 完备化均指在某一个固定理想 I 处的完备化, 如果 A 为局部环, 则默认完备化为在 A 的唯一极大理想处的完备化.

命题 3.3.1 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 A-模 M 的一组生成元, 则 $e_1,\dots,e_n$ 也为 $\widehat{A}$-模 $\widehat{M}$ 的生成元.

证明 设 $x\in\widehat{M}$, 则存在 $x_i\in I^iM$, 使得 $x=\sum_{i=0}^{\infty} x_i$. 对每个 i, 又可找到 $a_{ij}\in I^i$, 使得 $x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$. 这样得到 $x=\sum_{i=0}^{\infty} x_i=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij})e_j$. 对每个 j, 令 $a_j=\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\in\widehat{A}$ 即得 $x=\sum_{j=1}^{n} a_j e_j$. □

命题 3.3.2 设 $\varphi\colon M\longrightarrow N$ 为有限 A-模的满同态, 则 $\widehat{\varphi}\colon \widehat{M}\longrightarrow\widehat{N}$ 为 $\widehat{A}$-模的满同态.

证明 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 M 的生成元, 则由 φ 为满同态知 $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$ 为 N 的生成元. 从而由命题 3.3.1 知 $e_1,\dots,e_n$ 生成 $\widehat{M}$, $\widehat{\varphi}(e_1),\dots,\widehat{\varphi}(e_n)$ 生成 $\widehat{N}$. 故 $\widehat{\varphi}$ 为满同态.□

命题 3.3.3 (完备化的正合性) 设 A 为 Noether 环. 设 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 为有限 A-模的短正合列, 则 $0\longrightarrow\widehat{M_1}\longrightarrow\widehat{M_2}\longrightarrow\widehat{M_3}\longrightarrow 0$ 为有限 $\widehat{A}$-模的短正合列. 用函子语言, 这等价于说完备化是从有限 A-模范畴到有限 $\widehat{A}$-模范畴的一个正合函子.

证明 由命题 3.3.1 知完备化将有限 A-模变为有限 $\widehat{A}$-模. 由 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 为短正合列, 知 $M_3\simeq M_2/M_1$, 从而对任意 $i\geq 1$, 有

$$\frac{M_3}{I^iM_3}\simeq\frac{M_2/M_1}{I^i(M_2/M_1)}\simeq\frac{M_2}{I^iM_2+M_1}\simeq\frac{M_2/I^iM_2}{M_1/(I^iM_2\cap M_1)}.$$

这样得到短正合列 $0\longrightarrow M_1/(I^iM_2\cap M_1)\longrightarrow M_2/I^iM_2\longrightarrow M_3/I^iM_3\longrightarrow 0$. 由此可

以直接验证有逆极限的左正合列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1) \longrightarrow \varprojlim_i M_2/I^{i+1}M_2 \longrightarrow \varprojlim_i M_3/I^{i+1}M_3.$$

由下面的引理 3.3.2, 自然的模同态 $M_1/I^{i+1}M_1 \longrightarrow M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1)$ 诱导逆极限的同构 $\varprojlim_i M_1/I^{i+1}M_1 \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1)$. 从而有左正合列 $0 \longrightarrow \widehat{M_1} \longrightarrow \widehat{M_2} \longrightarrow \widehat{M_3}$. 根据命题 3.3.2, $\widehat{M_2} \longrightarrow \widehat{M_3}$ 为满同态. 故 $0 \longrightarrow \widehat{M_1} \longrightarrow \widehat{M_2} \longrightarrow \widehat{M_3} \longrightarrow 0$ 为短正合列. □

引理 3.3.2 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想, M_2 为有限 A-模, M_1 为 M_2 的子模. 则自然的模同态 $M_1/I^{i+1}M_1 \longrightarrow M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1)$ 诱导逆极限的同构

$$\varprojlim_i M_1/I^{i+1}M_1 \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1).$$

证明 记 $\varphi\colon \varprojlim_i M_1/I^{i+1}M_1 \longrightarrow \varprojlim_i M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1)$ 为诱导的逆极限之间的同态. 由 Artin–Rees 引理, 存在 $c \geq 0$, 使得对任意 $i \geq c$, 均有

$$I^{i+1}M_2 \cap M_1 = I^{i-c+1}(I^c M_2 \cap M_1).$$

先证 φ 为单同态. 设 $(x_i) \in \operatorname{Ker}\varphi$. 则对任意 $i \geq 0$, $x_i \in I^{i+1}M_2 \cap M_1$. 特别地, $x_{i+c} \in I^{i+c+1}M_2 \cap M_1 = I^{i+1}(I^c M_2 \cap M_1) \subset I^{i+1}M_1$. 由 x_i 之间的相容性知 $x_i = \overline{x_{i+c}} = 0 \in M_1/I^{i+1}M_1$. 这就证明了 $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

再证 φ 为满同态. 任取 $(y_i) \in \varprojlim_i M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1)$. 对任意 i, 取定 $z_i \in M_1/I^{i+1}M_1$ 为 y_i 在满同态 $M_1/I^{i+1}M_1 \longrightarrow M_1/(I^{i+1}M_2 \cap M_1)$ 下的一个原像. 由 y_i 的相容性可以看到, 对任意 $d \geq 0$, z_{i+c} 和 z_{i+c+d} 在 $M_1/I^{i+1}M_1$ 中的像相同. 这样, 对每个 $i \geq 0$, 令 $x_i \coloneqq \overline{z_{i+c}} \in M_1/I^{i+1}M_1$, 即可验证 $(x_i) \in \varprojlim_i M_1/I^{i+1}M_1$, 并且 (x_i) 在 φ 下的像即为 (y_i). □

命题 3.3.4 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 则有 $\widehat{A}$-模同构 $\widehat{M} \simeq M \otimes_A \widehat{A}$.

证明 对每个 A-模 M 均有 $\widehat{A}$-模同态 $M \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{M}$, $x \otimes (a_i) \mapsto (a_i x)$.

由条件知存在右正合列 $A^n \longrightarrow A^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$. 分别对其作用张量积函子 $\cdot \otimes_A \widehat{A}$ 和完备化函子, 得到如下右正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
A^n \otimes_A \widehat{A} & \longrightarrow & A^m \otimes_A \widehat{A} & \longrightarrow & M \otimes_A \widehat{A} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \\
\widehat{A}^n & \longrightarrow & \widehat{A}^m & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

不难看到 φ_1 和 φ_2 均为自由 $\widehat{A}$-模之间的同构, 从而 φ_3 也为同构. □

命题 3.3.5 设 A 为 Noether 环, $\widehat{A}$ 为 A 在理想 I 处的完备化. 设 J 为 A 的理想, 则 $\widehat{J} = J\widehat{A}$. 这里通过自然的单同态, 我们将 $\widehat{J}$ 看作 $\widehat{A}$ 的理想, 而 $J\widehat{A}$ 是指 J 在 $\widehat{A}$ 中生成的理想.

证明 由完备化的正合性知 $\widehat{J} \hookrightarrow \widehat{A}$ 为单同态, 从而可将 $\widehat{J}$ 看作 $\widehat{A}$ 的理想. 由命题 3.3.1 知 J 的生成元 $a_1, \dots, a_n$ 也为 $\widehat{J}$ 的生成元. 从而 $\widehat{J} = J\widehat{A}$. □

命题 3.3.6 设 A 为 Noether 环, 则 $\widehat{A}$ 也是 Noether 环.

证明 设 $\widehat{A}$ 为 A 在理想 I 处的完备化. 设 $a_1, \dots, a_n$ 为 I 的生成元. 考虑如下映射:

$$\begin{aligned} \varphi\colon A[\![x_1, \dots, x_n]\!] &\longrightarrow \widehat{A} \\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} f_i(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

这里 $f_i \in A[x_1, \dots, x_n]$ 为 i 次齐次多项式. 容易看到 φ 为满的环同态. 从而由 $A[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 为 Noether 环知 $\widehat{A}$ 为 Noether 环. □

命题 3.3.7 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 则 $(\widehat{A}, m\widehat{A}, k)$ 也为 Noether 局部环.

证明 $\widehat{A}$ 的 Noether 性前面已证. 任取 $a \in m\widehat{A}$, 则 $(1-a)^{-1} \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} a^i$ 为 $\widehat{A}$ 中良好定义的元素, 并且 $(1-a)(1-a)^{-1} = 1$. 故对任意 $a \in m\widehat{A}$, $1-a$ 均为 A 中的乘法可逆元. 从而知 $m\widehat{A}$ 包含在 A 的任一极大理想中. 又由于 $\widehat{A}/\widehat{m} = \widehat{A/m} = A/m = k$ 为域, 并且 $\widehat{m} = m\widehat{A}$, 即知 $m\widehat{A}$ 为 $\widehat{A}$ 的唯一极大理想. □

在极大理想处作完备化时, 以下性质可以简化运算.

命题 3.3.8 设 m 为环 A 的极大理想, M 为 A-模. 则有同构 $\widehat{M_m} \simeq \widehat{M}$. 其中 $\widehat{M_m}$ 为 A_m-模 M_m 在理想 mA_m 处的完备化, 而 $\widehat{M}$ 为 M 在 m 处的完备化.

证明 对任意 $i \geq 1$, 由商和局部化交换可得同构

$$M_m/m^i M_m \simeq (M/m^i M)_m \simeq M/m^i M,$$

其中第二个同构是因为乘法子集 $A \setminus m$ 在 $M/m^i M$ 上的作用已经是可逆的. 对上面的同构取逆极限即得 $\widehat{M_m} \simeq \widehat{M}$. □

例 3.3.2 设 p 为素数, 整数环 $\mathbb{Z}$ 在 (p) 处的完备化记为 $\mathbb{Z}_p$, 称为 **p-进整数环**. 由命题 3.3.8 知 $\mathbb{Z}_p \simeq \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}}$. 这样 $\mathbb{Z}_p$ 为 Noether 局部环, 并且其极大理想为 $p\mathbb{Z}_p$, 剩余类域为 $\mathbb{F}_p$.

例 3.3.3 考虑 $\mathbb{C}$-代数 $A=\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$ 和 $B=\mathbb{C}[x,y]/(xy)$, 以及 A 的极大理想 $m=(x,y)$ 和 B 的极大理想 $n=(x,y)$. 容易看到 A 为整环, 从而局部环 A_m 也是整环. 由此得到 A_m 和 B_n 作为 $\mathbb{C}$-代数不同构. 另一方面, 我们有完备化的同构 $\widehat{A_m}\simeq\widehat{B_n}$. 这是因为首先由命题 3.3.8 可知 $\widehat{A_m}$ 同构于 A 在 m 处的完备化 $\widehat{A}$. 对 $\mathbb{C}[x,y]$-模的短正合列

$$0\longrightarrow(y^2-x^2-x^3)\longrightarrow\mathbb{C}[x,y]\longrightarrow A\longrightarrow 0$$

在理想 (x,y) 处作完备化, 并利用命题 3.3.5, 得到

$$\widehat{A}\simeq\widehat{\mathbb{C}[x,y]}/(y^2-x^2-x^3)\simeq\mathbb{C}[\![x,y]\!]/(y^2-x^2-x^3).$$

故 $\widehat{A_m}\simeq\mathbb{C}[\![x,y]\!]/(y^2-x^2-x^3)$. 同理有同构 $\widehat{B_n}\simeq\mathbb{C}[\![x,y]\!]/(xy)$. 通过 $\sqrt{1+x}$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开, 可以看到存在 $u\in\mathbb{C}[\![x,y]\!]$ 满足 $u^2=1+x$. 通过幂级数运算, 可以验证 $x\longmapsto y+ux$, $y\longmapsto y-ux$ 诱导了 $\mathbb{C}[\![x,y]\!]$ 到自身的 $\mathbb{C}$-代数同构, 进而给出同构 $\mathbb{C}[\![x,y]\!]/(y^2-x^2-x^3)\simeq\mathbb{C}[\![x,y]\!]/(xy)$. 这就验证了完备化的同构 $\widehat{A_m}\simeq\widehat{B_n}$. 该例子的几何解释如下: 考虑两个代数曲线 $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid y^2-x^2-x^3=0\}$ 和 $C_2=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid xy=0\}$. 则 C_1 和 C_2 在原点 $(0,0)$ 处的每个 Zariski 开邻域上都不同构, 而它们作为解析曲线, 在原点 $(0,0)$ 处充分小的欧式邻域上是同构的. 这说明作完备化具有比 Zariski 开邻域更 “局部” 的效果.

3.4 伴随素理想

伴随素理想是极小素理想的一种推广, 其在研究 Noether 环上的有限模时起着重要的作用.

定义 3.4.1 设 A 为环, M 为 A-模. A 的素理想 P 称为 M 的一个**伴随素理想**, 如果存在 $x\in M$, 使得 $P=\operatorname{ann}(x)$. M 的所有伴随素理想的集合记为 $\operatorname{Ass}_A(M)$ 或 $\operatorname{Ass}(M)$.

环 A 的伴随素理想是指 A 作为 A-模的伴随素理想. 环 A 的所有伴随素理想形成的集合记为 $\operatorname{Ass}(A)$.

由定义, 一个素理想 P 为伴随素理想等价于存在一个 A-模的单同态 $A/P\hookrightarrow M$.

下面的命题给出了伴随素理想的存在性.

命题 3.4.1 设 A 为 Noether 环, M 为非零 A-模. 则集合 $S\coloneqq\{\operatorname{ann}(x)\mid x\in M,x\neq 0\}$ 的每个极大元均为 M 的伴随素理想. 特别地, $\operatorname{Ass}(M)\neq\varnothing$.

证明 设 $I=\operatorname{ann}(x)$ 为 S 的一个极大元. 下面证明 I 为素理想. 设 $a,b\in A$ 且 $ab\in I$. 则 $abx=0$. 设 $b\notin I$, 则 $bx\neq 0$, 并且 $a\in\operatorname{ann}(bx)$. 而 $I\subset\operatorname{ann}(bx)\subsetneq A$. 从而由 I 的极大性知 $I=\operatorname{ann}(bx)$, 这样得到 $a\in I$. 由此知 I 为素理想. 故 $I\in\operatorname{Ass}(M)$.

再注意到集合 S 非空, 从而由 A 的 Noether 性知该集合存在极大元. □

对 A-模 M, 我们称 $a \in A$ 为 M 的一个**零因子**, 如果存在 $0 \neq x \in M$, 使得 $ax = 0$.

推论 3.4.1 设 A 为 Noether 环, M 为非零 A-模. 则 $\bigcup\limits_{P \in \mathrm{Ass}(M)} P$ 恰为 M 的所有零因子形成的集合.

证明 这是命题 3.4.1 的直接推论. □

对 A-模 M, 一个元素 $a \in A$ 称为 M-**正则元**, 如果乘 a 映射 $M \longrightarrow M$, $x \mapsto ax$ 为单同态. 当 $M = A$ 时, M-正则元也直接称为正则元. 由推论 3.4.1, 在 A 为 Noether 环时, a 为 M-正则元等价于 a 不在任何一个伴随素理想中. 后面我们经常利用这个判别法来找 M-正则元.

下面分析伴随素理想的有限性.

命题 3.4.2 设 A 为环, $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模短正合列. 则 $\mathrm{Ass}(M_2) \subset \mathrm{Ass}(M_1) \bigcup \mathrm{Ass}(M_3)$.

证明 设 $P = \mathrm{ann}(x) \in \mathrm{Ass}(M_2)$. 则 $A/P \simeq Ax \subset M_2$. 如果 $Ax \bigcap M_1 = 0$, 则复合映射 $Ax \hookrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ 为单同态, 从而 $P \in \mathrm{Ass}(M_3)$. 如果 $Ax \bigcap M_1 \neq 0$. 任取 $0 \neq y \in Ax \bigcap M_1$, 由 $Ax \simeq A/P$ 且 A/P 作为环是整环, 可以看到 $\mathrm{ann}_A(y) = P$, 故 $P \in \mathrm{Ass}(M_1)$. □

对 A-模 M, 如果 A 的理想 I 满足 $IM = 0$, 则 M 也可以自然地看成 A/I-模. 通过将 $\mathrm{Spec}\, A/I$ 等同到 $\mathrm{Spec}\, A$ 的闭子集 $V(I)$, 容易看到有 $\mathrm{Ass}_{A/I}(M) = \mathrm{Ass}_A(M)$. 特别地, 商环 A/I 的伴随素理想集合 $\mathrm{Ass}(A/I)$ 可以等同到 $\mathrm{Ass}_A(A/I)$. 后面我们经常不加说明地利用这个等同, 将 $\mathrm{Ass}(A/I)$ 看作 $\mathrm{Spec}\, A$ 的子集. 下面的命题说明取伴随素理想是与局部化交换的.

命题 3.4.3 设 A 为 Noether 环, M 为 A-模. 设 S 为 A 的乘法子集. 则 $\mathrm{Ass}_{A_S}(M_S) = \mathrm{Ass}_A(M) \bigcap \mathrm{Spec}\, A_S$. 这里将 $\mathrm{Spec}\, A_S$ 等同到 A 中与 S 交集为空的素理想全体.

证明 (i): 先证 $\mathrm{Ass}_{A_S}(M_S) \subset \mathrm{Ass}_A(M) \bigcap \mathrm{Spec}\, A_S$. 设 $P \in \mathrm{Ass}_{A_S}(M_S)$, 则存在 $x \in M$, 使得 $P = \mathrm{ann}_{A_S}(x)$. 设 $a_1, \ldots, a_r$ 为 P 的生成元, 则对每个 i, 存在 $s_i \in S$, 使得 $s_i a_i x = 0$. 由此不难看到 $P = \mathrm{ann}_A(s_1 \cdots s_r x)$. 故 $P \in \mathrm{Ass}_A(M) \bigcap \mathrm{Spec}\, A_S$.

(ii): 再证 $\mathrm{Ass}_A(M) \bigcap \mathrm{Spec}\, A_S \subset \mathrm{Ass}_{A_S}(M_S)$. 设 $P \in \mathrm{Ass}_A(M) \bigcap \mathrm{Spec}\, A_S$. 则存在 $x \in M$, 使得 $P = \mathrm{ann}_A(x)$, 并且 $P \bigcap S = \varnothing$. 从而将 P 看作 A_S 的素理想时, 有 $P = \mathrm{ann}_{A_S}(x)$. 故 $P \in \mathrm{Ass}_{A_S}(M_S)$. □

综合利用上面的几个命题, 我们得到以下关于 Noether 环上有限模的伴随素理想的基本性质.

定理 3.4.1 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模, 则

(i) 存在 M 的有限长子模列 $0=M_0\subsetneq M_1\subsetneq\cdots\subsetneq M_n=M$, 使得 $\forall\, i=1,\dots,n$, 有 $M_i/M_{i-1}\simeq A/P_i$, 其中 $P_i\in\operatorname{Spec}A$ 为 A 的素理想.

(ii) $\operatorname{Ass}(M)$ 为有限集合.

(iii) $\operatorname{Ass}(M)\subset\operatorname{Supp}(M)=V(\operatorname{ann}(M))$.

(iv) $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元形成的集合与 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元形成的集合相同.

证明 (i): 任取 $P_1=\operatorname{ann}(x_1)\in\operatorname{Ass}(M)$, 令 $M_1=Ax_1$, 则 $M_1\simeq A/P_1$. 如果 $M_1\neq M$, 则取 $P_2=\operatorname{ann}(\bar{x}_2)\in\operatorname{Ass}(M/M_1)$, 这样得到 $A/P_2\simeq A\bar{x}_2$. 由 M/M_1 的子模 $A\bar{x}_2$ 对应到 M 的子模 $M_2\coloneqq Ax_2+M_1$, 得到 $M_1\subsetneq M_2$, 且 $M_2/M_1\simeq A\bar{x}_2\simeq A/P_2$. 继续操作下去, 我们得到 M 的子模形成的升链 $M_1\subsetneq M_2\subsetneq\cdots$, 由 M 为 Noether 模可知这个子模升链在有限步稳定, 故存在 n 使得 $M_n=M$.

(ii): 注意到对素理想 $P\in\operatorname{Spec}A$, 由 A/P 为整环可知 $\operatorname{Ass}_A(A/P)=\{P\}$. 再由 (i) 和命题 3.4.2 即知 $\operatorname{Ass}(M)$ 有限.

(iii): 设 $P\in\operatorname{Ass}(M)$, 则由于取伴随素理想和局部化交换 (命题 3.4.3) 知 $P\in\operatorname{Ass}_{A_P}(M_P)$, 特别地, $\operatorname{Ass}_{A_P}(M_P)$ 非空. 故 $M_P\neq 0$, 即 $P\in\operatorname{Supp}(M)$.

(iv): 设 $P\in\operatorname{Spec}A$. 由于取伴随素理想和局部化交换 (命题 3.4.3) 可知 P 为 $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元 $\iff\operatorname{Ass}_{A_P}(M_P)=\{PA_P\}$. 另一方面, 由取支集和局部化交换 (命题 2.5.5) 可知 P 为 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元 $\iff\operatorname{Supp}_{A_P}(M_P)=\{PA_P\}$. 再由 (iii) 不难看到 $\operatorname{Ass}_{A_P}(M_P)=\{PA_P\}\iff\operatorname{Supp}_{A_P}(M_P)=\{PA_P\}$. 综上即得 P 为 $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元 $\iff P$ 为 $\operatorname{Supp}(M)$ 的极小元. □

在上面的定理中取 $M=A$, 即得 A 的极小素理想有限的另一个证明 (命题 1.5.4). 现在可以将命题 2.1.5 加强为如下的

命题 3.4.4 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 设 $x\in M$, 则 $x=0\iff\forall\, P\in\operatorname{Ass}(M)$, 均有 x 在 M_P 中为 0.

证明 只需证明 $\Longleftarrow$. 如果在 M 中, $x\neq 0$, 那么 $\operatorname{ann}(x)$ 为 A 的真理想, 从而由命题 3.4.1, 存在 $P\in\operatorname{Ass}(M)$ 包含 $\operatorname{ann}(x)$. 这与 x 在 M_P 中为 0 矛盾. 故在 M 中有 $x=0$. □

同样地, 在 Noether 整环的情形可以将命题 1.3.14 加强为

命题 3.4.5 设 A 为 Noether 整环, $K=\operatorname{Frac}(A)$. 设 $x=\frac{b}{a}\in K$. 如果对商环 $A/(a)$ 的任意伴随素理想 $P\in\operatorname{Ass}(A/(a))$, 通过将 P 等同于 A 中包含 (a) 的素理想, 均有 $x\in A_P$, 则 $x\in A$.

证明 与命题 1.3.14 的证明思路一样, 考虑理想 $I\coloneqq\{s\in A\mid sx\in A\}$. 不难看到, $(a)\subset I$, 并且 $I/(a)=\operatorname{ann}_{A/(a)}(\bar{b})$. 如果 $I\neq A$, 则 $I/(a)$ 为 $A/(a)$ 的真理想, 从而由命题 3.4.1 知存在 $P\in\operatorname{Ass}(A/(a))$, 使得 $I/(a)\subset P$. 另一方面, 通过将 P 等同于 A 中包含 (a) 的素理想, 由 $x\in A_P$ 知存在 $s\in A\setminus P$, 使得 $sx\in A$, 即 $s\in I$. 这样在 $A/(a)$

中有 $\bar{s} \in I/(a)$, 并且 $\bar{s} \notin P$. 这与 $I/(a) \subset P$ 矛盾. 故 $I = A$, 即得 $x \in A$. □

3.5 应用: 符号幂与准素分解

我们应用前几节的技术 (伴随素理想, 局部化, Artin–Rees 引理) 来讨论 Noether 环中的准素分解.

定义 3.5.1 设 A 为 Noether 环, $P \in \operatorname{Spec} A$. 称 A 的理想 I 为 P-**准素理想**, 如果 $\operatorname{Ass}_A(A/I) = \{P\}$. 这也等价于 $I \subset P$, 并且商环 A/I 恰有一个伴随素理想 P/I.

由定义, 素理想均为准素理想. 对于 Noether 局部环 (A, m), 容易看到对任意正整数 $s \geq 1$, 商环 A/m^s 只有一个素理想 m, 从而也只有一个伴随素理想, 这样得到 m^s 为 A 的准素理想. 对一般的 Noether 环 A, 我们可以通过局部化得到伴随素理想: 取一个素理想 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则对任意正整数 s, 可以看到 P 是环 A_P/P^sA_P 的唯一素理想, 从而也是其唯一的伴随素理想. 考虑自然同态 $A \longrightarrow A_P/P^sA_P$, 记 $P^{(s)}$ 为其核, 则有单同态 $A/P^{(s)} \hookrightarrow A_P/P^sA_P$, 这样得到 P 是 $A/P^{(s)}$ 的唯一伴随素理想. 由此, 我们得到

定义–命题 3.5.1 设 P 为 Noether 环 A 的素理想. 对正整数 $s \geq 1$, P 的 s-次**符号幂** $P^{(s)}$ 定义为自然同态 $A \longrightarrow A_P/P^sA_P$ 的核. $P^{(s)}$ 为 P-准素理想.

命题 3.5.1 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的 P-准素理想. 则有:

(i) $P^{(s)}A_P = P^sA_P$.

(ii) $\sqrt{I} = P$.

(iii) 存在 $s \geq 1$, 使得 $P^{(s)} \subset I$.

证明 (i): 对 A-模的左正合列 $0 \longrightarrow P^{(s)} \longrightarrow A \longrightarrow A_P/P^sA_P$ 在 P 处做局部化, 得到左正合列 $0 \longrightarrow P^{(s)}A_P \longrightarrow A_P \longrightarrow A_P/P^sA_P$. 由此知 $P^{(s)}A_P$ 为商同态 $A_P \longrightarrow A_P/P^sA_P$ 的核, 即 $P^{(s)}A_P = P^sA_P$.

(ii): 由于 A/I 的极小素理想均为伴随素理想, 故 P/I 为 A/I 的唯一极小素理想, 从而在商环 A/I 中有 $\sqrt{(0)} = P/I$, 故在 A 中有 $\sqrt{I} = P$.

(iii): 这等价于要证存在 $s \geq 1$, 使得 $P^{(s)}$ 在 A/I 中为 0. 由命题 3.4.4 以及 $\operatorname{Ass}_A(A/I) = \{P\}$, 只需证明存在 $s \geq 1$, 使得 $P^{(s)}$ 在 $(A/I)_P = A_P/IA_P$ 中为 0. 由 (i), 又只需证存在 $s \geq 1$, 使得 P^s 在 $(A/I)_P$ 中为 0. 而这由 P 为 A/I 中的唯一极小素理想即得. □

几何上看, $f \in P^{(s)}$ 等价于 f 在 $V(P)$ 的一个非空开集上零点的阶不小于 s. 由于 A 的所有伴随素理想附近的行为控制着 f 在 A 中是否为零 (命题 3.4.4), 故我们可以期望下面的性质.

命题 3.5.2 设 A 为 Noether 环, 设 $\operatorname{Ass}(A) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. 则存在正整数 $s \geq 1$, 使

得

$$0 = P_1^{(s)} \bigcap P_2^{(s)} \bigcap \cdots \bigcap P_m^{(s)}.$$

证明 记 $I_s = P_1^{(s)} \bigcap P_2^{(s)} \bigcap \cdots \bigcap P_m^{(s)}$. 我们希望找到 $s \geq 1$, 使得 I_s 在每个 A_{P_i} 中均为 0, $1 \leq i \leq m$.

首先考虑极小素理想. 不妨设 $P_1, \ldots, P_n$ $(n \leq m)$ 为 A 的所有极小素理想. 由于 A_{P_i} $(1 \leq i \leq n)$ 为零维 Noether 局部环, 不难看到存在 $s_1 \geq 1$, 使得 I_{s_1} 在每个 A_{P_i} $(1 \leq i \leq n)$ 中均为 0.

假设 $I_{s_1} \neq 0$. 将 I_{s_1} 看作 A-模, 则 $\mathrm{Supp}(I_{s_1}) = V(\mathrm{ann}(I_{s_1}))$ 不包含 $P_1, \ldots, P_n$. 并且 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的极小元也为 I_{s_1} 的伴随素理想, 从而也为 A 的伴随素理想 (I_{s_1} 是 A 的子模). 任取 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的一个极小元 Q, 则 Q 等于某个 P_i, $n+1 \leq i \leq m$. 由极小性, 存在 $s \geq 1$, 使得在 A_Q 中有 $Q^s A_Q \subset \mathrm{ann}(I_{s_1} A_Q)$, 这样得到在 A_Q 中 $Q^s I_{s_1} = 0$. 由 Artin–Rees 引理 3.3.1, 不难看到对充分大的 s, 在 A_Q 中有 $I_s \subset Q^s \bigcap I_{s_1} \subset Q^{s-c} I_{s_1} = 0$. 由于 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的极小元个数有限, 我们可以找到正整数 $s_2 \geq s_1$, 使得对 $\mathrm{Supp}(I_{s_1})$ 的每个极小元 Q, 均有 I_{s_2} 在 A_Q 中为 0. 这样得到 $\mathrm{Supp}(I_{s_2}) \subsetneqq \mathrm{Supp}(I_{s_1})$.

继续讨论下去, 如果对任意 s 都有 $I_s \neq 0$, 则我们将得到无限长的递增数列 $s_1 \leq s_2 \leq \ldots s_i \leq s_{i+1} \leq \ldots$, 使得 $\forall\, i$, 均有 $\mathrm{Supp}(I_{s_{i+1}}) \subsetneqq \mathrm{Supp}(I_{s_i})$. 这与 A 的 Noether 性矛盾! 故必有一个正整数 s 使得 $I_s = 0$. □

对任意理想 I, 通过考虑商环 A/I, 我们得到如下准素分解的存在性

定理 3.5.1 设 I 为 Noether 环 A 的理想. 设 $\mathrm{Ass}_A(A/I) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. 则存在 P_i-准素理想 J_i $(i = 1, \ldots, m)$, 使得

$$I = J_1 \bigcap J_2 \bigcap \cdots \bigcap J_m.$$

特别地, I 可写为有限个准素理想的交集, 这称为 I 的一个**准素分解**.

证明 对商环 $\bar{A} := A/I$ 应用命题 3.5.2, 可以找到正整数 s, 使得在 $\bar{A}$ 中有

$$(0) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\left(\bar{A} \longrightarrow \frac{\bar{A}_{P_i}}{P_i^s \bar{A}_{P_i}}\right).$$

记 J_i 为 $\mathrm{Ker}\left(\bar{A} \longrightarrow \frac{\bar{A}_{P_i}}{P_i^s \bar{A}_{P_i}}\right)$ 在 A 中的原像, 则 $J_i = \mathrm{Ker}\left(A \longrightarrow \frac{A_{P_i}}{P_i^s A_{P_i} + I A_{P_i}}\right)$, 并且有 $I = J_1 \bigcap J_2 \bigcap \cdots \bigcap J_m$. 再由 $\mathrm{Ass}\left(\frac{A_{P_i}}{P_i^s A_{P_i} + I A_{P_i}}\right) = \{P_i\}$ 以及单同态 $A/J_i \hookrightarrow \frac{A_{P_i}}{P_i^s A_{P_i} + I A_{P_i}}$ 即知 J_i 为 P_i-准素理想. □

显然 I 的准素分解并不唯一. 为了得到尽可能具有唯一性的分解, 我们对一个准素分解 $I = I_1 \bigcap \cdots \bigcap I_m$ 做一些简化, 使其长度 m 尽可能小:

- 如果 I_i 是**冗余的**, 即 $I = I_1 \bigcap \ldots I_{i-1} \bigcap I_{i+1} \bigcap \cdots \bigcap I_m$, 则可以将 I_i 去掉.

- 如果 I_i 与 I_j 均为 P-准素理想, 则 $I_i \bigcap I_j$ 也为 P-准素理想 (这可以通过考虑单同态 $A/I_i \cap I_j \hookrightarrow A/I_i \oplus A/I_j$ 看出), 从而可以将 I_i 和 I_j 替换为 $I_i \bigcap I_j$.

我们称准素分解 $I = I_1 \bigcap \cdots \bigcap I_m$ 是一个**极小准素分解**, 如果其同时满足:

(1) 每个 I_i 均不是冗余的. 即对每个 i, 均有 $I \neq I_1 \bigcap \ldots I_{i-1} \bigcap I_{i+1} \bigcap \cdots \bigcap I_m$.

(2) 素理想 $\sqrt{I_1}, \ldots, \sqrt{I_m}$ 互不相同.

下面的命题表明, 极小准素分解一定存在, 并且具有一定程度的唯一性.

定理 3.5.2 设 I 为 Noether 环 A 的理想. 则

(i) I 一定存在极小准素分解.

下面设 $I = I_1 \bigcap \cdots \bigcap I_m$ 是一个极小准素分解, 并且将素理想 $\sqrt{I_i}$ 记为 P_i.

(ii) $\mathrm{Ass}(A/I) = \{P_1, \ldots, P_m\}$.

(iii) 设 P_i 为 $\mathrm{Ass}(A/I)$ 中的极小元, 那么 $I_i = \mathrm{Ker}(A \longrightarrow A_{P_i}/IA_{P_i})$. 特别地, 这样的 I_i 由 I 唯一决定.

证明 (i): 准素分解的存在性由定理 3.5.1给出. 由上面的讨论, 对准素分解进一步约化可以得到一个极小准素分解.

(ii): 由单同态 $A/I \hookrightarrow A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_m$ 可得 $\mathrm{Ass}(A/I) \subset \{P_1, \ldots, P_m\}$. 下面说明 $P_1 \in \mathrm{Ass}(A/I)$. 考虑同态 $\varphi\colon A/I \longrightarrow A/I_2 \oplus \cdots \oplus A/I_m$. 由 I_1 的非冗余性知 $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq 0$, 并且 $\mathrm{Ker}\,\varphi \hookrightarrow A/I_1$ 为单同态. 由 $\{P_1\} = \mathrm{Ass}(A/I_1)$ 得到 $\{P_1\} = \mathrm{Ass}(\mathrm{Ker}\,\varphi) \subset \mathrm{Ass}(A/I)$. 同理知 $\forall\, i$, 均有 $P_i \in \mathrm{Ass}(A/I)$.

(iii): 对任意 $j \neq i$, 由 $\mathrm{Ass}(A/I_j) = \{P_j\}$ 和定理 3.4.1, (iv) 知 $\mathrm{Supp}_A(A/I_j) = V(P_j)$. 再由 P_i 的极小性知 $P_i \notin \mathrm{Supp}_A(A/I_j)$. 从而 $(A/I_j)_{P_i} = 0$. 将左正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_m$$

在 P_i 处作局部化, 得到左正合列 $0 \longrightarrow IA_{P_i} \longrightarrow A_{P_i} \longrightarrow (A/I_i)_{P_i}$. 又由于 $(A/I_i)_{P_i} = A_{P_i}/I_iA_{P_i}$, 我们看到这个左正合列实际上为短正合列

$$0 \longrightarrow IA_{P_i} \longrightarrow A_{P_i} \longrightarrow A_{P_i}/I_iA_{P_i} \longrightarrow 0.$$

由此得到 $IA_{P_i} = I_iA_{P_i}$, 故 $I_i \subset J_i \coloneqq \mathrm{Ker}(A \longrightarrow A_{P_i}/IA_{P_i})$. 为了得到反包含 $J_i \subset I_i$, 只需证明 J_i 在 A/I_i 中为零. 由 $\mathrm{Ass}(A/I_i) = \{P_i\}$ 以及命题 3.4.4, 又只需证明 J_i 在局部化 $(A/I_i)_{P_i}$ 中为零. 而这由 $I_iA_{P_i} = IA_{P_i}$ 和 J_i 的定义即得. □

3.6 整扩张

定义 3.6.1 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态. 称 $b \in B$ 在 A 上整, 如果存在 $n \geq 1$, 存在 $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, 使得 $b^n + \varphi(a_{n-1})b^{n-1} + \cdots + \varphi(a_1)b + \varphi(a_0) = 0$.

称环同态 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为**整扩张**, 或 (在 φ 明确的情况下)B 为 A 的整扩张, 如果任意 $b \in B$ 均在 A 上整.

注意整扩张不一定为单同态. 另外我们经常省略同态记号 φ, 而将上面关于 b 的首一方程直接记作 $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$. 以下对于 $b_1, \ldots, b_n \in B$, 符号 $A[b_1, \ldots, b_n]$ 表示 $\varphi(A)$ 和 $b_1, \ldots, b_n$ 在 B 中生成的子环, 这也是 B 的一个 A-子代数.

命题 3.6.1 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, $b \in B$. 则以下几条互相等价:

(i) b 在 A 上整.

(ii) $A[b]$ 为有限 A-模.

(iii) 存在 B 的 A-子代数 C, 使得 $b \in C$, 并且 C 为有限 A-模.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 设 b 满足系数在 A 上的 n 次首一方程, 则容易看到 $1, b, \ldots, b^{n-1}$ 为 $A[b]$ 作为 A-模的一组生成元.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 取 $C = A[b]$ 即可.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 利用行列式技巧. 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 C 作为 A-模的一组生成元. 任取 $c \in C$, 考虑乘 c 映射的矩阵表示, 得到 A 上的 $n \times n$ 方阵 $P \in M_n(A)$, 使得

$$c(e_1, \ldots, e_n)^t = P(e_1, \ldots, e_n)^t.$$

从而由行列式技巧得到 $\det(c\,\mathrm{I}_n - P)(e_1, \ldots, e_n)^t = 0$. 由于 $e_1, \ldots, e_n$ 可以 A-线性组合出 C 的乘法单位元 1, 故知 $\det(c\,\mathrm{I}_n - P) = 0$. 将该行列式展开即得 c 满足系数在 A 上的 n 次首一方程. 从而 $A \longrightarrow C$ 为整扩张. 特别地, $b \in C$ 在 A 上整. □

定义–命题 3.6.1 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态. 如果 $b_1, b_2 \in B$ 均在 A 上整, 那么 $b_1 + b_2$, $b_1 b_2$ 都在 A 上整. 特别地, $\tilde{A} \coloneqq \{b \in B \mid b \text{ 在} A \text{ 上整}\}$ 是 B 的子环, 称为 A 在 B 中的**整闭包**.

证明 利用命题 3.6.1. 由 b_1 在 A 上整知 $A[b_1]$ 为有限 A-模. 同样地, b_2 在 A 上整蕴含 b_2 在 $A[b_1]$ 上整, 从而 $A[b_1][b_2] = A[b_1, b_2]$ 为有限 $A[b_1]$-模. 这样得到 $A[b_1, b_2]$ 为有限 A-模. 由此即知 $A[b_1, b_2]$ 中的元素 $b_1 + b_2$, $b_1 b_2$ 均在 A 上整. □

定义 3.6.2 设 B 为 A-代数, 结构同态为 $\varphi\colon A \longrightarrow B$. 如果存在有限个元素 $b_1, \ldots, b_n \in B$, 使得 $B = A[b_1, \ldots, b_n]$, 则称 B 为**有限生成 A-代数**. 如果 B 作为 A-模为有限模, 则称 φ 为**有限扩张**, 也称为**有限同态**.

由定义, B 为有限生成 A-代数等价于存在 A-代数的满同态 $A[x_1,\dots,x_n]\longrightarrow B$.

命题 3.6.2 设 $A\longrightarrow B$ 为环同态. 则以下三条互相等价:

(i) $B=A[b_1,\dots,b_n]$ 为有限生成 A-代数, 并且每个 b_i 均在 A 上整.

(ii) $A\longrightarrow B$ 为有限扩张.

(iii) $A\longrightarrow B$ 为整扩张, 并且 B 为有限生成 A-代数.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 设 $m\geq 1$, 使得每个 b_i 均满足 A 系数的 m 次首一方程. 则易验证 B 作为 A-模, 有一组生成元 $\left\{b_1^{k_1}\dots b_n^{k_n}\mid 0\leq k_i\leq m-1\right\}$. 从而 $A\longrightarrow B$ 为有限扩张.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 由命题 3.6.1 即得.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 显然. □

下面考察整扩张与张量积, 局部化, 取商之间的关系.

命题 3.6.3 设 $A\longrightarrow B$ 为整扩张. 则有:

(i) 如果 $B\longrightarrow C$ 也为整扩张, 那么复合同态 $A\longrightarrow C$ 为整扩张.

(ii) 对任意 A-代数 C, $C\longrightarrow C\otimes_A B$ 为整扩张.

(iii) 对 A 的理想 I 以及 B 的理想 J, 如果 $IB\subset J$, 那么 $A/I\longrightarrow B/J$ 为整扩张. 特别地, $A/J\cap A\hookrightarrow B/J$ 为单的整扩张.

(iv) 对 A 的任一乘法子集 S, 局部化 $A_S\longrightarrow B_S$ 为整扩张.

证明 (i): 任取 $c\in C$, 设 c 满足如下 B 系数的首一方程: $c^n+b_{n-1}c^{n-1}+\dots+b_0=0$, $b_i\in B$. 考虑 C 的 A-子代数 $A[b_0,\dots,b_{n-1},c]$. 由命题 3.6.2 知 $A\longrightarrow A[b_0,\dots,b_{n-1}]$ 和 $A[b_0,\dots,b_{n-1}]\longrightarrow A[b_0,\dots,b_{n-1},c]$ 均为有限扩张. 从而 $A\longrightarrow A[b_0,\dots,b_{n-1},c]$ 为有限扩张. 故 c 在 A 上整.

(ii), (iii), (iv) 由定义直接验证即可. □

命题 3.6.4 设 $A\hookrightarrow B$ 为整环之间的单同态, 且为整扩张. 则 A 为域 $\Longleftrightarrow$ B 为域.

证明 $\Longrightarrow$: 任取 $0\neq b\in B$, 考虑 b 满足的次数最小的 A 系数首一方程: $b^n+a_{n-1}b^{n-1}+\dots+a_0=0$, $a_i\in A$. 如果 $a_0=0$, 则 b 将满足次数更小的首一方程 $b^{n-1}+a_{n-1}b^{n-2}+\dots+a_1=0$, 这与开始选取的首一方程次数性最小矛盾. 故 $a_0\neq 0$, 这就得到 $b(b^{n-1}+a_{n-1}b^{n-2}+\dots+a_1)+a_0=0$, 从而由 A 为域知 b 在 B 中的逆元为 $-a_0^{-1}(b^{n-1}+a_{n-1}b^{n-2}+\dots+a_1)$. 这样得到 B 中非零元均可逆, 从而 B 为域.

$\Longleftarrow$: 任取 $0\neq a\in A$, 设 a 在域 B 中的逆元为 $a^{-1}\in B$. 只需证明 $a^{-1}\in A$. 由 $A\longrightarrow B$ 为整扩张, a^{-1} 满足 A 系数的首一方程: $(a^{-1})^n+a_{n-1}(a^{-1})^{n-1}+\dots+a_0=0$, $a_i\in A$. 将该等式两边同时乘以 a^{n-1} 得到 $a^{-1}+a_{n-1}+\dots+a_0a^{n-1}=0$, 由此知 $a^{-1}\in A$. □

推论 3.6.1 设 $A\longrightarrow B$ 为整扩张, 设 $Q\in\operatorname{Spec}B$, $P=Q\cap A$. 则 Q 为 B 的极大理想 $\Longleftrightarrow$ P 为 A 的极大理想.

证明 由 $A/P \hookrightarrow B/Q$ 为单的整扩张和命题 3.6.4 即得. □

命题 3.6.5 设 $A \longrightarrow B$ 为整扩张, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$. 则 P 处纤维中的点代表的素理想没有包含关系, 即对任意 $Q_1 \neq Q_2 \in \operatorname{Spec} B$, 如果 $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = P$, 那么 $Q_1 \not\subseteq Q_2$.

证明 假设 $Q_1 \subset Q_2$. 在 P 处作局部化, 则 $A_P \longrightarrow B_P$ 仍为整扩张. 对 $i = 1, 2$, 将 Q_i 看作 B_P 中的素理想, 则其满足 $Q_i \cap A_P = PA_P$. 由推论 3.6.1 知 Q_i 为 B_P 中的极大理想. 再由 $Q_1 \subset Q_2$ 即知在 B_P 中有 $Q_1 = Q_2$. 从而在 B 中也有 $Q_1 = Q_2$. □

命题 3.6.6 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为整扩张.

(i) 若 φ 为单的整扩张, 则 $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为满射.

(ii) 设 J 为 B 的理想, 则 $\varphi^*(V(J)) = V(J \cap A)$. 特别地, φ^* 为闭映射.

证明 (i): 任取 $P \in \operatorname{Spec} A$, 在 P 处作局部化, 得到单的整扩张 $A_P \hookrightarrow B_P$. 这样知 $B_P \neq 0$. 任取 B_P 的极大理想 Q, 则由推论 3.6.1 知 $Q \cap A_P$ 为 A_P 的极大理想, 从而 $Q \cap A_P = PA_P$. 由此可知 $\varphi^*(Q) = P$.

(ii): 考虑环同态及相应的素谱空间映射的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} B/J & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/J \cap A & \longleftarrow & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B/J & \longhookrightarrow & \operatorname{Spec} B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ \operatorname{Spec} A/J \cap A & \longhookrightarrow & \operatorname{Spec} A \end{array}$$

因为 $A/J \cap A \hookrightarrow B/J$ 为单的整扩张, 由 (i) 可知 $\operatorname{Spec} B/J \longrightarrow \operatorname{Spec} A/J \cap A$ 为满射. 再注意到 $V(J) \simeq \operatorname{Spec} B/J$, $V(J \cap A) \simeq \operatorname{Spec} A/J \cap A$ 即得 $\varphi^*(V(J)) = V(J \cap A)$.□

对于整扩张 $A \longrightarrow B$, 根据命题 3.6.5, 素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 的每个纤维都是离散空间. 与拓扑空间的覆盖映射不同, 一般而言 (比如 B 是整环时), 对任意 $f \in A$, 主开集 $D(f)$ 的原像 $\operatorname{Spec} B_f = \operatorname{Spec} B \otimes_A A_f$ 并不是一些 "小开集" 的无交并. 即使对一个点处的局部化 A_P, $\operatorname{Spec} B_P = \operatorname{Spec} B \otimes_A A_P$ 很多情况下也是连通的. 这实际上反映了 Zariski 拓扑还不够精细. 另一方面, 下面的命题表明, 完备化可以达到分离纤维中不同点的效果.

命题 3.6.7 设 $A \longrightarrow B$ 为 Noether 环的有限扩张, 并且 (A, m) 为局部环. 则有:

(i) $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 m 处的纤维为有限集 $\{m_1, \ldots, m_k\}$, 并且每个 m_i 均为 B 的极大理想.

(ii) 自然同态 $\widehat{B} \longrightarrow \widehat{B_{m_i}}$ 诱导了环同构 $\widehat{B} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{k} \widehat{B_{m_i}}$. 其中 $\widehat{B} \simeq B \otimes_A \widehat{A}$ 为 B 在 mB 处的完备化.

证明 由命题 3.6.5 可知 B/mB 为零维 Noether 环, 从而 $\operatorname{Spec} B/mB$ 是有限集. 设 $\operatorname{Spec} B/mB = \{m_1, \ldots, m_k\}$. 由于 $\operatorname{Spec} B/mB$ 与 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 m 处的纤维

一一对应, 即知 $m_1,\dots,m_k$ 恰为 B 的所有满足 $m_i\cap A=m$ 的素理想. 再由推论 3.6.1 可知, 作为 B 的素理想, 每个 m_i 都是极大理想.

由 B/mB 是零维 Noether 环知存在正整数 r, 使得在 B/mB 中有 $m_1^r\dots m_k^r=(0)$, 从而在 B 中有 $(mB)^{kr}\subset m_1^r\dots m_k^r\subset mB$. 这说明 B 在 mB 处的完备化 $\widehat{B}$ 同构于 B 在理想 $m_1^r\dots m_k^r$ 处的完备化. 对任意正整数 i, 根据中国剩余定理得到同构:

$$B/(m_1^r\dots m_k^r)^i\simeq B/m_1^{ri}\times\cdots\times B/m_k^{ri}.$$

对 i 取逆极限即知 $\widehat{B}\simeq\widehat{B_{m_1}}\times\cdots\times\widehat{B_{m_k}}$. □

推论 3.6.2 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, 并且是完备的 (即 $A\xrightarrow{\sim}\widehat{A}$ 为同构).

(i) 对任意有限扩张 $A\longrightarrow B$, 均有 A-代数同构 $B\simeq B_1\times\cdots\times B_s$, 其中每个 B_i 均为局部环.

(ii) (**Hensel 引理**) 设 $F(x)\in A[x]$ 为首一多项式, 并且在 $k[x]$ 中有分解 $f(x):=\overline{F(x)}=g(x)h(x)$, 满足 $g(x)$ 和 $h(x)$ 均为首一多项式, 并且 $(g(x),h(x))=1$. 则存在首一多项式 $G(x),H(x)\in A[x]$, 使得 $F(x)=G(x)H(x)$, 并且 $\overline{G(x)}=g(x)$, $\overline{H(x)}=h(x)$.

证明 (i): 由 $B\otimes_A\widehat{A}\simeq B\otimes_A A\simeq B$ 以及命题 3.6.7 即得.

(ii): 考虑 A-代数 $B:=A[x]/(F(x))$, 由 (i) 可得 A-代数同构 $B\simeq B_1\times\cdots\times B_s$, 其中每个 B_i 均为局部环. 首先注意到每个 B_i 均为自由 A-模. 这是因为取 B_i 作为 A-模的一组极小生成元 (定义 3.1.1) $S_i\subset B_i$, 则并集 $S:=\bigcup\limits_{i=1}^{s}S_i$ 为 B 的一组极小生成元. 由于 B 为自由 A-模, 可知 S 实际上是 B 作为自由 A-模的一组基. 由此知 B_i 为自由 A-模, 并且 S_i 为一组基.

设 $\deg F(x)=\deg f(x)=d$, 并设在 $k[x]$ 中有因子分解 $f(x)=f_1(x)\dots f_t(x)$, 使得 $f_i(x)$ 为首一不可约多项式的幂次, 并且对任意 $i\neq j$, $f_i(x)$ 与 $f_j(x)$ 互素. 则有 k-代数同构:

$$B\otimes_A k\simeq k[x]/(f(x))\simeq k[x]/(f_1(x))\times\cdots\times k[x]/(f_t(x)).$$

与 $B\otimes_A k\simeq(B_1\otimes_A k)\times\cdots\times(B_s\otimes_A k)$ 比较, 注意到每个 $B_i\otimes_A k$ 均为局部环, 并利用有限生成 $k[x]$-模的结构定理, 可知 $t=s$, 并且通过调整 $f_i(x)$ 的标号, 有 k-代数同构 $B_i\otimes_A k\simeq k[x]/(f_i(x))$, $\forall\ i=1,\dots,s$. 设 $\deg f_i(x)=d_i$, 则 $1,x,\dots,x^{d_i-1}$ 为 B_i 的一组极小生成元, 从而为 B_i 作为自由 A-模的一组基. 由此可知存在首一的 d_i 次多项式 $F_i(x)\in A[x]$, 使得在 B_i 中有 $F_i(x)=0$. 故 $B_i\simeq A[x]/(F_i(x))$, 从而 $\overline{F_i(x)}=f_i(x)$. 令 $\widetilde{F}(x):=F_1(x)\dots F_s(x)$. 则在每个 $B_i\simeq A[x]/(F_i(x))$ 中, $\widetilde{F}(x)=0$. 由分解 $B\simeq B_1\times\cdots\times B_s$ 即知在 $B=A[x]/(F(x))$ 中有 $\widetilde{F}(x)=0$. 故在 $A[x]$ 中得到 $F(x)\mid\widetilde{F}(x)$. 又由 $\deg\widetilde{F}(x)=\sum\limits_{i=1}^{s}d_i=d=\deg F(x)$, 并且 $\widetilde{F}(x)$ 和 $F(x)$ 均为首一多项式, 最终得到 $\widetilde{F}(x)=F(x)$. 由 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足的条件, 不妨设 $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{r}f_i(x)$,

$h(x)=\prod_{i=r+1}^{s} f_i(x)$. 从而令 $G(x):=\prod_{i=1}^{r} F_i(x)$, $H(x):=\prod_{i=r+1}^{s} F_i(x)$ 即可. □

仔细考察证明可以看到, 推论 3.6.2 并不需要 A 的 Noether 性, 并且实际上 (i) 和 (ii) 是等价的. 使 (i) 或 (ii) 成立的环称为 henselian 局部环, 其主要性质可见 [15, §2.8].

作为整扩张的应用, 我们证明域上有限生成代数的一些独特性质, 主要是 Hilbert 零点定理和 Noether 正规化定理. 首先看一个例子.

例 3.6.1 设 m 为 $\mathbb{C}[x,y]$ 中的极大理想, 我们分析 m 的形状. 由于 $\mathbb{C}[x,y]$ 不是域, 故 $m\neq 0$. 从而可以取 $0\neq f(x,y)\in m$.

(i) 假设 $f(x,y)=y^n+g_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+g_0(x)$ 为 y 的首一多项式. 则 $\bar{m}:=m/(f)$ 为商环 $\mathbb{C}[x,y]/(f)$ 的极大理想. 由 f 为 y 的首一多项式可知 $\mathbb{C}[x]\longrightarrow\mathbb{C}[x,y]/(f)$ 为整扩张. 从而 $\bar{m}\bigcap\mathbb{C}[x]$ 为 $\mathbb{C}[x]$ 的极大理想 (推论 3.6.1). 这样得到 $\bar{m}\bigcap\mathbb{C}[x]=(x-a)$, $a\in\mathbb{C}$. 从而 $(x-a,f)\subset m$, 故 $m/(x-a,f)$ 为 $\mathbb{C}[x,y]/(x-a,f)\simeq\mathbb{C}[y]/(f(a,y))$ 的极大理想. 这样可以找到 $b\in\mathbb{C}$ 满足 $f(a,b)=0$, 使得 $m/(x-a,f)=(y-b)$. 由此不难看到 $m=(x-a,y-b)$.

(ii) 对一般情形, 我们作如下形状的可逆变量代换:

$$\begin{cases} x=x'+y'^N \\ y=y'. \end{cases}$$

不难看到当正整数 N 充分大时, $f(x,y)=y'^m+h_{m-1}(x')y'^{m-1}+\cdots+h_0(x')$ 为 y' 的首一多项式. 由此化归为前一种情形, 仍然得到 $m=(x-a,y-b)$, $a,b\in\mathbb{C}$.

由上面的讨论, 我们得到结论: $\mathbb{C}[x,y]$ 中的极大理想均形如 $(x-a,y-b)$, 其中 $a,b\in\mathbb{C}$.

上面论证的方法可以总结为两步: 首先通过可逆变量代换制造首一多项式, 其次通过构造整扩张将问题约化到更少变量的情况. 对一般的多项式环, 不断应用同样的做法, 我们得到下面 Hilbert 零点定理的弱形式.

定理 3.6.1 (Hilbert 零点定理: 弱形式) *设 k 为代数封闭域, 设 m 为多项式环 $k[x_1,\ldots,x_n]$ 的极大理想. 则存在 $a_1,\ldots,a_n\in k$, 使得 $m=(x_1-a_1,\ldots,x_n-a_n)$.*

证明 对 n 进行归纳. 取 $0\neq f\in m$, 作如下形状的可逆变量代换:

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_n^{N_1} \\ x_2=y_2+y_n^{N_2} \\ \vdots \\ x_{n-1}=y_{n-1}+y_n^{N_{n-1}} \\ x_n=y_n. \end{cases}$$

不难看到, 通过适当地选取正整数 $N_1,\dots,N_{n-1}$, 可以使 f 成为 y_n 的首一多项式. 从而 $k[y_1,\dots,y_{n-1}]\longrightarrow k[x_1,\dots,x_n]/(f)=k[y_1,\dots,y_n]/(f)$ 为整扩张. 令 $\bar{m}=m/(f)$, 则由推论 3.6.1 知 $\bar{m}\cap k[y_1,\dots,y_{n-1}]$ 为极大理想. 由归纳假设知存在 $b_1,\dots,b_{n-1}\in k$, 使得 $\bar{m}\cap k[y_1,\dots,y_{n-1}]=(y_1-b_1,\dots,y_{n-1}-b_{n-1})$. 故 m 包含理想 $(y_1-b_1,\dots,y_{n-1}-b_{n-1},f)$. 由于商环 $k[y_1,\dots,y_n]/(y_1-b_1,\dots,y_{n-1}-b_{n-1})=k[y_n]$ 为主理想整环, 可知其极大理想 $m/(y_1-b_1,\dots,y_{n-1}-b_{n-1})$ 为主理想, 因而具有形式 (y_n-b_n), $b_n\in k$. 这样就得到 $(y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)\subset m$. 注意到 $(y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)$ 已经是极大理想, 故得到 $m=(y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)$. 再通过变量代换即知 m 具有形式 $(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$, $a_i\in k$. □

利用同样的变量代换技巧, 我们可以证明下面的 Noether 正规化定理, 其具有更广的内涵, 并且在处理有限生成代数时使用起来更为方便.

定理 3.6.2 (Noether 正规化定理) *设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 则存在 $n\geq 0$, 以及 A 中在 k 上代数无关的元 $t_1,\dots,t_n$, 使得包含同态 $k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow A$ 为有限扩张. 其中 $n=0$ 时 $k[t_1,\dots,t_n]$ 约定为 k.*

证明 设 $A=k[a_1,\dots,a_m]$. 对生成元个数 m 进行归纳. 当 $m=0$ 时 $A=k$, 结论显然成立. 下面设 $m\geq 1$. 设 $a_1,\dots,a_m$ 在 k 上代数相关, 并且 $0\neq f\in k[x_1,\dots,x_m]$ 使得 $f(a_1,\dots,a_m)=0$. 作如下形状的可逆变量代换:

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_m^{N_1}\\ x_2=y_2+y_m^{N_2}\\ \vdots\\ x_{m-1}=y_{m-1}+y_m^{N_{m-1}}\\ x_m=y_m, \end{cases}$$

并记 $f(x_1,\dots,x_m)=g(y_1,\dots,y_m)$. 通过适当选取正整数 $N_1,\dots,N_{m-1}$, 可以使得 g 为 y_m 的首一多项式. 再令 $b_1,\dots,b_m\in A$ 由下式决定:

$$\begin{cases} a_1=b_1+b_m^{N_1}\\ a_2=b_2+b_m^{N_2}\\ \vdots\\ a_{m-1}=b_{m-1}+b_m^{N_{m-1}}\\ a_m=b_m. \end{cases}$$

则由 $g(b_1,\dots,b_m)=f(a_1,\dots,a_m)=0$ 知 b_m 在 $k[b_1,\dots,b_{m-1}]$ 上整. 利用归纳假设, 可以在 A 的子代数 $k[b_1,\dots,b_{m-1}]$ 中找到在 k 上代数无关的元 $t_1,\dots,t_n$, 使得

$k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow k[b_1,\dots,b_{m-1}]$ 为整扩张, 从而 $k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow k[b_1,\dots,b_m]=A$ 也为整扩张. 再由命题 3.6.2 知 $k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow A$ 为有限扩张. □

注记 3.6.1 Noether 正规化定理的几何意义为: 对于仿射空间 $\mathbb{A}_k^m=\operatorname{Spec}k[x_1,\dots,x_m]$ 的闭子概形 X, 存在一个 $\mathbb{A}_k^m$ 的自同构 $\varphi\colon\mathbb{A}_k^m\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}_k^m$, 存在一个线性子空间 $H\subset\mathbb{A}_k^m$, 使得线性投影 $\mathbb{A}_k^m\longrightarrow H$ 诱导了一个满的有限态射 $X\longrightarrow H$. 另外不难看到如果 k 为无限域, 则上述定理证明中的可逆变量代换可取为可逆线性变换, 这也等价于自同构 $\varphi\colon\mathbb{A}_k^m\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}_k^m$ 可取为线性自同构.

以下几个命题均可以看作 Noether 正规化定理的推论.

定理 3.6.3 (Hilbert 零点定理: 剩余类域形式) *设 k 为域, A 为有限生成 k 代数. 设 $P\in\operatorname{Spec}A$. 则以下几条互相等价:*

(i) *P 为极大理想.*
(ii) *剩余类域 $k(P)$ 为 k 的有限扩张.*
(iii) *剩余类域 $k(P)$ 为 k 的代数扩张.*

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 考虑有限生成 k-代数 A/P. 由 Noether 正规化定理, 存在分解 $k\hookrightarrow k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow A/P$, 使得 $t_1,\dots,t_n$ 在 k 上代数无关, 并且 $k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow A/P$ 为有限扩张. 由于 P 为极大理想, A/P 为域, 从而由命题 3.6.4 知 $k[t_1,\dots,t_n]$ 为域. 故必有 $n=0$, $k[t_1,\dots,t_n]=k$. 这样得到 $k(P)=A/P$ 为 k 的有限扩张.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 考虑环的单扩张 $k\hookrightarrow A/P\hookrightarrow\operatorname{Frac}(A/P)=k(P)$. 由 $k(P)/k$ 为代数扩张 (整扩张) 知 $k\hookrightarrow A/P$ 为整扩张, 从而由命题 3.6.4 知 A/P 为域, 即 P 为极大理想. □

一般而言, 拓扑空间 X 的一个开集中的闭点在 X 中不一定还是闭点. 但是对于域上有限生成代数的素谱空间, 开子集中的闭点总是全空间的闭点, 即此时一个点是否为闭点是一个局部条件.

推论 3.6.3 *设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 设 $P\in\operatorname{Spec}A$, 并且 U 为 P 的一个开邻域. 则 P 为 $\operatorname{Spec}A$ 的闭点 $\Longleftrightarrow$ P 为 U 的闭点 (即 P 在 U 中的闭包为 P 自身).*

证明 不妨设 $U=D(f)$ 为主开集. 则 A_f 也为有限生成 k-代数, 并且 P 在 A 中的剩余类域和 P 在 A_f 中的剩余类域同构. 这样由定理 3.6.3 即得所要证的等价性. □

推论 3.6.4 *设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 则 $\operatorname{Spec}A$ 的闭点形成的集合在 $\operatorname{Spec}A$ 中稠密.*

证明 设 $U=D(f)$ 为 $\operatorname{Spec}A$ 的主开集. 如果 U 不是空集, 则 U 中必有闭点 x(对应于 A_f 的极大理想). 由闭点的局部性 (推论 3.6.3) 知 x 也为 $\operatorname{Spec}A$ 的闭点. □

对域 k 上的有限生成代数 A, 令 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 为 A 的所有极大理想形成的集合, 这也是 $\operatorname{Spec} A$ 的所有闭点形成的子集. 赋予 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 子空间拓扑. 对 A 的理想 I, 令 $V_m(I) \coloneqq V(I) \bigcap \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 中的闭集 $V(I)$ 与 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 的交. 这样得到的 $V_m(I)$ 为 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 的全部闭集. 由 $V_m(I)$ 在 $V(I)$ 中稠密, 可知 $V(I) \mapsto V_m(I)$ 给出了 $\operatorname{Spec} A$ 的闭子集到 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 的闭子集的一一对应. 在这个对应下, A 的素理想一一对应到 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 的不可约闭子集. 由此, 拓扑空间 $\operatorname{Spec} A$ 可以由 $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 完全恢复出来. 在 k 为代数闭域的情形下, 若 $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, 则由 Hilbert 零点定理的弱形式, $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ 可以等同到 I 在 k^n 中的公共零点形成的集合, 这说明此时考虑这些 "看得见的" 零点集与考虑 $\operatorname{Spec} A$ 得到的信息是一样的.

在域上的有限生成代数情形, 我们可以将 命题 1.3.10 加强为如下的:

推论 3.6.5 *设 k 为域, A 为有限生成 k 代数. 设 I 为 A 的理想, 则 $\sqrt{I}$ 等于所有包含 I 的极大理想的交.*

证明 与命题 1.3.10 的证明想法类似, 任取包含 I 的所有极大理想的交集中的元 f, 只需证 $f \in \sqrt{I}$. 考虑有限生成 k-代数 $(A/\sqrt{I})_f$, 其极大理想一一对应到 A 的包含 $\sqrt{I}$ 并且不包含 f 的极大理想 (由闭点的局部性, 即推论 3.6.3). 而根据 f 的取法, A 中不存在这样的极大理想, 故 $(A/\sqrt{I})_f$ 没有极大理想, 从而为零环. 由此即得 $f \in \sqrt{I}$. □

定理 3.6.4 (Hilbert 零点定理: 强形式) *设 k 为域, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包. 设 I 为多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的理想. 令 Z 为 I 在 $\bar{k}^n$ 中的公共零点集, 即*

$$Z \coloneqq \left\{ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \bar{k}^n \mid g(a) = 0, \forall\, g \in I \right\}.$$

设 $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ 满足 $f(a) = 0, \forall\, a \in Z$. 则 $f \in \sqrt{I}$.

证明 记 $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, $A_{\bar{k}} = A \otimes_k \bar{k}$. 注意到 $A_f \otimes_k \bar{k} = (A_{\bar{k}})_f = A_{\bar{k}}[\frac{1}{f}]$ 为有限生成 $\bar{k}$-代数. 由定理 3.6.3, $(A_{\bar{k}})_f$ 中的极大理想一一对应到 $A_{\bar{k}}$ 中满足 $f(m) \neq 0$ 的极大理想 m. 再由 $A_{\bar{k}} = \bar{k}[x_1, \ldots, x_n]/I$ 和 Hilbert 零点定理的弱形式, 得到 $A_{\bar{k}}$ 的极大理想一一对应到 Z 中的点. 而由条件, $\forall\, a \in Z$, 均有 $f(a) = 0$. 故 $(A_{\bar{k}})_f$ 没有极大理想. 这说明 $(A_{\bar{k}})_f$ 为零环, 从而其子环 A_f 也为零环. 故 f 为 A 中幂零元. 在 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 即为 $f \in \sqrt{(0)}$ □

注记 3.6.2 *设 k 为代数封闭域. 设 $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ 在 k^n 中没有公共零点, 则由 Hilbert 零点定理, 存在 $g_1, \ldots, g_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ 使得 $\sum_{i=1}^m g_i f_i = 1$. 有效零点定理 (Effective Nullstellensatz) 可以利用 $\max\limits_{1 \leq i \leq m} \deg f_i$ 给出 $\max\limits_{1 \leq i \leq m} \deg g_i$ 的上界. 从而寻找这样的 g_i 就可以转化为解线性方程组的问题. 这方面的结果可见 [21, 24].*

Noether 正规化定理在整环情形有如下形式.

定理 3.6.5 (Noether 正规化定理: 整环形式) *设 R 为整环, A 为有限生成 R-代数, 并且 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \neq 0$. 则存在 $0 \neq f \in R$, 同时满足:*

(i) $R_f \hookrightarrow A_f$ 为单同态.

(ii) 存在环同态的分解 $R_f \hookrightarrow B \hookrightarrow A_f$, 使得 B 作为 R_f-代数同构于多项式代数 $R_f[x_1, \ldots, x_n]$, 并且 $B \hookrightarrow A_f$ 为有限扩张.

证明 首先说明 $R \longrightarrow A$ 为单同态. 由 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \neq 0$ 可知从域出发的同态 $\operatorname{Frac}(R) = R \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \hookrightarrow A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 为单同态. 同时有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R \operatorname{Frac}(R) & \longleftarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \operatorname{Frac}(R) & \longleftarrow & R \end{array}$$

从而复合同态 $R \longrightarrow A \longrightarrow A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 为单同态, 故 $R \longrightarrow A$ 为单同态. 这样对任意非零的 $f \in R$, 局部化 $R_f \longrightarrow A_f$ 均为单同态.

设 $A = R[a_1, \ldots, a_m]$. 对域 $\operatorname{Frac}(R)$ 上的有限生成代数 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 应用 Noether 正规化定理, 可以找到 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 中在 $\operatorname{Frac}(R)$ 上代数无关的元 t_i, $i = 1, \ldots, n$, 使得 $\operatorname{Frac}(R)[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 为整扩张. 由局部化的定义, 我们可以找到 $0 \neq f \in R$, 使得每个 t_i 都在 A_f 中, 并且每个 a_i 均满足系数在 $R_f[t_1, \ldots, t_n]$ 上的首一方程. 这样即知 $R_f[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow A_f = R_f[a_1, \ldots, a_m]$ 为整扩张, 进而为有限扩张. 由 $t_1, \ldots, t_n$ 在 $\operatorname{Frac}(R)$ 上代数无关知 $R_f[t_1, \ldots, t_n]$ 作为 R_f-代数同构于 $R_f[x_1, \ldots, x_n]$. □

作为 Noether 正规化定理的应用, 我们证明下面的命题. 该命题是模 p 约化的交换代数基础. 模 p 约化可以将复数域上的问题约化为有限域上的问题, 是处理代数几何问题的一个重要手段 (见 [27, 29] 以及附录 A).

命题 3.6.8 设 R 为有限生成 $\mathbb{Z}$-代数. 那么以下结论成立:

(i) 设 m 为 R 的极大理想, 则 $m \cap \mathbb{Z} = (p)$ 为 $\mathbb{Z}$ 的极大理想.

(ii) 设 $P \in \operatorname{Spec} R$, 则 P 为 R 的极大理想 $\Longleftrightarrow$ 剩余类域 $k(P)$ 为有限域.

(iii) R 的极大理想在 $\operatorname{Spec} R$ 中稠密, 即对于 $f \in R$, 如果 f 不是幂零元, 则存在 R 的极大理想 m, 使得 $f \notin m$.

(iv) 设 $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$, 则存在正整数 $N \geq 1$, 使得对每个素数 p, 只要 $p \nmid N$, 就可找到 R 的极大理想 m 满足 $m \cap \mathbb{Z} = (p)$.

证明 (i): 假设 m 为 R 的极大理想并且 $m \cap \mathbb{Z} = (0)$, 则有单同态 $\mathbb{Z} \hookrightarrow R/m$. 再由 Noether 正规化定理的整环形式 (定理 3.6.5), 存在 $0 \neq f \in \mathbb{Z}$ 以及分解 $\mathbb{Z}_f \hookrightarrow \mathbb{Z}_f[x_1, \ldots, x_n] \overset{\varphi}{\hookrightarrow} R/m$, 使得 $x_1, \ldots, x_n$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关, 并且 φ 为单的有限扩张. 因为 R/m 是域, 故 $\mathbb{Z}_f[x_1, \ldots, x_n]$ 也为域. 而这是不可能的.

(ii): $\Longrightarrow$: 设 $P = m$ 为极大理想. 由 (i), 存在素数 p, 使得 $m \cap \mathbb{Z} = (p)$. 这样 R/m 为有限生成 $\mathbb{F}_p$-代数. 由 Noether 正规化定理, 存在分解 $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n] \overset{\varphi}{\hookrightarrow} R/m$, 使得 $x_1, \ldots, x_n$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上代数无关, 并且 φ 为有限扩张. 因为 R/m 是域, 故

$\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]$ 也为域. 从而得到 $n=0$, 即 $\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]=\mathbb{F}_p$, 并且 R/m 为 $\mathbb{F}_p$ 的有限扩张, 也为有限域.

$\Longleftarrow$: 设 $P\in\operatorname{Spec}R$, 并设 $k(P)$ 为有限域. 则必有 $P\cap\mathbb{Z}=(p)$, 其中 p 为素数. 这样 R/P 为有限生成 $\mathbb{F}_p$-代数. 由 Noether 正规化定理, 存在分解 $\mathbb{F}_p\hookrightarrow\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]\overset{\varphi}{\hookrightarrow}R/P$, 使得 $x_1,\dots,x_n$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上代数无关, 并且 φ 为有限扩张. 由 $k(P)=\operatorname{Frac}(R/P)$ 为 $\mathbb{F}_p$ 的有限扩张可得 $n=0$, 即 $\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]=\mathbb{F}_p$. 再由命题 3.6.4 即知 R/P 为域, 故 P 为极大理想.

(iii): 这是因为由 (ii) 知 $\operatorname{Spec}R$ 中的点为闭点是一个局部条件, 故 $D(f)$ 中的闭点也是 $\operatorname{Spec}R$ 中的闭点. 更具体的论证如下: 由 f 不是幂零元知 R_f 不是零环, 从而存在 R_f 的极大理想 m. 对有限生成 $\mathbb{Z}$-代数 R_f 应用 (ii), 得到 $k(m)$ 为有限域. 令 $P\coloneqq m\cap R$ 为 m 对应的 R 中的素理想, 则 $k(P)=k(m)$ 也为有限域. 再应用 (ii) 即知 P 为 R 的极大理想, 并且 $f\notin P$.

(iv): 由整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5, 存在正整数 $N\geq 1$, 使得 $\mathbb{Z}_N\longrightarrow R_N$ 有分解: $\mathbb{Z}_N\hookrightarrow\mathbb{Z}_N[x_1,\dots,x_r]\overset{\varphi}{\hookrightarrow}R_N$. 其中 $x_1,\dots,x_r$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关, 而 φ 为单的有限扩张. 对任意素数 p, 如果 $p\nmid N$, 则 (p) 为 $\mathbb{Z}_N$ 的极大理想. 直接验证可知 $m_1\coloneqq(p,x_1,\dots,x_r)$ 为 $\mathbb{Z}_N[x_1,\dots,x_r]$ 的极大理想, 并且 $m_1\cap\mathbb{Z}_N=(p)$. 由推论 3.6.1 和命题 3.6.6 知存在 R_N 的极大理想 m_2 满足 $\varphi^{-1}(m_2)=m_1$. 从而 $m_2\cap\mathbb{Z}_N=(p)$. 令 $m\coloneqq m_2\cap R\in\operatorname{Spec}R$. 则 $m\cap\mathbb{Z}=(p)$. 再由 (ii) 知 m 为 R 的极大理想. 这样就找到了所需要的极大理想 m. □

作为模 p 约化的一个应用, 我们证明关于幂幺群的如下基本性质.

定理 3.6.6 (Kolchin) *设 k 为域, G 为 $GL_n(k)$ 的子群, 使得任意 $g\in G$ 均为幂幺方阵 (即 $(g-I_n)^n=0$). 则存在 $h\in GL_n(k)$, 使得对任意 $g\in G$, hgh^{-1} 均为上三角阵.*

证明 (1) 设 $k=\mathbb{F}_q$ 为特征 p 的有限域. 此时 $GL_n(k)$ 为有限群. 由条件, 对任意 $g\in G$, $g-I_n$ 为幂零方阵. 从而存在 $m\geq 1$, 使得 $(g-I_n)^{p^m}=0$. 从而 $g^{p^m}=(I_n+(g-I_n))^{p^m}=I_n+(g-I_n)^{p^m}=I_n$. 这说明 G 中每个元素的阶均为 p 的幂次, 从而 G 为 p-群. 故 G 包含在 $GL_n(k)$ 的某个 Sylow p-子群中. 熟知 $GL_n(k)$ 的一个 Sylow p-子群 U_n 是对角线为 1 的上三角阵全体, 从而由 Sylow 定理可知存在 $h\in GL_n(k)$, 使得 $hGh^{-1}\subset U_n$, 即此时所要证的结论成立.

(2) 在一般情形, 通过对 n 归纳, 不难看到只需证明 G 中元素存在 k^n 中的公共特征向量, 即存在 $0\neq v\in k^n$, 使得 $\forall\, g\in G$, $gv=v$. 假设找不到这样的公共特征向量, 那么关于 v 的线性方程组 $gv-v=0$ ($\forall\, g\in G$) 就没有非零解, 从而可找到有限个元素 $g_1,\dots,g_r\in G$, 使得关于 v 的线性方程组 $g_iv-v=0$ ($\forall\, i=1,\dots,r$) 没有非零解. 设 S 为方阵 $g_1,\dots,g_r$ 的所有系数形成的有限集, 并记 R 为 S 生成的 k 的 $\mathbb{Z}$-子代数. 则 R 为整环, 且为有限生成 $\mathbb{Z}$-代数. 令 H 为 $g_1,\dots,g_r$ 生成的 G 的子群. 注意到 $\forall\, g\in G$, $\det g=1$, 故 $g^{-1}=g^*$ 为方阵 g 的伴随方阵. 由此不难看到 $\forall\, h\in H$, h 的每个系数均在 R 中, 并且 $(h-I_n)^n=0$. 关于 v 的线性方程组 $g_iv-v=0$ ($\forall\, i=1,\dots,r$) 没有非

零解等价于该方程组的系数方阵是列满秩的, 又等价于系数方阵存在一个 n 阶子式非零. 我们取定一个这样的子式 Δ, 则 $0 \neq \Delta \in R$. 利用命题 3.6.8, 可找到 R 的一个极大理想 m, 使得剩余类域 $k(m) = R/m$ 为有限域, 并且在 $k(m)$ 中还有 $\bar{\Delta} \neq 0$. 对 H 中的每个方阵 h, 其系数模 m 之后成为系数在 $k(m)$ 中的方阵 $\bar{h}$. 则 $\overline{H} \coloneqq \{\bar{h} \mid h \in H\}$ 为 $GL_n(k(m))$ 的子群, 并且 $\overline{H}$ 的每个元素 $\bar{h}$ 仍然满足 $(\bar{h} - I_n)^n = 0$. 对 $\overline{H}$ 应用 (1) 可知 $\overline{H}$ 中元素在 $k(m)^n$ 中存在特征值为 1 的公共特征向量. 但另一方面, 由 $\bar{\Delta} \neq 0$ 可知关于 $v \in k(m)^n$ 的线性方程组 $\bar{g}_i v - v = 0$ $(\forall\ i = 1, \ldots, r)$ 没有非零解. 这个矛盾说明 G 中元素在 k^n 中存在公共特征向量. 从而得到所要证的结论. □

3.7 有限群作用的不变子环

对一个环 B, 我们用 $\mathrm{Aut}(B)$ 表示 B 到自身的所有环同构形成的自同构群. 一个群 G 在 B 上的作用是指一个群同态 $\varphi\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(B)$. 对于 $g \in G$, $b \in B$, 一般将 $\varphi(g)(b) \in B$ 记为 gb 或 $g \cdot b$. 另外我们用如下定义的 B^G 表示 B 的 G-不变子环:

$$B^G = \{b \in B \mid gb = b,\ \forall\ g \in G\}.$$

对任意 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 对任意 $g \in G$, 显然 gQ 仍然为 B 的素理想, 并且 $Q \cap B^G = (gQ) \cap B^G$. 这说明 G 作用到 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} B^G$ 的每个纤维上. 如果 G 为有限群, 下面的命题表明 $B^G \hookrightarrow B$ 为整扩张, 这是常见的一类整扩张的例子.

命题 3.7.1 设有限群 G 作用在环 B 上. 令 $A \coloneqq B^G$ 为不变子环. 则有:

(i) $A \hookrightarrow B$ 为整扩张.

(ii) 对 A 的任意乘法子集 S, 群 G 自然作用在 B_S 上, 并且作为 B_S 的子环有等式 $(B_S)^G = A_S$.

(iii) 设 $Q_0, Q_1 \in \operatorname{Spec} B$, 并且 $Q_0 \cap A \subset Q_1 \cap A$, 则存在 $g \in G$, 使得 $Q_0 \subset gQ_1$.

(iv) 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 G 在纤维 $\{Q \in \operatorname{Spec} B \mid Q \cap A = P\}$ 上的作用是传递的.

证明 (i): 对任意 $b \in B$, 考虑首一多项式 $f_b(x) \coloneqq \prod\limits_{g \in G} (x - gb) \in B[x]$. 由 A 的定义可以看到 $f_b(x) \in A[x]$. 又由于 $f_b(b) = 0$, 故 b 在 A 上整.

(ii): 首先注意到 G 在 B_S 上的作用为: $g \cdot \frac{b}{s} = \frac{gb}{s}$, 其中 $g \in G$, $b \in B$, $s \in S$. 由此不难看到 $A_S \subset (B_S)^G$. 另一方面, 设 $b \in B$, $s \in S$, 使得 $\frac{b}{s} \in (B_S)^G$. 记 $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. 则对每个 $i = 1, \ldots, n$, 由 $g_i \cdot \frac{b}{s} = \frac{gb}{s} = \frac{b}{s}$ 可找到 $s_i \in S$, 使得 $s_i g_i b = s_i b$. 从而 $g_i \cdot (s_i b) = s_i b$. 令 $s' \coloneqq s_1 s_2 \ldots s_n \in S$, 则 $\forall\ 1 \leq i \leq n$, 均有 $g_i \cdot (s'b) = s'b$. 这样得到 $s'b \in B^G$, 而 $\frac{b}{s} = \frac{s'b}{s's} \in (B^G)_S$. 这就得到 $(B_S)^G \subset (B^G)_S$.

(iii): 设 $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. 假设对每个 $i = 1, \ldots, n$, 均有 $Q_0 \not\subset g_i Q_1$, 则由素避引理 3.2.1 得到 $Q_0 \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} g_i Q_1$. 令 $b \in Q_0 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} g_i Q_1$, 则 $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $g_i b \notin Q_1$, 故

$\beta \coloneqq \prod_{i=1}^{n} g_i b \notin Q_1$. 而显然 $\beta \in Q_0 \cap A$. 这与 $Q_0 \cap A \subset Q_1 \cap A$ 矛盾! 从而存在 i, 使得 $Q_0 \not\subset g_i Q_1$.

(iv): 由 (iii) 和纤维 $\{Q \in \operatorname{Spec} B \mid Q \cap A = P\}$ 中的素理想 Q 互不包含 (命题 3.6.5) 即得. □

在 Noether 环上的有限生成代数情形, 可以得到如下不变量子环的有限生成性.

命题 3.7.2 设 R 为 Noether 环, B 为有限生成 R-代数. 设 G 为 R-代数同构群 $\operatorname{Aut}_R(B)$ 的有限子群. 则 $A \coloneqq B^G$ 为有限生成 R-代数, 并且 $A \hookrightarrow B$ 为有限扩张.

证明 设 $|G| = m$, $B = R[b_1, \dots, b_n]$. 对 $i = 1, \dots, n$, 考虑多项式

$$f_i(x) \coloneqq \prod_{g \in G} (x - g b_i) = x^m + c_{i,1} x^{m-1} + \cdots + c_{i,m} \in A[x].$$

其中 $c_{i,j} \in B^G = A$. 令 A_0 为 $\{c_{i,j} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ 生成的 B 的 R-子代数. 则 $A_0 \subset A$, 并且由 $f_i(b_i) = 0$ 可知每个 b_i 在 A_0 上整, 故 $A_0 \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 从而 $A_0 \hookrightarrow A$ 和 $A \hookrightarrow B$ 均为有限扩张. 由 A_0 为有限生成 R-代数知 A 为有限生成 R-代数. □

通过完备化, G 在 B 上的作用可以看得更清楚.

命题 3.7.3 设有限群 G 作用在环 B 上. 令 $A \coloneqq B^G$ 为不变子环. 设 A 为 Noether 环, 并且 B 为有限生成 A-代数. 设 $P \in \operatorname{Spec} A$ 处的纤维 $\{Q \in \operatorname{Spec} B \mid Q \cap A = P\}$ 为 $\{Q_1, \dots, Q_n\}$. 则有:

(i) 如下卡氏图的交换图表成立:

$$\begin{array}{ccccccc}
\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}} & \xleftarrow[\sim]{\varphi} & \widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P & \longleftarrow & B_P & \longleftarrow & B \\
\uparrow & \square & \uparrow & \square & \uparrow & \square & \uparrow \\
\widehat{A_P} & \xleftarrow{\mathrm{id}} & \widehat{A_P} & \longleftarrow & A_P & \longleftarrow & A
\end{array}$$

(ii) G 通过 $g \cdot (a \otimes b) = a \otimes (gb)$ 作用到 $\widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P$ 上. 另一方面, G 也通过如下方式自然作用在 $\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}}$ 上: $g \cdot (b_1, \dots, b_n) = (g b_{\sigma(1)}, \dots, g b_{\sigma(n)})$, 其中 $\sigma(i)$ 由 $g Q_{\sigma(i)} = Q_i$ 确定. 在这些作用下, 上述图表中的同构 $\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}} \xleftarrow{\varphi} \widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P$ 为 G-等变的, 即 $\varphi(gx) = g\varphi(x)$, $\forall\, g \in G$, $\forall\, x \in \widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P$.

(iii) $(\widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P)^G \simeq \widehat{A_P}$, $(\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}})^G \simeq \widehat{A_P}$.

(iv) 令 $Q = Q_1$, 并且 $G_Q \coloneqq \{g \in G \mid gQ = Q\}$ 为 Q 的稳定子群, 则 $\widehat{A_P} \simeq \widehat{B_Q}^{G_Q}$.

证明 (i): 这些卡氏图均由 $A \longrightarrow B$ 作基变换得到. φ 为同构由命题 3.6.7 得到.

(ii): 直接验证即得.

(iii): 由命题 3.7.1, (ii) 可知 $(B_P)^G \simeq A_P$. 由 $A_P \hookrightarrow B_P$ 为整扩张以及 B_P 为有限生成 A_P-代数可知 B_P 为有限 A_P-模. 考虑如下 A_P-模的左正合列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow A_P \longrightarrow B_P &\longrightarrow \prod_{g\in G} B_P \\ b &\longmapsto (\dots, gb - b, \dots). \end{aligned}$$

作用函子 $\widehat{A_P} \otimes_{A_P} \cdot$, 由命题 3.3.3 和命题 3.3.4 得到如下左正合列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \widehat{A_P} \longrightarrow \widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P &\longrightarrow \prod_{g\in G} (\widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P) \\ t &\longmapsto (\dots, gt - t, \dots). \end{aligned}$$

由此即得 $(\widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P)^G \simeq \widehat{A_P}$. 再由 G-等变同构 $\widehat{A_P} \otimes_{A_P} B_P \simeq \prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}}$ 即得 $(\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}})^G \simeq \widehat{A_P}$.

(iv): 考虑 G 的陪集分解 $G = \coprod_{i=1}^{n} g_i G_Q$. 不妨设 $g_1 = 1$, 以及 $Q_i \coloneqq g_i Q$. 由 G 在 $\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}}$ 上作用的定义不难看到 $(\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}})^G = \{(b, g_2 b, \dots, g_n b) \mid b \in \widehat{B_Q}^{G_Q}\}$. 故 $\widehat{A_P} \simeq (\prod_{i=1}^{n} \widehat{B_{Q_i}})^G \simeq \widehat{B_Q}^{G_Q}$. □

下面分析 G 与剩余类域扩张 $k(Q)/k(P)$ 的 Galois 群的关系.

命题 3.7.4 设有限群 G 作用在环 B 上. 令 $A \coloneqq B^G$ 为不变子环. 设 $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P \coloneqq Q \cap A \in \operatorname{Spec} A$, 则剩余类域扩张 $k(Q)/k(P)$ 为正规的代数扩张, 并且群同态 $G_Q \longrightarrow \operatorname{Gal}(k(Q)/k(P))$, $g \longmapsto \overline{g}$ 为满同态. 其中

$$\operatorname{Gal}(k(Q)/k(P)) \coloneqq \{\varphi \mid \varphi \text{ 为 } k(Q) \text{ 的域自同构, 且 } \varphi|_{k(P)} = \mathrm{id}\}$$

为 Galois 群, $G_Q \coloneqq \{g \in G \mid gQ = Q\}$ 为 Q 的稳定子群. 对 $g \in G$, $\overline{g}$ 为 g 在 B_Q 上的作用所诱导的 $k(Q) = B_Q/QB_Q$ 的自同构.

证明 通过对 $A_P \hookrightarrow B_P$ 应用命题 3.7.1, (ii), 我们不妨设 P 为 A 的极大理想. 从而 Q 也为 B 的极大理想, 并且 $k(Q) = B/Q$. 对任意 $b \in B$, 由于 $f_b(x) \coloneqq \prod_{g\in G} (x - gb) \in A[x]$, 并且 $f_b(b) = 0$. 故 $|G|$ 次首一多项式 $\overline{f_b(x)} = \prod_{g\in G} (x - \overline{gb}) \in k(P)[x]$

为 $\bar{b}\in k(Q)$ 的零化多项式. 这说明 $k(Q)/k(P)$ 为正规的代数扩张, 并且 $\forall\,\bar{b}\in k(Q)$, 均有 $[k(P)(\bar{b}):k(P)]\leq|G|$. 设 $k(Q)_{sep}$ 为 $k(P)$ 在 $k(Q)$ 中的可分闭包, 即 $k(Q)_{sep}$ 为 $k(Q)/k(P)$ 的中间域, 使得 $k(Q)/k(Q)_{sep}$ 为纯不可分扩张, 而 $k(Q)_{sep}/k(P)$ 为可分扩张 ([30, Lemma 030K]). 由于有限可分扩张均为单扩张 ([30, Lemma 030N]), 可知对于 $k(Q)_{sep}/k(P)$ 的任意中间域 L, 如果 $L/k(P)$ 为有限扩张, 则 $[L:k(P)]\leq|G|$. 由此即知 $k(Q)_{sep}/k(P)$ 为有限扩张, 并且 $k(Q)_{sep}=k(P)(\overline{b_0})$ 对某个 $b_0\in B$ 成立. 由于自然的限制诱导同构 $\mathrm{Gal}(K(Q)/k(P))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Gal}(k(Q)_{sep}/k(P))$, 我们只需再证明 $\varphi\colon G_Q\longrightarrow\mathrm{Gal}(k(Q)_{sep}/k(P))$ 为满同态. 以下分情况讨论.

(i): 设映射 $\operatorname{Spec}B\longrightarrow\operatorname{Spec}A$ 在 P 处的纤维只有 Q 一个点, 则此时 $G_Q=G$. 注意到 $k(Q)_{sep}=k(P)(\overline{b_0})$, 设 $f(x)=\prod\limits_{g\in G}(x-gb_0)\in B[x]$. 由于 $f(x)$ 是 G 不变的, 可知 $f(x)\in A[x]$. 从而 $\overline{f(x)}=\prod\limits_{g\in G}(x-\overline{gb_0})\in k(P)[x]$ 为 $\overline{b_0}$ 的一个零化多项式. 故对任意 $\sigma\in\mathrm{Gal}(k(Q)_{sep}/k(P))$, 存在 $g\in G$, 使得 $\sigma(\overline{b_0})=\overline{gb_0}$. 由此可知 $\varphi(g)=\sigma$. 这就证明了 φ 为满同态.

(ii): 设 B 为有限生成 $\mathbb{Z}$-代数. 由命题 3.7.2 和命题 3.7.3 可知 $\widehat{A}\simeq\widehat{B_Q}^{G_Q}$. 由于 Noether 局部环的完备化不改变剩余类域, 我们将情形 (i) 的结论应用到 G_Q 在 $\widehat{B_Q}$ 上的作用即得 φ 为满同态.

(iii): 回到一般情形. 考虑 B 的全部 G-不变有限生成 $\mathbb{Z}$-子代数形成的集合 $\{B_j\mid j\in J\}$. 对任意 $j\in J$, 令 $A_j:=B_j^G$, $Q_j:=Q\cap B_j\in\operatorname{Spec}B_j$, $P_j:=P\cap A_j\in\operatorname{Spec}A_j$. 则与 φ 类似, 有同态 $\varphi_j\colon G_{Q_j}\longrightarrow\mathrm{Gal}(k(Q_j)/k(P_j))$. 不难看到 $B=\bigcup\limits_{j\in J}B_j$, $A=\bigcup\limits_{j\in J}A_j$, $k(Q)=\bigcup\limits_{j\in J}k(Q_j)$, $k(P)=\bigcup\limits_{j\in J}k(P_j)$. 由命题 3.7.2 可知每个 A_j 均为 Noether 环, 并且 $A_j\hookrightarrow B_j$ 为有限扩张. 任取 $\sigma\in\mathrm{Gal}(k(Q)_{sep}/k(P))$. 对 $j\in J$, 考虑集合 $S_j:=\{g\in G_{Q_j}\mid\varphi_j(g)=\sigma|_{k(Q_j)}\}$. 通过考虑 G 在 B_j 上的作用, 并应用情形 (ii) 的结论, 可知每个 S_j 都非空. 同时, 对任意有限个 $j_1,\dots,j_m\in J$, 由于 $B_{j_1}\cup\cdots\cup B_{j_m}$ 生成的 B 的 $\mathbb{Z}$-子代数 C 也是有限生成 $\mathbb{Z}$-代数, 从而存在 $j_0\in J$, 使得 $C=B_{j_0}$. 由此可知 $S_{j_1}\cap\cdots\cap S_{j_m}\supset S_{j_0}\neq\varnothing$. 由于每个 S_j 都是有限集 G 的子集, 故知 $\bigcap\limits_{j\in J}S_j\neq\varnothing$. 任取 $g\in\bigcap\limits_{j\in J}S_j$, 不难看到 $g\in G_Q$, 并且 $\varphi(g)=\sigma$. 这就证明了 φ 为满同态. □

注记 3.7.1　命题 3.7.4 的另一个证明可见 [15, Proposition 3.1.1. (iii)].

为了给出更具体的群作用的例子, 我们先定义整闭整环的概念.

定义 3.7.1　设 A 为整环, 如果 A 在其分式域 $\mathrm{Frac}(A)$ 中的整闭包为 A, 则称 A 为**整闭整环**.

接下来考察整闭整环的一些例子和基本性质.

命题 3.7.5　唯一因子分解整环 (UFD) 为整闭整环.

证明　设 A 为 UFD, $K=\mathrm{Frac}(A)$. 设 $0\neq x\in K$ 在 A 上整. 则 $x=\dfrac{a}{b}$, a,b 为 A 中

互素的元素, 并且 x 满足 A 上的首一方程

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

其中 $a_i \in A$. 该方程等价于

$$a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + a_0 b^n = 0.$$

假设 $b \notin A^*$, 则可以取 b 的不可约因子 p. 由上述方程可知 $p \mid a^n$, 从而 $p \mid a$. 这与 a, b 互素矛盾. 由此即知 $b \in A^*$, $x \in A$. □

命题 3.7.6 设 A 为整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为其分式域.

(i) 设 A 为整闭整环, 并且 S 为 A 的一个乘法子集, 则局部化 A_S 为整闭整环.

(ii) 设 $A = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, 其中每个 A_i 为 K 的子环, 并且为整闭整环. 则 A 为整闭整环.

(iii) 如果 $\forall\, P \in \mathrm{Spec}\, A$, A_P 均为整闭整环, 则 A 为整闭整环.

证明 (i): 设 $x \in K$ 满足 A_S 上的首一方程: $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$, $c_i \in A_S$. 可以看到存在 $s \in S$ 以及 $a_i \in A$, 使得 $c_i = \dfrac{a_i}{s}$, $\forall\, i = 0, \ldots, n-1$. 由此知 sx 满足方程

$$(sx)^n + sc_{n-1}(sx)^{n-1} + \cdots + s^n c_0 = 0.$$

而 $s^i c_{n-i} = a_{n-i}s^{i-1} \in A$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$. 由 A 整闭知 $sx \in A$, 故 $x \in A_S$.

(ii): 设 $x \in K$ 满足 A 上的首一方程, 那么显然也满足 A_i 上的首一方程, 从而由 A_i 整闭知 $x \in A_i$. 故 $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i = A$.

(iii): 由 (i), (ii) 和 $A = \bigcap_{P\in \mathrm{Spec}\, A} A_P$ (命题 1.3.14) 即得. □

注意在 (iii) 中, 只需对所有非零素理想 P 验证 A_P 为整闭整环, 就能得到 A 为整闭整环. 这是因为 A 在 (0) 处的局部化为 $\mathrm{Frac}(A)$, 而域显然为整闭整环. 现在可以给出群作用的一个常见实例.

命题 3.7.7 设 A 为整闭整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为分式域. 设 L/K 为域的有限 Galois 扩张, B 为 A 在 L 中的整闭包. 令 $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ 为 Galois 群. 则有:

(i) G 自然作用在 B 上, 并且 $A = B^G$.

(ii) 任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 纤维 $\{Q \in \mathrm{Spec}\, B \mid Q \cap A = P\}$ 的元素个数均不超过 $[L : K]$.

证明 (i): 不难看到 $\mathrm{Frac}(B) = L$, 并且 $\forall\, g \in G$, $gB = B$. 故 G 自然作用到 B 上. 同时, 由 $A \subset B^G \subset B \cap L^G = B \cap K \subset K$ 和 A 为整闭整环可知 $A = B^G$.

(ii): 由命题 3.7.1, (iii), 对任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 群 G 在纤维 $\{Q \in \mathrm{Spec}\, B \mid Q \cap A = P\}$ 上的作用是传递的, 故该纤维的元素个数不超过 $|G| = [L : K]$. □

实际上, 上述命题的 (ii) 在更一般的条件下成立, 见本章习题 16.

习题

1. 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为有限 B-模. 设对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 均有 $M \otimes_A k(P) = 0$, 证明 $M = 0$.

2. 设 M 为有限 A-模, I 为 A 的理想. 证明:

(i) $\sqrt{\operatorname{ann}_A(M/IM)} = \sqrt{\operatorname{ann}_A(M) + I}$.

(ii) $\operatorname{Supp}_A(M/IM) = \operatorname{Supp}_A(M) \bigcap V(I)$.

3. 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模, N 为 M 的子模. 证明

$$\bigcap_{n \geq 1} (N + m^n M) = N.$$

4. 设 (A, m) 为 Noether 局部环, M_1, M_2, M_3 为有限 A-模. 设 $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$, $\psi\colon M_2 \longrightarrow M_3$ 为 A-模同态, 并且对任意 $i \geq 1$,

$$M_1 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\varphi \otimes 1} M_2 \otimes_A (A/m^i) \xrightarrow{\psi \otimes 1} M_3 \otimes_A (A/m^i)$$

在 $M_2 \otimes_A (A/m^i)$ 处正合. 证明: $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 在 M_2 处正合.

5. 设 $\widehat{A}$ 为环 A 在理想 I 处的完备化.

(i) 证明嵌入同态 $I \hookrightarrow A$ 诱导的完备化之间的同态 $\widehat{I} \hookrightarrow \widehat{A}$ 为单同态, 下面通过这个单同态将 $\widehat{I}$ 看作 $\widehat{A}$ 的理想.

(ii) 证明 $\widehat{I}$ 包含在 $\widehat{A}$ 的任何一个极大理想中.

(iii) 设 I 为有限生成理想, 证明 $\widehat{I} = I\widehat{A}$.

6. 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想, M, N 均为有限 A-模. 证明:

(i) 有 $\widehat{A}$-模同构 $\widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{N} \simeq \widehat{M \otimes_A N}$, 其中完备化均指在 I 处的完备化.

(ii) 有 $\widehat{A}$-模同构 $\operatorname{Hom}_{\widehat{A}}(\widehat{M}, \widehat{N}) \simeq \widehat{\operatorname{Hom}_A(M, N)}$.

7. 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想, 设 $\widehat{A}$ 为 A 在 I 处的完备化. 记 $\hat{\widehat{A}}$ 为 $\widehat{A}$ 在 $I\widehat{A}$ 处的完备化. 证明有环同构 $\hat{\widehat{A}} \simeq \widehat{A}$.

8. 证明 p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 为整环.

9. 设 A 为 Noether 环, M 为有限 A-模. 证明 $\operatorname{Spec} A$ 上的函数

$$\begin{aligned} f\colon \operatorname{Spec} A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \dim_{k(P)} M \otimes_A k(P) \end{aligned}$$

是上半连续的, 即对任意实数 a, $f^{-1}((-\infty, a))$ 为开子集. 并证明 $f(\operatorname{Spec} A)$ 为有限集.

10. 设 A 环, S 为 A 的正则元全体. 则 S 为 A 的乘法子集. 记 $\operatorname{Tot}(A) = A_S$ 为 A 在 S 处的局部化, 称为 A 的全分式环 (total ring of fractions). 称 A 为正规环 (normal ring), 如果对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 局部环 A_P 均为整闭整环.

(a) 设 A 为 Noether 约化环. 记 $P_1, \ldots, P_r$ 为 A 的所有极小素理想. 证明:

(i) 自然同态 $A \longrightarrow A/P_1 \times \cdots \times A/P_r$, $a \longmapsto (\bar{a}, \ldots, \bar{a})$ 为单同态.
(ii) $\mathrm{Ass}(A) = \{P_1, \ldots, P_r\}$.
(iii) $\mathrm{Tot}(A) \simeq K_1 \times \cdots \times K_r$. 其中 $K_i = \mathrm{Frac}(A/P_i)$.

(b) 设 A 为 Noether 环. 证明以下几条互相等价:
(i) A 为正规环.
(ii) 存在环同构 $A \simeq A_1 \times \cdots \times A_r$, 使得每个 A_i 均为整闭整环.
(iii) A 为约化环, 并且 A 在 $\mathrm{Tot}(A)$ 中的整闭包为 A 自身.

11. 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 Noether 环之间的环同态, 设 M 为有限 B-模. 通过 φ 将 M 也看作 A-模. 证明 $\mathrm{Ass}_A(M) = \varphi^*(\mathrm{Ass}_B(M))$. 其中 $\varphi^*\colon \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ 为 φ 诱导的素谱空间的映射.

12. 设 $A \hookrightarrow B$ 为整环的单同态, 且为整扩张. 设 P 为 B 的非零素理想. 证明 $P \cap A \neq (0)$.

13. 试分析 $\mathbb{R}[x, y]$ 中的极大理想的形状.

14. 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数, 并且 A 为整环. 令 $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 设 k' 为 k 在 K 中的整闭包. 证明 k' 为域, 并且 $[k' : k] < +\infty$.

15. 我们称一个环 A 为 **Jacobson 环**, 如果对 A 的任意理想 I, 其根式理想 $\sqrt{I}$ 均等于所有包含 I 的极大理想的交.

(i) 证明环 A 为 Jacobson 环 $\iff$ A 的任意素理想 P 均等于所有包含 P 的极大理想的交.

以下设 A 为 Jacobson 环.

(ii) 证明对任意理想 I, 商环 A/I 为 Jacobson 环.
(iii) 证明 A 的极大理想在 $\mathrm{Spec}\, R$ 中稠密, 即对任意 $f \in A$, 如果 f 不是幂零元, 则存在 A 的极大理想 m 满足 $f \notin m$.
(iv) 设 A 还是整环, 并且存在 $0 \neq f \in A$, 使得 A_f 为域. 证明 A 为域.

以下设 B 为有限生成 A-代数.

(v) 设 $Q \in \mathrm{Spec}\, B$, 令 $P := Q \cap A \in \mathrm{Spec}\, A$. 证明: Q 为 B 的极大理想 $\iff$ P 为 A 的极大理想, 并且 $[k(Q) : k(P)] < +\infty$.
(vi) 证明 B 为 Jacobson 环.
(vii) 设 A 还是 Noether 整环, 并且 $B \otimes_A \mathrm{Frac}(A) \neq 0$. 证明: 存在 $0 \neq f \in A$, 使得对 A 的任意极大理想 m, 如果 $f \notin m$, 那么存在 B 的极大理想 n 满足 $n \cap A = m$.

16. 设 A 为整闭整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$. 设 L/K 为域的有限扩张, B 为 L 的子环, 使得 $A \hookrightarrow B$ 为整扩张. 证明: 对任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 纤维 $\{Q \in \mathrm{Spec}\, B \mid Q \cap A = P\}$ 的元素个数均不超过可分次数 $[L : K]_s$ ([30, Definition 030L]).

习题提示

11. 设 $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$. 要证明 $P \in \varphi^*(\mathrm{Ass}_B(M))$, 可以先在 P 处作局部化从而假设 A 为局部环, P 为其唯一极大理想. 再设 $x \in M$, $P = \mathrm{ann}_A(x)$. 则 $P \subset \mathrm{ann}_B(x)$. 由命题 3.4.1 可以找到一个 $Q \in \mathrm{Ass}_B(M)$ 包含 $\mathrm{ann}_B(x)$, 即得 $Q \cap A = P$.

14. 为了证明 $[k' : k] < +\infty$, 利用 Noether 正规化定理, 将问题约化为: 设 $k(x_1, \ldots, x_n) \subset K$, $x_1, \ldots, x_n$ 在 k 上代数无关, 并且 $[K : k(x_1, \ldots, x_n)] < +\infty$. 设 $k' \subset K$ 为 k 的代数扩张, 则

$$[k' : k] \leq [k'(x_1, \ldots, x_n) : k(x_1, \ldots, x_n)] \leq [K : k(x_1, \ldots, x_n)].$$

该习题见 [30, Lemma 037J].

15. (v): 记 $\overline{A} \coloneqq A/P$, $\overline{B} \coloneqq B/Q$, 则有整环之间的单同态 $\overline{A} \hookrightarrow \overline{B}$. 对其应用整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5, 得到分解 $\overline{A}_f \hookrightarrow \overline{A}_f[t_1, \ldots, t_r] \hookrightarrow \overline{B}_f$. 这样, 如果 Q 为 B 的极大理想, 则 $\overline{B}_f$ 为域, 从而得到 $r = 0$, $\overline{A}_f$ 为域. 由 $\overline{A}$ 为 Jacobson 环知 $\overline{A}$ 为域, 即 P 为 A 的极大理想. 反之, 如果 $\overline{A}$ 为域, 并且 $[\mathrm{Frac}(\overline{B}) : \mathrm{Frac}(\overline{A})] < +\infty$, 则易知 $r = 0$, 并且可设 $f = 1$. 从而 $\overline{B} = \overline{B}_f$ 作为域 $\overline{A}_f = \overline{A}$ 的有限扩张也为域.

(vi): 对任意 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 令 $P \coloneqq Q \cap A \in \operatorname{Spec} A$, 通过考虑 $A/P \hookrightarrow B/Q$, 我们不妨设 A, B 为整环, 并且结构同态 $A \hookrightarrow B$ 为单同态. 只需证明 B 的所有极大理想的交等于 (0). 这等价于证明对任意非零的 $g \in B$, 均存在 B 的极大理想 n 不包含 g. 考虑有限生成 A-代数 B_g, 与命题 3.6.8 (iv) 的证明类似, 可以找到 A 的极大理想 m 和 B_g 的极大理想 n, 使得 $n \cap A = m$, 并且 $[k(n) : k(m)] < +\infty$. 再由 (v), n 看作 B 的素理想时也是 B 的极大理想, 并且 $g \notin n$.

16. 通过取 A 在 L 中的整闭包将问题约化为 B 为 A 在 L 中的整闭包情形. 再通过取 L/K 的正规闭包, 又约化为 L/K 是有限正规扩张的情形. 最后注意到如果 L/K 为有限纯不可分扩张, 则 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为双射. 从而最终将问题约化为如下情形: L_1/K 为有限 Galois 扩张, L 为中间域, A 为整闭整环, 使得 $K = \mathrm{Frac}(A)$, 并且 B 和 B_1 分别为 A 在 L 和 L_1 中的整闭包. 任取 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B_1$ 满足 $Q_1 \cap A = P$, 再利用命题 3.7.7, 得到 $H \coloneqq \mathrm{Gal}(L_1/L)$ 和 $G \coloneqq \mathrm{Gal}(L_1/K)$ 分别在 $\operatorname{Spec} B_1 \longrightarrow \operatorname{Spec} B$ 和 $\operatorname{Spec} B_1 \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 的纤维上作用传递, 从而可以构造从右陪集空间 G/H 到纤维 $\{Q \in \operatorname{Spec} B \mid Q \cap A = P\}$ 的满射: $Hg \longmapsto (gQ_1) \cap B$.

第四章 Dedekind 整环

本章主要介绍 Dedekind 整环的基本性质. 这种环对应一维正则概型, 在代数数论中的典型例子是代数数域的代数整数环, 在代数几何中的典型例子是一维光滑仿射曲线的正则函数环. Dedekind 整环局部上是离散赋值环, 因此很多时候我们通过逐点作局部化来考察 Dedekind 整环. 另一方面, 类比于利用分歧覆盖来研究代数曲线, 我们也可以从整扩张的角度去考察 Dedekind 整环. 因此, 考察整扩张时的纤维可以说是本章的核心方法.

4.1 离散赋值环

定义 4.1.1 设 A 为环, 如果其同时满足:

(i) A 为整环,

(ii) (A, m) 为 Noether 局部环,

(iii) $m = (\pi)$ 为非 0 主理想,

则称 A 为**离散赋值环**, 简称 DVR.

例 4.1.1 形式幂级数环 $\mathbb{C}[\![x]\!]$, p-进整数环 $\mathbb{Z}_p$, 以及 $\mathbb{Z}$ 在素理想 (p) 处的局部化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 均为 DVR.

命题 4.1.1 设 (A, m) 为 DVR, $m = (\pi)$, 则:

(i) $\forall\, 0 \neq a \in A$, 存在 $k \geqslant 0$ 为非负整数, 以及 $u \in A^*$, 使得 $a = u \cdot \pi^k$.

(ii) A 为主理想整环 (PID), 从而为唯一因子分解整环 (UFD).

证明 (i): 由 Krull 交集定理3.3.1, $\bigcap_{i=0}^{\infty} m^i = (0)$. 从而对 $0 \neq a \in A$, 可以找到 $k \geq 0$, 使得 $a \in m^k \setminus m^{k+1}$. 由此可得 $a = u\pi^k$, 并且 $u \in A \setminus m = A^*$.

(ii): 设 I 为 A 的非零理想. 由 Noether 性知 $I=(a_1,\dots,a_n)$ 是有限生成的. 由 (i), 可设 $a_i=u_i\pi^{k_i}$, $u_i\in A^*$, $k_i\geq 0$. 令 $k=\min\limits_{1\leq i\leq n}k_i$, 不难看到 $I=(\pi^k)$, 从而为主理想. □

命题 4.1.2 设 m 为环 A 的极大理想, $k=A/m$ 为剩余类域. 设 $f(x)\in A[x]$ 为首一多项式, 满足 $\overline{f(x)}\in k[x]$ 没有重根, 即 $(\overline{f(x)},\overline{f'(x)})=1$. 设 $A[x]/(f(x))\longrightarrow B$ 为满的 A-代数同态. 设 $Q\in\operatorname{Spec}B$, 满足 $Q\cap A=m$, 则在 B_Q 中有 $QB_Q=mB_Q$. 更进一步, 如果 m 为 A 的主理想, 并且 B_Q 还是 Noether 整环, 则 B_Q 为 DVR 或域.

证明 由 $A[x]/(f(x))\longrightarrow B$ 为满同态可知 $k[x]/(\overline{f(x)})\longrightarrow B/mB$ 也是满同态. 由于 $\overline{f(x)}$ 没有重根, 根据中国剩余定理得到 $k[x]/(\overline{f(x)})$ 为有限个域的乘积, 从而 B/mB 也是有限个域的乘积. 故局部化 $(B/mB)_Q=B_Q/mB_Q$ 为域, 从而其中的素理想 QB_Q/mB_Q 为零理想. 这说明在 B_Q 中有 $QB_Q=mB_Q$. 如果 $m=(\pi)$ 是 A 的主理想, 则 $QB_Q=(\pi)$ 也是 B_Q 的主理想. 当 B_Q 还是 Noether 整环时, 则 B_Q 为 DVR 或域. □

例 4.1.2 设 $p\neq 2$ 为素数. 则 x^2+1 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中没有重根. 设 P 为 $\mathbb{Z}[i]\simeq\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ 中的素理想, 并且满足 $P\cap\mathbb{Z}=(p)$. 在命题 4.1.2 中取 $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{Z}[i]$ 可知 $\mathbb{Z}[i]_P$ 为 DVR.

下面从整闭整环的角度给出 DVR 的等价刻画. 首先注意到由维数的定义, 一个整环 A 是一维环当且仅当 A 不是域, 并且 A 的任何非零素理想均为极大理想.

定理 4.1.1 设 (A,m) 为局部环. 则 A 为 DVR $\iff$ A 为一维 Noether 整闭整环. .

证明 $\Longrightarrow$: 由 DVR 是唯一因子分解整环和命题 3.7.5 即得 A 为整闭整环. 一维和 Noether 性由 DVR 的定义即得.

$\Longleftarrow$: 取 $0\neq a\in m$. 则 m/aA 为 A/aA 的极小素理想. 从而 $m\in\operatorname{Ass}(A/aA)$. 设 $b\in A$ 使得 $m=\operatorname{ann}(\bar{b})$. 则 $\frac{b}{a}\notin A$, 且 $m\frac{b}{a}\subset A$ 为 A 的理想. 如果 $m\frac{b}{a}\subset m$, 取理想 m 的一组生成元 $x_1,\dots,x_k$, 则存在环 A 上的 k 阶方阵 $P\in M_k(A)$, 使得

$$\frac{b}{a}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}.$$

由伴随方阵技巧知 $\det(\frac{b}{a}I_k-P)=0$, 故 $\frac{b}{a}$ 在 A 上整, 从而 $\frac{b}{a}\in A$, 但这与 $\frac{b}{a}\notin A$ 矛盾. 因此 $m\frac{b}{a}=A$. 设 $\pi\in m$ 使得 $\pi\frac{b}{a}=1$. 不难验证 $m=(\pi)$. 从而 A 为 DVR. □

回忆命题 1.3.14是说对整环 A, 有 $A=\bigcap\limits_{P\in\operatorname{Spec}A}A_P$. 其证明关键为对于 $x=b/a\in$

$\mathrm{Frac}(A)$, 考虑 A 的理想

$$I \coloneqq \{s \in A | sx \in A\} = \{s \in A | sb \in aA\}.$$

注意到在商环 A/aA 中看, 有 $I/aA = \mathrm{ann}(\bar{b})$. 从而如果 $\bar{b} \neq 0$, 则存在 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 使得 $I \subset P$. 利用这个观察, 在 Noether 整环的情形, 可以将命题 1.3.14 加强为只需 P 遍历 $\mathrm{Ass}(A/aA)$, $\forall\ a \neq 0$. 这里及本节剩下的命题中, 我们总是将 $\mathrm{Ass}(A/aA)$ 看作 A/aA 作为 A-模的伴随素理想集合, 因此 $\mathrm{Ass}(A/aA) \subset \mathrm{Spec}\, A$. 注意通过等同 $\mathrm{Spec}(A/aA) = V(a) \subset \mathrm{Spec}\, A$, $\mathrm{Ass}(A/aA)$ 也等于商环 A/aA 的伴随素理想集合.

命题 4.1.3 设 A 为 Noether 整环. 设 $a, b \in A$ 为非零元素, $x = \dfrac{b}{a} \in \mathrm{Frac}(A)$. 如果对任意 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 都有 $x \in A_P$, 那么 $x \in A$.

证明 假设 $x \notin A$, 则 $b \notin aA$. 记 $I \coloneqq \{c \in A | xc \in A\} = \{c \in A | cb \in aA\}$. 则 $I = \mathrm{ann}(\bar{b})$, 其中 $\bar{b}$ 为 b 在商环 A/aA 中代表的元. 由于 $\bar{b} \neq 0$, 存在 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 使得 $I \subset P$. 这与 $x \in A_P$ 矛盾! 故 $x \in A$. □

命题 4.1.4 设 A 为 Noether 环, 且为整闭整环. 则对每个非零的 $a \in A$, 对每个 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 均有 $\mathrm{ht}\, P = 1$.

证明 通过在 P 处作局部化, 不妨设 A 为局部环, 且 $P = m$ 为极大理想. 设 $b \in A$, 使得对 $0 \neq \bar{b} \in A/aA$, 有 $m = \mathrm{ann}(\bar{b})$. 从而 $mb \subset aA$, 即 $m\frac{b}{a} \subset A$. 下面讨论理想 $m\frac{b}{a}$ 是否等于 A:

- 若 $m\frac{b}{a} = A$, 令 $\pi \in m$ 满足 $\pi\frac{b}{a} = 1$, 易验证 $m = (\pi)$. 故 A 为 DVR, $\mathrm{ht}\, m = 1$.
- 若 $m\frac{b}{a} \subset m$, 则通过伴随方阵技巧知 $\frac{b}{a}$ 在 A 上整, 故由 A 的整闭性知 $\frac{b}{a} \in A$. 这与 $\bar{b}$ 在 A/aA 中不为零矛盾! □

定理 4.1.2 设 A 为 Noether 整环. 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:

(i) 对 A 的每个高度为 1 的素理想 P, 局部环 A_P 为离散赋值环.

(ii) $A = \bigcap\limits_{\mathrm{ht}\, P = 1} A_P$.

证明 如果这两个条件成立, 由 DVR 为整闭整环以及整闭整环的交还是整闭整环可知 A 为整闭整环. 反之, 如果 A 为整闭整环, 由定理 4.1.1 知 (i) 成立. 由命题 4.1.3 知 $A = \bigcap A_P$, 其中 P 遍历集合 $S \coloneqq \bigcup\limits_{a \in A \setminus 0} \mathrm{Ass}(A/aA)$. 再由命题 4.1.4 知 S 恰为所有高度等于 1 的素理想集合. 由此知 (ii) 成立. □

推论 4.1.1 设 A 为 Noether 环, 且为整闭整环, 则 $A[x]$ 为整闭整环.

证明 由定理 4.1.2, $A = \bigcap\limits_{\mathrm{ht}\, P = 1} A_P$, 从而 $A[x] = \bigcap\limits_{\mathrm{ht}\, P = 1} A_P[x]$. 而每个这样的 A_P 均为 DVR, 特别地是唯一因子分解整环, 故 $A_P[x]$ 也是唯一因子分解整环, 从而为整闭整环.

故它们的交 $A[x]$ 也为整闭整环. □

事实上, 上述命题中的 Noether 条件可以去掉.

命题 4.1.5 设 A 为整闭整环, 则 $A[x]$ 为整闭整环.

证明 令 $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为分式域, 则 $\mathrm{Frac}(A[x]) = K(x)$. 设 $f(x) \in K(x)$ 在 $A[x]$ 上整, 则 $f(x)$ 在 $K[x]$ 上也是整的. 而 $K[x]$ 是整闭整环, 故 $f(x) \in K[x]$. 设 $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x) \in A[x]$ 使得方程 $f(x)^n + a_{n-1}(x)f(x)^{n-1} + \cdots + a_0(x) = 0$ 成立. 定义 $F(y) \coloneqq y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_0(x) \in A[x][y]$. 取正整数 N 使得 $N > \max\{\deg f(x), \deg a_0(x), \dots, \deg a_{n-1}(x)\}$. 令 $G(y) \coloneqq F(y - x^N) \in A[x][y]$, 则存在 $b_i(x) \in A[x]$, 使得 $G(y) = y^n + b_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + b_0(x)$. 并且由 N 的取法可知 $b_0(x) \in A[x]$ 为首一多项式. 由 $F(f(x)) = 0$ 知 $G(f(x) + x^N) = (f(x) + x^N)^n + b_{n-1}(x)(f(x) + x^N)^{n-1} + \cdots + b_0(x) = 0$ 在 $K[x]$ 上成立. 从而 $x^N + f(x) \mid b_0(x)$, 即存在 $h(x) \in K[x]$ 使得 $b_0(x) = (x^N + f(x))h(x)$. 这样对首一多项式 $x^N + f(x) \in K[x]$ 在 $\overline{K}$ 中的每个根 α, 均有 $b_0(\alpha) = 0$. 因为 $b_0(x) \in A[x]$ 为首一多项式, 可知 $\alpha \in \overline{K}$ 在 A 上整. 由此得到多项式 $x^N + f(x) \in K[x]$ 的每个系数都在 A 上整. 再由 A 为整闭整环知 $x^N + f(x) \in A[x]$. 故 $f(x) \in A[x]$. □

定理 4.1.3 设 A 为 Noether 整环. 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:

(i) 对 A 的每个高度为 1 的素理想 P, 局部环 A_P 为离散赋值环.

(ii) 对每个非零的 $a \in A$, 对每个 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 均有 $\mathrm{ht}\, P = 1$.

证明 当 A 为 Noether 整闭整环时, 由定理 4.1.1知 (i) 成立. 由命题 4.1.4 知 (ii) 成立.

反之, 假设 (i) 和 (ii) 成立, 由命题 4.1.3 知 $A = \bigcap A_P$, 其中 P 遍历集合 $S \coloneqq \bigcup_{a \in A \setminus 0} \mathrm{Ass}(A/aA)$. 再由 (ii) 知 S 恰为所有高度等于 1 的素理想集合. 由此知 $A = \bigcap_{\mathrm{ht}\, P = 1} A_P$ 为一些离散赋值环的交, 从而 A 为整闭整环. □

注记 4.1.1 一个不事先假设 A 为整环的整闭判别法见定理 8.5.1.

4.2 Dedekind 整环

定义 4.2.1 一个环 A 称为 **Dedekind 整环**, 如果 A 为 Noether 整环, 并且对 A 的任意极大理想 m, 局部化 A_m 均为离散赋值环.

Dedekind 整环的主要特点即是局部上均为 DVR. 由于 DVR 可以从整闭整环的角度去刻画 (定理 4.1.1), 我们可以将这个刻画整体化, 得到 Dedekind 整环的等价定义.

定理 4.2.1 设 A 为环. 则 A 为 Dedekind 整环 $\iff$ A 为一维 Noether 整闭整环.

证明 $\Longrightarrow$: 由 Dedekind 整环的定义以及命题 3.7.6 即得.

$\Longleftarrow$: 任取 A 的非零素理想 P, 则 A_P 为 Noether 局部整环, 并且 $PA_P \neq (0)$. 由 A 为一维整闭整环知 A_P 也为一维整闭整环, 再由定理 4.1.1 即知 A_P 为 DVR. □

在具体例子中, 我们经常直接利用定义, 通过验证每个非零素理想 (或每个极大理想) 处的局部化都是 DVR 来说明一个环为 Dedekind 整环.

例 4.2.1 $\mathbb{Z}[i]$ 为 Dedekind 整环. 首先 $\mathbb{Z}[i]$ 为 Noether 整环. 任取非零素理想 P, 考虑整扩张 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$, 由于 $\mathbb{Z}[i]$ 中的零理想与 $\mathbb{Z}$ 交为 (0), 而且对整扩张, 任一点的纤维中的两个素理想没有包含关系 (命题 3.6.5), 故 $P \cap \mathbb{Z} \neq (0)$. 设 $P \cap \mathbb{Z} = (p)$. 如果素数 p 不是 2, 则例 4.1.2 已经说明了 $\mathbb{Z}[i]_P$ 是 DVR. 故只需考虑 $P \cap \mathbb{Z} = (2)$ 的情形, 此时 $\overline{P}$ 为 $\mathbb{Z}[i]/(2)$ 中的素理想, 而我们有环同构:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(2)} \overset{i \mapsto x}{=} \frac{\mathbb{Z}[x]}{(2, x^2+1)} = \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(x^2+1)} = \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(x+1)^2}.$$

由于 $\mathbb{F}_2[x]/(x+1)^2$ 只有一个素理想 $(x+1)$, 故在 $\mathbb{Z}[i]/(2)$ 中有 $\overline{P} = \overline{(i+1)}$. 这说明在 $\mathbb{Z}[i]$ 中有 $P = (2, i+1)$. 再由 $2 = (1+i)(1-i)$ 即知 $P = (i+1)$ 为主理想. 这样得到局部环 $\mathbb{Z}[i]_P$ 中的唯一极大理想 $P\mathbb{Z}[i]_P$ 是主理想, 从而 $\mathbb{Z}[i]_P$ 为 DVR.

这个例子中的处理手法可以总结如下: 设 P 为环 B 中的素理想, 为了说明 PB_P 为主理想, 我们首先选取 P 中的一个元素 a, 然后考察商环 $B/(a)$. 对于比较合适的 a, 商环 $B/(a)$ 或者其在 P 处的局部化 $(B/(a))_P$ 较为简单, 从而其素理想 $P/(a)$ 容易分析并写出生成元, 这样就可以分析出 P 的生成元. 为了找到合适的 a, 我们经常需要找到一个较为简单的环 (通常是主理想整环)A 以及 A 到 B 的同态, 然后将 a 取为 $P \cap A$ 的生成元. 利用这个处理方法, 可以得到下面两类典型的 Dedekind 整环: 分圆整数环和平面光滑代数曲线的正则函数环.

命题 4.2.1 设 $N \geq 1$, 设 $\zeta_N := e^{\frac{2\pi i}{N}} \in \mathbb{C}^*$ 为 N 次本原单位根. 则分圆整数环 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 为 Dedekind 整环.

证明 显然 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 为 Noether 整环. 任取 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的非零素理想 Q, 由命题 3.6.5 知 $Q \cap \mathbb{Z} \neq (0)$. 从而 $Q \cap \mathbb{Z} = (p)$, 并且 p 为素数.

(1) 设 $p \nmid N$. 则在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中, $x^N - 1$ 没有重根. 通过考察满同态 $\mathbb{Z}[x]/(x^N-1) \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_N]$, $x \mapsto \zeta_N$, 并应用命题 4.1.2 可知 $Q\mathbb{Z}[\zeta_N]_Q = (p)$ 为主理想. 故此时 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_Q$ 为 DVR.

(2) 设 $p \mid N$. 则 $N = p^n m$, $m \geq 2$, 且 $(p, m) = 1$. 不难验证 $\mathbb{Z}[\zeta_N] = \mathbb{Z}[\zeta_m, \zeta_{p^n}]$. 令 $A := \mathbb{Z}[\zeta_m]$, 则 $\mathbb{Z}[\zeta_N] = A[\zeta_{p^n}]$. 记 $P = Q \cap A \in \operatorname{Spec} A$. 则 $P \cap \mathbb{Z} = (p)$. 由 (1) 可知 A_P 为 DVR, 并且 $PA_P = (p)$. 注意到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_Q$ 也可看作 $A_P[\zeta_{p^n}]$ 在 Q 处的局部化. 由满同态 $A_P[x]/(x^{p^n} - 1) \longrightarrow A_P[\zeta_{p^n}]$, $x \longmapsto \zeta_{p^n}$ 可得满同态 $k(P)[x]/(x^{p^n} - 1) \longrightarrow A_P[\zeta_{p^n}]/(p)$. 由于剩余类域 $k(P)$ 为 $\mathbb{F}_p$ 的扩域, 可知 $(x-1)$ 为 $k(P)[x]/(x^{p^n} - 1) = k(P)[x]/(x-1)^{p^n}$ 的唯一素理想. 由此可知在商环 $A_P[\zeta_{p^n}]/(p)$ 中有 $Q = (\zeta_{p^n} - 1)$, 故在 $A_P[\zeta_{p^n}]$ 中有 $Q = (p, \zeta_{p^n} - 1)$.

易知 $\Phi(x) \coloneqq \frac{x^{p^n}-1}{x^{p^{n-1}}-1}$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中, 并且 $\Phi(\zeta_{p^n}) = 0$. 令 $f(y) \coloneqq \Phi(y+1) = \frac{(y+1)^{p^n}-1}{(y+1)^{p^{n-1}}-1} \in \mathbb{Z}[y]$. 由 $(y+1)^c - 1$ 的最低次项为 cy 可知 $f(y)$ 的常数项为 p. 再利用 $f(\zeta_{p^n}-1) = 0$ 即得 $p \in (\zeta_{p^n}-1)$, 故在 $A_P[\zeta_{p^n}]$ 中 $Q = (\zeta_{p^n}-1)$ 为主理想. 这样得到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]_Q = (A_P[\zeta_{p^n}])_Q$ 为 DVR. □

作为推论, 我们得到 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 为整闭整环. 在代数曲线的情形, 我们有下面的 Dedekind 整环的典型例子.

命题 4.2.2 设 k 为代数封闭域, $f(x,y) \in k[x,y]$ 为不可约多项式. 设 $f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ 在 k^2 中无解, 则 $k[x,y]/(f)$ 为 Dedekind 整环.

证明 设 $B = k[x,y]/(f)$. 由条件知 B 为 Noether 整环. 设 m 为 B 的极大理想, 由 Hilbert 零点定理, 存在 $a,b \in k$, 使得 $m = (x-a, y-b)$, 并且 $f(a,b) = 0$. 由于 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ 不能同时为 0, 不妨设 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. 这样 $m/(x-a) = \overline{(y-b)}$ 为 $B/(x-a) = k[x,y]/(x-a,f) = k[y]/(f(a,y))$ 的一个极大理想. 由 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ 知 b 为 $f(a,y)$ 的单根, 从而由中国剩余定理不难看到 $k[y]/(f(a,y))$ 在 $(y-b)$ 处的局部化为 k, 即 $B/(x-a)$ 在 $m/(x-a)$ 处的局部化为 k. 由局部化和作商的交换性, 得到 $B_m/(x-a) = k$ 为域. 从而 $mB_m = (x-a)$ 为主理想. 这就证明了 B_m 为 DVR. 由 m 的任意性知 B 为 Dedekind 整环. □

4.3 Dedekind 整环的有限扩张

定义 4.3.1 设 $(A,m), (B,n)$ 为局部环. 如果环同态 $A \longrightarrow B$ 满足 $n \cap A = m$, 则称其为**局部同态**, 记为 $(A,m) \longrightarrow (B,n)$.

设 $(A,m) \longrightarrow (B,n)$ 为离散赋值环之间的局部同态, 并且 $mB \neq 0$, 则存在 $e \geq 1$, 使得 $mB = n^e$. 我们称 e 为 B/A 的**分歧指数**. 如果 $k(n) = B/n$ 为 $k(m) = A/m$ 的有限扩张, 则称域扩张次数 $f = [k(n) : k(m)]$ 为 B/A 的**剩余类域次数**.

设 $A \hookrightarrow B$ 是 Dedekind 整环之间的单扩张, P, Q 分别为 A, B 的非零素理想, 并且 $P = Q \cap A$. DVR 扩张 $A_P \hookrightarrow B_Q$ 的分歧指数和剩余类域次数分别称为 P 在 Q 处的分歧指数和剩余类域次数. 如果分歧指数为 1, 则称 P 在 Q 处**不分歧**.

定理 4.3.1 设 A 为 Dedekind 整环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 $K \hookrightarrow L$ 为域的有限扩张. 令 $B \coloneqq \{x \in L \mid x \text{ 在} A \text{ 上整}\}$ 为 A 在 L 中的整闭包. 设 B 为有限 A-模, P 为 A 的非零素理想, 则有:

(i) B 为 Dedekind 整环.

(ii) B 中满足 $Q \cap A = P$ 的素理想 Q 均为非零素理想, 并且只有有限个, 记为 $Q_1, \ldots, Q_t$.

(iii) P 在每个 Q_i 处的剩余类域次数 f_i 是有限的.

(iv) $[L:K]=\sum_{i=1}^{t} e_i f_i$. 其中 e_i, f_i 分别为 P 在 Q_i 处的分歧指数和剩余类域次数.

(v) 理想的等式 $PB=Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}$ 在 B 中成立.

(vi) 如果 L/K 为 Galois 扩张, 则 $G:=\mathrm{Gal}(L/K)$ 传递作用在 $Q_1,\dots,Q_t$ 上, 并且有 $e_1=\cdots=e_t$, $f_1=\cdots=f_t$, 以及 $t=[G:G_{Q_1}]$. 其中 $G_{Q_1}:=\{g\in G\mid gQ_1=Q_1\}$ 为 Q_1 的稳定子群.

证明 (i): 由 B 的定义知 B 为整闭整环. 由 B 为有限 A-模知 B 为 Noether 环. 由定理 4.2.1 只需再证明 B 为一维环. 设 $P_1\subset P_2$ 为 B 的两个素理想. 令 $P_0=(0)$. 则

$$(0)=P_0\cap A\subset P_1\cap A\subset P_2\cap A$$

为 A 的三个素理想. 而 A 为一维环, 故 $P_0\cap A, P_1\cap A, P_2\cap A$ 中至少有两个相等. 再由整扩张的纤维中的素理想没有包含关系 (命题 3.6.5) 知 P_0,P_1,P_2 中至少有两个相等. 由此得到 B 为一维环.

(ii): 设素理想 Q 满足 $Q\cap A=P$. 由 $P\neq(0)$ 知 $Q\neq(0)$. 通过在 P 处作局部化, $A_P\hookrightarrow B_P$ 为单的整扩张, 故 B_P/PB_P 为零维 Noether 环. 从而其素理想均为极小素理想, 故只有有限个, 这些素理想一一对应到 B 中满足 $Q\cap A=P$ 的素理想 Q.

(iii) 和 (iv): 通过将 A,B 分别替换为 A_P,B_P, 我们不妨设 A 为 DVR, $P=m=(\pi)$ 为 A 的唯一极大理想. 则 $A\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 由 $Q_i\cap A=m$ 知 $A/m\hookrightarrow B/Q_i$ 为单的有限扩张. 从而 $[k(Q_i):k(m)]=f_i$ 为有限数.

由于 B 为有限 A-模, 而 A 为 DVR, 根据主理想整环上有限模的结构定理, 可知 B 为秩有限的自由 A-模, 记 $n=\mathrm{rank}_A(B)$. 由 $A\hookrightarrow B$ 为单的有限扩张知 $K=A\otimes_A K\hookrightarrow B\otimes_A K$ 也为单的有限扩张, 从而 $B\otimes_A K$ 为域. 而作为 B 的局部化, 我们有自然的单同态 $B\subset B\otimes_A K\subset L=\mathrm{Frac}(B)$, 从而得到 $B\otimes_A K=L$, 故 $[L:K]=n$.

另一方面, 记 $k=A/m$, 则由 B 为秩 n 的自由 A-模知 $B/mB=B\otimes_A k$ 为 n 维 k-线性空间, 即 $\dim_k B/mB=n$. 注意到 B/mB 为零维 Noether 环, 并且 $\mathrm{Spec}(B/mB)=\{Q_1,\dots,Q_t\}$, 由命题 1.4.7 得到环同构

$$B/mB\simeq B_{Q_1}/mB_{Q_1}\times\cdots\times B_{Q_t}/mB_{Q_t}. \tag{4.3–1}$$

在离散赋值环 B_{Q_i} 中, 设 $Q_iB_{Q_i}=(\pi_i)$, 则 $mB_{Q_i}=(\pi_i)^{e_i}$. 从而 $B_{Q_i}/mB_{Q_i}=B_{Q_i}/(\pi_i)^{e_i}$. 由此得到

$$\begin{aligned}\dim_k\left(\frac{B_{Q_i}}{mB_{Q_i}}\right)&=\ell_A\left(\frac{B_{Q_i}}{mB_{Q_i}}\right)=\sum_{j=1}^{e_i}\ell_A\left(\frac{(\pi_i)^{j-1}}{(\pi_i)^j}\right)=\sum_{j=1}^{e_i}\ell_A\left(\frac{B_{Q_i}}{(\pi_i)}\right)\\&=\sum_{j=1}^{e_i}\dim_k k(Q_i)=e_if_i.\end{aligned}$$

分别计算 (4.3–1) 两边作为 k-线性空间的维数即得 $n = \sum_{i=1}^{t} e_i f_i$.

(v): 任取 B 的非零素理想 Q, 我们比较 P 和 $Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}$ 在 B_Q 中生成的理想, 只需证明 $PB_Q = Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}B_Q$.

如果 $Q \cap A \neq P$, 则 $PB_Q = B_Q$, 而且 $Q \neq Q_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq t$. 故对每个 i 有 $Q_i B_Q = B_Q$. 这样得到 $PB_Q = Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}B_Q = B_Q$.

如果 $Q \cap A = P$, 则存在某个 i 使得 $Q = Q_i$. 由 e_i 的定义得到 $PB_Q = Q_i^{e_i}B_Q$. 对 $j \neq i$, 由于 Q_i 和 Q_j 为不同的极大理想, 不难看到 $Q_j^{e_j}B_Q = B_Q$. 由此也得到 $PB_Q = Q_1^{e_1}Q_2^{e_2}\dots Q_t^{e_t}B_Q$.

(vi): 由命题 3.7.1 和命题 3.7.7 可知 G 在 $Q_1, \dots, Q_t$ 上的作用是传递的. 由此得到 $t = [G : G_{Q_1}]$. 同时对任意 i, 设 $gQ_1 = Q_i$, 则 $b \longmapsto g \cdot b$ 给出了 A_P-代数同构 $B_{Q_1} \xrightarrow{\sim} B_{Q_i}$. 从而 $e_1 = e_i$, $f_1 = f_i$. □

下面考察在哪些情况下, 上述定理中 "B 为有限 A-模" 这个条件成立.

命题 4.3.1 *设 A 为整闭整环, 且为 Noether 环, $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 $K \hookrightarrow L$ 为域的有限扩张. 令 B 为 A 在 L 中的整闭包. 设下列两个条件中至少一个成立, 则 B 为有限 A-模.*

(i) *L/K 为有限可分扩张.*
(ii) *A 为一个域 k 上的有限生成代数.*

证明 (i): 想法是将 B 放入一个更大的有限 A-模中, 则利用 Noether 模的子模还是 Noether 模可得 B 为有限 A-模. 为此, 设 $e_1, \dots, e_n$ 为 L 的一组 K-基. 通过乘以 A 中的元, 可设 $e_i \in B$, $\forall\ i = 1, \dots, n$. 由 L/K 为有限可分扩张, 知如下 K-双线性映射

$$\begin{aligned} \varphi\colon L \times L &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy) \end{aligned}$$

为非退化的 ([30, Lemma 0BIL]). 由 A 整闭知 $\mathrm{Tr}_{L/K}(B) \subset A$, 从而 $\varphi(e_i, b) \in A$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\forall\ b \in B$. 设 $b = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in B$, $x_i \in K$, 则

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in A^n,$$

其中 $M=(\varphi(e_i,e_j))$ 为 A 上的 n 阶方阵. 由此知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M^{-1}\cdot A^n = (\det M)^{-1}M^*\cdot A^n.$$

其中 M^* 为 M 的伴随方阵. 这样得到 B 包含在如下有限 A-模中:

$$(\det M)^{-1}(e_1,\dots,e_n)\cdot M^*\cdot A^n.$$

再由 A 为 Noether 环知 B 为有限 A-模.

(ii): 当 $\mathrm{char}.K=0$ 时, L/K 为有限可分扩张, 从而由 (i) 即知 B 为有限 A-模. 下面设 $\mathrm{char}.K=p>0$. 由 Noether 正规化定理, 我们取 A 的 k-子代数 $k[t_1,\dots,t_n]$, 使得 $t_1,\dots,t_n$ 在 k 上代数无关, 并且 $k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow A$ 为有限扩张. 这样得到域的有限扩张 $k(t_1,\dots,t_n)\subset K\subset L$, 并且 B 为 $k[t_1,\dots,t_n]$ 在 L 中的整闭包. 只需证明 $k[t_1,\dots,t_n]\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 故下面不妨设 $A=k[t_1,\dots,t_n]$ 为 k 上的 n 元多项式环. 此时 $K=k(t_1,\dots,t_n)$.

通过将 L 替换为 L/K 的正规闭包, 我们还可以假设 L/K 为有限正规扩张. 从而域扩张 L/K 可以分解为 $K\subset L_{insep}\subset L$, 使得 L_{insep}/K 为有限纯不可分扩张, L/L_{insep} 为有限可分扩张 ([30, Lemma 030M]). 设 B_i 为 A 在 L_{insep} 中的整闭包, 则只需证 $A\hookrightarrow B_i$ 和 $B_i\hookrightarrow B$ 均为有限扩张. 如果 $A\hookrightarrow B_i$ 为有限扩张, 则 B_i 为 Noether 环, 注意到 B 为 B_i 在 L 中的整闭包, L/L_{insep} 为有限可分扩张, 由 (i) 可知 $B_i\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 故最终只需证明 $A\hookrightarrow B_i$ 为有限扩张. 通过将 L 替换为 L_{insep}, 不妨假设 L/K 为有限纯不可分扩张.

设 $L=K(b_1,\dots,b_m)$, $b_i\in B$, $\forall\ 1\le i\le m$. 由 L/K 为纯不可分的有限扩张, 存在 p 的一个正整数幂次 q, 使得 $b_i^q\in K$, $\forall\ 1\le i\le m$. 又由于 b_i^q 在 A 上整, 并且 A 为整闭的, 故每个 b_i^q 均在 $A=k[t_1,\dots,t_n]$ 中. 这样可以找到有限个 k 中的元素 $c_1,\dots,c_r$, 使得每个 b_i 均在 $k'(t_1^{\frac{1}{q}},\dots,t_n^{\frac{1}{q}})$ 中, 其中 $k'=k(c_1^{\frac{1}{q}},\dots,c_r^{\frac{1}{q}})$ 为 k 的有限扩域. 由此得到 $L\subset k'(t_1^{\frac{1}{q}},\dots,t_n^{\frac{1}{q}})$, 从而 B 包含在 A 在 $k'(t_1^{\frac{1}{q}},\dots,t_n^{\frac{1}{q}})$ 的整闭包 B' 中. 不难看到 $B'=k'[t_1^{\frac{1}{q}},\dots,t_n^{\frac{1}{q}}]$. 这是因为 $k'[t_1^{\frac{1}{q}},\dots,t_n^{\frac{1}{q}}]$ 在 A 上整, 同时 $k'[t_1^{\frac{1}{q}},\dots,t_n^{\frac{1}{q}}]$ 同构于 k' 上的 n 元多项式环, 从而为整闭整环. 由于 $A\hookrightarrow B'$ 显然为有限有限扩张, 从而由 Noether 性知 B 为有限 A-模. □

注记 4.3.1 一般地, 当 A 为 Dederkind 整环时, 只要 L/K 为有限扩张, 就能得到 B 为 Dedekind 整环 (但不一定是有限 A-模). 这是 Krull-Akizuki 定理的一个推论, 其表述和证明见 [26, Theorem 11.7].

一个**代数数域** K 是指有理数域 $\mathbb{Q}$ 的一个有限扩域. 代数数域 K 的**代数整数环**是

指 $\mathbb{Z}$ 在 K 中的代数闭包, 一般记为 $\mathcal{O}_K$. 由命题 4.3.1, $\mathcal{O}_K$ 为 Dedekind 整环. 例如当 $K=\mathbb{Q}(\zeta_N)$ 为分圆域时, 命题 4.2.1 说明 $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\zeta_N]$.

命题 4.3.2 设 $K/\mathbb{Q}$ 为有限 Galois 扩张, p 为素数, $Q\in\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 满足 $Q\cap\mathbb{Z}=(p)$. 设 (p) 在 Q 处不分歧, 则:

(i) 存在唯一的 $F_Q\in\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 满足 $F_Q(Q)=Q$, 并且 $F_Q(x)\equiv x^p \mod Q$, $\forall\, x\in\mathcal{O}_K$.

(ii) 对任意满足 $Q'\cap\mathbb{Z}=(p)$ 的 $\mathcal{O}_K$ 的素理想 Q', 均有 (p) 在 Q' 处不分歧, 并且 $F_{Q'}$ 和 F_Q 在 $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 中共轭.

证明 设 $Q=Q_1,Q_2,\dots,Q_t$ 为所有满足 $Q_i\cap\mathbb{Z}=(p)$ 的 $\mathcal{O}_K$ 的素理想. 由定理 4.3.1, (iv), (vi) 可知 (p) 在每个 Q_i 处都是不分歧的, 并且有等式 $[K:\mathbb{Q}]=t\cdot[k(Q):\mathbb{F}_p]$. 由于 G 在 $Q=Q_1,Q_2,\dots,Q_t$ 上的作用是传递的, 可知 $G=t\cdot|G_Q|$. 从而得到 $|G_Q|=[k(Q):\mathbb{F}_p]$. 这里 $G_Q\coloneqq\{g\in G\mid gQ=Q\}$ 是 Q 的稳定子群.

另一方面, 利用命题 3.7.4 可知群同态 $G_Q\xrightarrow{\varphi}\operatorname{Gal}(k(Q)/\mathbb{F}_p)$, $g\longmapsto\bar{g}$ 为满同态, 从而为同构. 注意到 $k(Q)$ 的 Frobenius 自同构 $Fr\colon x\longmapsto x^p$ 在 $\operatorname{Gal}(k(Q)/\mathbb{F}_p)$ 中 (并且为生成元), 可知存在唯一的 $F_Q\in G_Q$ 满足 $\varphi(F_Q)=Fr$. 这就证明了 (i).

对任意满足 $Q'\cap\mathbb{Z}=(p)$ 的 $\mathcal{O}_K$ 的素理想 Q', 我们已经说明了 (p) 在 Q' 处不分歧. 设 $g\in\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 满足 $gQ=Q'$, 则不难看到 $F_{Q'}=gF_Qg^{-1}$. 故 $F_{Q'}$ 与 F_Q 共轭. 从而 (ii) 得证. □

上述命题中的 $F_Q\in\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 称为 Q 处的 **Frobenius 元**, 其共轭类只依赖于素数 p. 下面利用 Frobenius 元确定分圆扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}$ 的 Galois 群.

命题 4.3.3 设 $N\geq1$, 记 $\zeta_N\coloneqq e^{\frac{2\pi i}{N}}\in\mathbb{C}^*$ 为 N 次本原单位根. 则有如下群同构:

$$\begin{aligned}\varphi\colon G\coloneqq\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})&\xrightarrow{\sim}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*\\ \sigma&\longmapsto m\end{aligned}$$

其中 m 由 $\sigma(\zeta_N)=\zeta_N^m$ 确定.

证明 对任意 $\sigma\in G$, 由于 $\sigma(\zeta_N)$ 仍为本原的 N 次单位根, 故存在唯一的 $m\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, 使得 $\sigma(\zeta_N)=\zeta_N^m$. 这说明同态 φ 是良好定义的. 由于 σ 显然由 $\sigma(\zeta_N)$ 所确定, 故 φ 是单同态. 下面只需证明其为满同态.

任取满足 $p\nmid N$ 的素数 p, 任取 $Q\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 满足 $Q\cap\mathbb{Z}=(p)$. 命题 4.2.1 的证明过程中已经说明了 (p) 在 Q 处不分歧. 从而得到 Frobenius 元素 $F_Q\in G$, 满足 $F_Q(\zeta_N)\equiv\zeta_N^p \mod Q$. 另一方面, 由于 $F_Q(\zeta_N)$ 也是 N 次单位根, 可知存在 $m\geq0$, 使得 $F_Q(\zeta_N)=\zeta_N^m$, 则 $\zeta_N^m\equiv\zeta_N^p \mod Q$. 由此得到 $\zeta_N^{m-p}-1\in Q$. 假设 $m\neq p\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, 则存在正整数 $i\geq2$ 且 $i\mid N$, 使得 ζ_N^{m-p} 为本原 i 次单位根. 记 $x\coloneqq\zeta_N^{m-p}$, $y\coloneqq\zeta_N^{m-p}-1=x-1$. 则 x 满足方程 $\frac{x^i-1}{x-1}=0$, 从而 $\frac{(y+1)^i-1}{y}=0$. 展开

即知在 B 中有 $i \in (y) \subset Q$, 故 $i \in Q \cap \mathbb{Z} = (p)$. 这与 $p \nmid N$ 矛盾! 由此得到在 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 中有 $m = p$, 从而 $F_Q(\zeta_N) = \zeta_N^p$, 即 $\varphi(F_Q) = p$. 不难看到 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ 可以由所有与 N 互素的素数 p 生成, 故 $\mathrm{Im}(\varphi) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, 即 φ 为满同态. □

4.4 Dedekind 整环的理想类群

在本节中, 如不特别说明, A 均为一个 Dedekind 整环, K 为 A 的分式域, $\mathrm{Spec}_m A$ 表示 A 的所有非零素理想 (极大理想) 形成的集合. 我们分别定义 A 上的 Picard 群, 理想类群和除子类群, 并说明这三个群是同构的. 这个群反映了 A 的一些整体信息.

定义 4.4.1 称 A-模 M 为**可逆模**, 如果 M 为有限 A-模, 并且对 A 的每个非零素理想 P, 均有 M_P 为秩 1 的自由 A_P-模.

我们首先说明在上述定义中, 可以将点 P 替换为它的一个开邻域, 即下面的命题.

命题 4.4.1 设 M 为可逆 A-模, 则对任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 均存在 $f \in A$, 使得 $P \in D(f)$, 并且 M_f 作为 A_f-模同构于 A_f.

证明 不难看到, M 在零理想处的局部化同构于 K. 对任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 由于 $M_P \simeq A_P$, 可知存在 $x \in M$, 使得 $M_P = A_P \dfrac{x}{1}$. 考虑 A-模同态

$$\begin{aligned} \varphi\colon A &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto ax \end{aligned}$$

则 φ 在 P 处的局部化 $\varphi_P\colon A_P \longrightarrow M_P$ 为同构. 从而 $(\mathrm{Ker}\,\varphi)_P = 0$, $(\mathrm{Coker}\,\varphi)_P = 0$. 由于 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 和 $\mathrm{Coker}\,\varphi$ 均为有限 A-模, 可以找到 $f \in A$, 使得 $f \notin P$, 并且 $(\mathrm{Ker}\,\varphi)_f = 0$, $(\mathrm{Coker}\,\varphi)_f = 0$. 这样得到 $\varphi_f\colon A_f \longrightarrow M_f$ 为 A_f-模同构. □

对于可逆 A-模 M, 下面的命题说明张量积函子 $M \otimes \cdot$ 是正合函子.

命题 4.4.2 设 M 为可逆 A-模, 设 $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$ 为 A-模的单同态, 则

$$\begin{aligned} 1 \otimes \varphi\colon M \otimes_A M_1 &\longrightarrow M \otimes_A M_2 \\ x \otimes x_1 &\longmapsto x \otimes \varphi(x_1) \end{aligned}$$

也为单同态.

证明 对任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$,

$$M \otimes_A M_i \otimes_A A_P \simeq M_i \otimes_A (M \otimes_A A_P) \simeq M_i \otimes_A A_P,$$

由 φ 为单同态知 $M_1 \otimes_A A_P \longrightarrow M_2 \otimes_A A_P$ 为单同态. 故 $1 \otimes \varphi$ 在每个素理想 P 处的局部化均为单同态, 由此知 $1 \otimes \varphi$ 为单同态. □

对于可逆 A-模 M, 我们将 M 作为 A-模的同构类记作 $[M]$. 记 $\mathrm{Pic}(A)$ 为所有可逆 A-模的同构类形成的集合. 容易看到, 若 M, N 均为可逆模, 则 $M \otimes_A N$ 也为可逆模, 并且 $[M] \cdot [N] \coloneqq [M \otimes_A N]$ 是良好定义的 $\mathrm{Pic}(A)$ 上的二元运算.

命题 4.4.3 $\mathrm{Pic}(A)$ 在上述运算 $[M] \cdot [N]$ 下是一个 Abel 群. 其单位元为 $[A]$, 并且 $[M] \in \mathrm{Pic}(A)$ 的逆元为 $[\mathrm{Hom}_A(M, A)]$

证明 由张量积的性质, 该运算显然具有结合性和交换性, 并且 $[A]$ 为单位元. 下面验证对于可逆 A-模 M, 有 $M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, A) \simeq A$. 首先有 A-模同态

$$\begin{aligned} M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, A) &\xrightarrow{\varphi} A \\ x \otimes f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

由 M 为可逆模可知对 A 的每个素理想 P, 均有 $M_P \simeq A_P$, 以及

$$\mathrm{Hom}_A(M, A)_P \simeq \mathrm{Hom}_{A_P}(M_P, A_P) \simeq A_P.$$

这样得到 φ 在 P 处的局部化 $M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A A_P \xrightarrow{\varphi_P} A_P$ 为同构. 由 P 的任意性知 φ 为同构. □

$\mathrm{Pic}(A)$ 称为 A 的 **Picard 群**. 对于可逆 A-模 M, 由命题 4.4.2 知自然同态 $M \longrightarrow M \otimes_A K$, $x \mapsto x \otimes 1$ 为单的 A-模同态. 又由于任取素理想 P, 有

$$M \otimes_A K \simeq M \otimes_A A_P \otimes_{A_P} K \simeq M_P \otimes_{A_P} K \simeq A_P \otimes_{A_P} K \simeq K,$$

因此 M 同构于 K 的一个 A-子模. 一般地, 我们称 K 的一个非零有限 A-子模为 A 的一个**分式理想**. 上面的分析说明可逆 A-模均同构于 A 的分式理想. 反过来, 我们有下面的命题.

命题 4.4.4 A 的分式理想均为可逆 A-模.

证明 设 $M \subset K$ 为 A 的一个分式理想. 设 $e_1, \ldots, e_n$ 为 M 的生成元. 对任意 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 令 π 为极大理想 PA_P 的生成元. 则 $e_i = u_i \pi^{a_i}$, 其中 $u_i \in A_P^*$, $a_i \in \mathbb{Z}$. 不妨设 $a_1 = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$. 则易验证 $M_P = A_P e_1$ 为秩 1 的自由 A_P-模. □

为了完全用分式理想刻画 $\mathrm{Pic}(A)$, 我们还需要讨论两个分式理想作为 A-模何时是同构的.

命题 4.4.5 设 I, J 均为 A 的分式理想, 则 I 与 J 作为 A-模同构 $\iff$ 存在 $0 \neq f \in K^*$, 使得 $J = fI$.

证明 $\Longleftarrow$ 是显然的. 故只需证 $\Longrightarrow$. 设 $\varphi\colon I \xrightarrow{\sim} J$ 为 A-模同构. 取 $0 \neq x_0 \in I$, 令 $f = \dfrac{\varphi(x_0)}{x_0} \in K$. 则 $f \neq 0$. 对任意 $x \in I$, 由于 $\dfrac{x}{x_0} \in K$, 可找到 $a, b \in A$, $b \neq 0$, 使得 $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{a}{b}$, 从而 $ax_0 - bx = 0$. 故 $a\varphi(x_0) - b\varphi(x) = 0$. 这说明

$$\varphi(x) = \frac{a\varphi(x_0)}{b} = \frac{\varphi(x_0)}{x_0} x = fx.$$

从而 $J = \varphi(I) = fI$. □

为了对应可逆模的张量积运算, 我们需要在分式理想上引入乘法运算. 设 I, J 为 A 的分式理想, 定义 IJ 为集合 $\{xy \mid x \in I, y \in J\}$ 生成的 K 的 A-子模. 显然 IJ 也是一个分式理想, 称为 I 和 J 的乘积. 当 I, J 均为 A 的非零理想时, 其作为分式理想的乘积与作为理想的乘积相同.

命题 4.4.6 设 I, J 均为 A 的分式理想, 则在 $\mathrm{Pic}(A)$ 中有 $[I] \cdot [J] = [IJ]$.

证明 由命题 4.4.2, 我们有如下一系列单的 A-模同态:

$$I \otimes_A J \hookrightarrow K \otimes_A J \hookrightarrow K \otimes_A K \xrightarrow{\sim} K.$$

并且 $I \otimes_A J$ 在 K 中的像为 IJ. 由此得到 A-模同构 $I \otimes_A J \simeq IJ$. □

在 A 的所有分式理想形成的集合上, 引入等价关系 $\sim$ 为: $I \sim J \iff$ 存在 $0 \neq f \in K^*$, 使得 $I = fJ$. 令等价类集合为 $\mathrm{Cl}(A)$. 分式理想的乘积给出了 $\mathrm{Cl}(A)$ 上的一个二元运算. 前面的讨论可以总结为如下命题.

命题 4.4.7 $\mathrm{Cl}(A)$ 在分式理想的乘积下形成一个 Abel 群, 并且有群同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(A) \\ I &\longmapsto [I] \end{aligned}$$

证明 由命题 4.4.5 以及可逆模均同构于分式理想可知映射 $\mathrm{Cl}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(A)$, $I \longmapsto [I]$ 是良好定义的双射. 再由命题 4.4.6 可知该映射保持两边的乘法运算, 从而由 $\mathrm{Pic}(A)$ 为群知 $\mathrm{Cl}(A)$ 为群, 并且上述双射为群同构. □

我们称 $\mathrm{Cl}(A)$ 为 A 的**理想类群**. 作为 $\mathrm{Cl}(A)$ 是一个群的推论, 分式理想在乘积运算下均有逆元. 下面给出逆元的具体形式.

推论 4.4.1 对分式理想 I, 令 $I^{-1} \coloneqq \{x \in K \mid xI \subset A\}$, 则 I^{-1} 为分式理想, 并且 $II^{-1} = A$.

证明 由 $\mathrm{Cl}(A)$ 为群知存在分式理想 J', 存在 $f \in K^*$, 使得 $IJ' = fA$. 令 $J = f^{-1}J'$, 则 $IJ = A$. 显然 $J \subset I^{-1}$. 反之, 任给 $x \in I^{-1}$, 有 $x \in xA = xIJ \subset AJ = J$, 故

$I^{-1} \subset J$. 这样得到 $I^{-1} = J$ 为分式理想, 并且 $II^{-1} = A$. □

分式理想的乘积显然具有结合性和交换性, 而推论 4.4.1 又说明逆元存在, 因此 A 的所有分式理想在乘积运算下形成一个 Abel 群, 将其记为 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$. 形如 $fA(f \in K^*)$ 的分式理想称为主分式理想, 所有主分式理想形成 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$ 的子群. 根据上面的分析, $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$ 商掉主分式理想形成的子群得到的商群即为 $\mathrm{Cl}(A)$.

A 的除子群 $\mathrm{Div}(A)$ 定义为以 A 的所有非零素理想 $\mathrm{Spec}_m A$ 作为基生成的自由 Abel 群 ($\mathbb{Z}$-模). 除子群 $\mathrm{Div}(A)$ 中的一个元素 D 称为一个**除子**, 其为有限个非零素理想的形式和: $D = \sum_{i=1}^{t} n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in \mathrm{Spec}_m A$. 对一个分式理想 $I \subset K$, 在非零素理想 P 处作局部化得到 $I_P \subset K \otimes_A A_P = K$, 从而 I_P 可以自然地看作 K 的 A_P-子模.

命题 4.4.8 设 I 为 A 的分式理想, 则只有有限个非零素理想 P 使得 $I_P \neq A_P$, 或者等价地, 对几乎所有非零素理想 P, 均有 $I_P = A_P$. 这里均通过自然的单同态将 I_P 和 A_P 看作 K 的 A_P-子模.

证明 设 $f_1, \ldots, f_n \in K^*$ 为 I 作为 A-模的生成元. 设 $f_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i \in A \setminus \{0\}$. 由 A 为一维 Noether 环知集合

$$S \coloneqq \{P \mid P \in \mathrm{Spec}_m A, \text{ 并且存在} 1 \leq i \leq n, \text{ 使得} a_i \in P \text{ 或者} b_i \in P\}$$

为有限集. 若 P 为不在 S 中的非零素理想, 则 $I_P = A$. 从而命题得证. □

对分式理想 I, 对 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 设 π_P 为主理想 PA_P 的生成元, 则存在整数 $v_P(I)$, 使得作为 K 的子模有 $I_P = \pi_P^{v_P(I)} A_P$. 容易看到 $v_P(I)$ 不依赖于生成元 π_P 的选取, 其称为 I 在点 P 处的阶. 由命题 4.4.8, 只有有限个 P 使得 $v_P(I) \neq 0$, 从而

$$\mathrm{div}(I) \coloneqq \sum_{P \in \mathrm{Spec}_m A} v_P(I) P \in \mathrm{Div}(A)$$

是良好定义的除子. 特别地, 设 $f \in K^*$, 则主分式理想 fA 对应的除子 $\mathrm{div}(f) \coloneqq \mathrm{div}(fA)$ 称为一个主除子. $v_P(f) \coloneqq v_P(fA)$ 称为 f 在点 P 处的阶. 直观上看, $v_P(f)$ 代表有理函数 f 在 P 处的零点或极点的重数 (按 $v_P(f)$ 正负区分零点极点). A 的所有主除子形成 $\mathrm{Div}(A)$ 的子群, 记为 $\mathrm{Div}_p(A)$. 对应的商群 $\mathrm{Cl}'(A) \coloneqq \mathrm{Div}(A)/\mathrm{Div}_p(A)$ 称为 A 的**除子类群**.

命题 4.4.9 对应 $I \mapsto \mathrm{div}(I)$ 给出了群同构 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}(A)$, 并且在这个同构下主分式理想形成的子群对应到主除子形成的子群 $\mathrm{Div}_p(A)$. 特别地, 我们有群同构 $\mathrm{Cl}(A) \simeq \mathrm{Cl}'(A)$.

证明 对分式理想 I, J, 如果 $\mathrm{div}(I) = \mathrm{div}(J)$, 则 $I_P = J_P$, $\forall\, P \in \mathrm{Spec}\, A$, 从而 $I = J$. 这就证明了同态 $I \mapsto \mathrm{div}(I)$ 为单的. 对任意 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 显然 $\mathrm{div}(P) = P \in \mathrm{Div}(A)$. 由于 $\mathrm{Div}(A)$ 由 $\mathrm{Spec}_m A$ 生成, 故 $I \mapsto \mathrm{div}(I)$ 为满的. 这就得到了群同构

$\widetilde{\mathrm{Cl}(A)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}(A)$. 由定义, 这个同构将主分式理想对应到主除子, 从而诱导了商群的同构 $\mathrm{Cl}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cl}'(A)$. □

作为分式理想群和除子群同构的推论, 我们得到分式理想的素因子分解.

推论 4.4.2 设 I 为 A 的分式理想, 则有:

(i) 存在分解 $I = P_1^{a_1} \dots P_n^{a_n}$. 其中 $P_1, \dots, P_n$ 为互不相同的非零素理想, $a_1, \dots, a_n$ 均为非零整数.

(ii) 上述分解在不计各 $P_i^{a_i}$ 顺序的前提下是唯一的.

(iii) I 为 A 的理想 $\iff \forall\, i = 1, \dots, n,\ a_i > 0$.

特别地, 我们得到 A 的非零理想均可写为有限个素理想的乘积, 而且这种分解在不计素理想因子顺序的前提下是唯一的.

证明 这是命题 4.4.9 给出的群同构以及对 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, $\mathrm{div}(P) = P$ 的直接推论. □

$\mathrm{Cl}(A)$ 刻画了 A 相对于主理想整环的偏离程度. 具体而言, 有下面的命题.

命题 4.4.10 设 $\mathrm{Cl}(A) = 0$ 为平凡 Abel 群 $\iff$ A 为主理想整环.

证明 由理想类群 $\mathrm{Cl}(A)$ 的定义即得. □

总结上面的讨论, 我们得到了 Picard 群 $\mathrm{Pic}(A)$, 理想类群 $\mathrm{Cl}(A)$ 和除子类群 $\mathrm{Cl}'(A)$ 是互相同构的. 前面已经说明了可逆模和分式理想对应的具体形式, 下面描述除子和它们之间的对应. 其中涉及到的验证都是直接的, 读者可以自行补充. 设 $D = \sum_{i=1}^{t} n_i P_i \in \mathrm{Div}(A)$ 为除子. 通过 $\mathrm{Div}(A)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Cl}(A)}$ 的同构, 令 I 为与 D 对应的分式理想, 则 $\mathrm{div}(I) = D$. 由 $\mathrm{div}(I)$ 的定义即可验证 $I = \{f \in K^* \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \bigcup \{0\}$ 为 K 的子集. 这里 $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$ 是指除子 $\mathrm{div}(f) + D$ 作为形式和的每个系数均为非负整数.

另一方面, 给一个可逆 A-模 M, 对 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 由于 $M_P \simeq A_P$ 为秩 1 的自由 A_P-模, 我们可取 $e_P \in M_P$ 为 M_P 的生成元, 即 $M_P = A_P e_P$. 这样的元素 e_P 称为 M 在点 P 处的局部标架. 任何两个 P 处的局部标架相差一个 A_P^* 中的元. 我们称 $M \otimes_A K$ 中的一个元 s 为 M 的一个亚纯截面. 现在取定一个非零的亚纯截面 s, 再对每个 $P \in \mathrm{Spec}_m A$, 取定一个 P 处的局部标架 e_P, 取定 PA_P 的生成元 π_P. 由 $M \otimes_A K \simeq M_P \otimes_{A_P} K$, 将 $e_P \in M_P$ 等同 $e_P \otimes 1 \in M_P \otimes_{A_P} K$, 再等同到 $M \otimes_A K$ 中的元, 可知 $M \otimes_A K = K e_P$. 这样得到 $s = f_P\, e_P$, 其中 $f_P \in K^*$. 易知只有有限个 P 使得 $v_P(f_P) \neq 0$. 从而 $\mathrm{div}(s) \coloneqq \sum_{P \in \mathrm{Spec}_m A} v_P(f_P) P \in \mathrm{Div}(A)$ 是一个良好定义的除子, 其不依赖于 e_P 和 π_P 的选取. 若 s' 为另一个非零亚纯截面, 则存在 $0 \neq f \in K^*$, 使得 $s' = fs$, 并且 $\mathrm{div}(s') = \mathrm{div}(s) + \mathrm{div}(f)$. 这说明 $\mathrm{div}(s)$ 和 $\mathrm{div}(s')$ 相差一个主除子, 从而 $\mathrm{div}(s)$ 代表的 $\mathrm{Cl}'(A)$ 中的元不依赖于 s 的选取. 不难验证 $[M] \mapsto \mathrm{div}(s)$ 即为前面给出的群同构 $\mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cl}'(A)$.

对于代数数域 K, 其代数整数环 $\mathcal{O}_K$ 的理想类群 $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ 是有限 Abel 群. 这是代

数数论中的一个基本结论. 其证明可见代数数论的相关教材, 如 [28]. 关于代数整数环的理想类群, 还有很多猜想没有得到证明, 比如二次域的 Cohen–Lenstra heuristics ([8, §5.10]).

习题

1. 设 A 为 Dedekind 整环. 证明:

(i) 对 $0 \neq a \in A$, 有 $A/aA = A_1 \times \cdots \times A_n$, 并且每个 A_i 均为离散赋值环的商环.

(ii) 设 I 为 A 的非零理想, 则存在 $a, b \in I$, 使得 $I = (a, b)$.

2. 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ 和 $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ 均为 Dedekind 整环, 并写出 (2) 和 (3) 上方的各个素理想处的分歧指数和剩余类域次数.

3. 设 $N \geq 1$, ζ_N 为 N 次本原单位根. 设 Q 为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的素理想, 满足 $Q \cap \mathbb{Z} = (p)$. 求 (p) 在 Q 处的分歧指数.

4. 设 A 为 DVR, 证明 $\widehat{A}$ 也为 DVR.

5. 设 $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ 为 Dedekind 整环之间单的有限扩张, 并且 (A, m) 为 DVR. 设 $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在点 m 处的纤维为 $\varphi^{*-1}(m) = \{Q_1, \ldots, Q_t\}$. 证明:

(i) $\widehat{A} \otimes_A B \simeq \prod_{i=1}^{t} B_i$, 其中 $B_i = \widehat{B_{Q_i}}$ 为离散赋值环 B_{Q_i} 的完备化.

(ii) 对 $1 \leq i \leq t$, 对于 DVR 之间的扩张 $A \longrightarrow B_{Q_i}$ 和 $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{B_{Q_i}}$, 它们的分歧指数 e_i 和剩余类次数 f_i 分别相等. 并且 $\widehat{B_{Q_i}}$ 为秩等于 $e_i f_i$ 的自由 $\widehat{A}$-模.

6. 设 $f\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ 为 $U := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上的复值函数. 设 f 还是有理函数, 即对任意 $x \in U$, 存在 $g, h \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, 使得 $h(x) \neq 0$, 并且对任意 $y \in D(h) := \{a \in U | h(a) \neq 0\}$, 均有 $f(y) = g(y)/h(y)$. 证明存在唯一的多项式 $F \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, 使得 $F|_U = f$.

注: 这是多复变函数论中 Hartogs 现象 ([9, Chapter I, (3.28)]) 的一个有理函数版本.

7. 设 A 为 Dedekind 整环, M 为有限 A-模. 证明如下几条互相等价:

(i) $M \otimes_A \operatorname{Frac}(A) = 0$.

(ii) $\operatorname{ann}(M) \neq 0$.

(iii) $\operatorname{Supp}(M)$ 为有限个闭点的并集.

(iv) 存在 A 的非零素理想 $P_1, \ldots, P_n$, 以及非负整数 $a_1, \ldots, a_n$, 使得有 A-模同构:

$$M \simeq A/P_1^{a_1} \times \cdots \times A/P_n^{a_n}.$$

8. 我们利用 Frobenius 元证明二次互反律. 设 $L/\mathbb{Q}$ 为有限 Galois 扩张, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \subset L$ 为 $\mathbb{Q}$ 的二次扩域, 其中 m 为非零整数. 设 $Q \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$, $Q \cap \mathbb{Z} = (p)$, p 为奇素数.

(i) 设 (p) 在 Q 处不分歧. 证明: $[k(Q) : \mathbb{F}_p] = 1 \iff$ Frobenius 元 $F_Q = 1$.

(ii) 设 (p) 在 Q 处不分歧. 证明: (p) 在 K 中完全分解 (即存在不同的 $\mathcal{O}_K$ 的素理想 Q_1, Q_2 使得 $p\mathcal{O}_K = Q_1 Q_2$) $\iff$ F_Q 在 K 上的限制为恒等同态.

(iii) 证明 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ 或 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{m}}{2}]$, 并由此证明 p 在 K 中完全分解 $\iff \left(\frac{m}{p}\right) = 1$. 其中 $\left(\frac{a}{b}\right)$ 为二次剩余符号.

以下设 $L = \mathbb{Q}(\zeta_q)$ 为分圆域, 其中 q 为不等于 p 的奇素数.

(iv) 设 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 且 $\sigma(\zeta_q) = \zeta_q^n$. 证明: σ 限制在 K 上为恒等同态 $\iff \left(\frac{n}{q}\right) = 1$.

以下承认事实 $\left(\sum_{i=1}^{q-1}\left(\frac{i}{q}\right)\zeta_q^i\right)^2 = \left(\frac{-1}{q}\right)q$, 并令 $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-1}{q}\right)q}\right)$.

(v) 证明 $\left(\frac{\left(\frac{-1}{q}\right)q}{p}\right) = 1$ 当且仅当 $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, 并利用 $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ 证明二次互反律:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}.$$

习题提示

1. (i): A/aA 为零维 Noether 环. (ii): $A_1 \times \cdots \times A_n$ 的每个理想均为主理想.

6. 设 $A = \mathbb{C}[x_1, x_2]$, 由 A 为整闭整环知 $A = \bigcap_{\mathrm{ht}\, P=1} A_P$.

第五章 维数理论

维数的观念及其基本性质 (如超曲面比所在空间小一维, 纤维维数加上底空间维数等于全空间维数等) 在直观上是自然和简单的. 但在代数上定义清楚并严格证明这些直观性质颇为不易. 本章先证明一些关于维数的基本定理, 然后将其应用到域上的有限维代数上, 给出一些直观性质的严格证明.

5.1 基本定理

回忆拓扑空间 X 的维数 $\dim X$ 为 X 的不可约闭子集降链长度的上确界. 环 A 的维数 $\dim A$ 定义为 $\operatorname{Spec} A$ 的维数. 在研究维数的性质时, 整扩张是一个重要的手段. 我们首先考察素理想链在整扩张下的变化.

定理 5.1.1 (上升定理) *设 $A \longrightarrow B$ 为环的整扩张, 设 $P_1 \subsetneq P_2$ 为 A 的两个素理想, 设 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ 且 $Q_1 \cap A = P_1$, 则存在 $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_2 \cap A = P_2$, 并且 $Q_1 \subsetneq Q_2$.*

证明 令 $\bar{A} = A/P_1$, $\bar{B} = B/Q_1$, 则 $\bar{A} \hookrightarrow \bar{B}$ 为单的整扩张. 在 P_2 处作局部化, 得到单的整扩张 $\bar{A}_{P_2} \hookrightarrow \bar{B}_{P_2}$. 故 $\bar{B}_{P_2}$ 不是零环. 任取 $\bar{B}_{P_2}$ 的极大理想 Q, 则由整扩张的性质, $\bar{A}_{P_2} \cap Q$ 为 $\bar{A}_{P_2}$ 的极大理想, 从而 $\bar{A}_{P_2} \cap Q = P_2 \bar{A}_{P_2}$. 令 $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ 为 Q 对应的素理想即可. □

命题 5.1.1 *设 $A \longrightarrow B$ 为单的整扩张, 则 $\dim A = \dim B$.*

证明 设 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ 为 A 的一个素理想链. 由命题 3.6.6, 存在 $Q_0 \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_0 \cap A = P_0$. 再由定理 5.1.1, 可以将 Q_0 扩展为 B 中的素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$, 使得 $Q_i \cap A = P_i$, $\forall\, 0 \leq i \leq n$. 这样得到 $\dim A \leq \dim B$.

反过来, 任给 B 的素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$, 令 $P_i = Q_i \cap A$, 则得到 A 的素理想链 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$. 对每个 $i = 0, \ldots, n-1$, 由 $Q_i \subsetneq Q_{i+1}$ 和命题 3.6.5 知 $P_i \subsetneq P_{i+1}$. 这样得到一个 A 中长度为 n 的素理想链. 从而 $\dim A \geq \dim B$. 结合已得到的关系 $\dim A \leq \dim B$ 即知 $\dim A = \dim B$. □

定理 5.1.2 (下降定理) *设 $A \hookrightarrow B$ 为整环的单同态, 并且为整扩张. 还设 A 为整闭整环. 设 $P_1 \subsetneq P_2$ 为 A 的素理想, $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ 并且 $Q_2 \cap A = P_2$. 则存在 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$ 满足 $Q_1 \cap A = P_1$, 以及 $Q_1 \subsetneq Q_2$.*

证明 令 $K = \operatorname{Frac}(A)$, $L = \operatorname{Frac}(B)$, 则 L/K 为代数扩张. 下面将问题逐步进行约化.

(1) 可设 B 为 A 在 L 中的整闭包. 理由为: 令 $\tilde{B}$ 为 A 在 L 中的整闭包, 则有整扩张 $A \subset B \subset \tilde{B}$. 由上升定理, 可取 $\tilde{Q}_2 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_2 \cap B = Q_2$. 如果对 $A \subset \tilde{B}$ 的情形已经证明了下降定理, 则可取 $\tilde{Q}_1 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_1 \subset \tilde{Q}_2$, 且 $\tilde{Q}_1 \cap A = P_1$. 这样取 $Q_1 = \tilde{Q}_1 \cap B$ 即可.

(2) 可设 L/K 为有限扩张. 理由为: 假设对有限扩张的情形已经证明了下降定理, 对 L/K 的每个中间域 M, 记 A_M 为 A 在 M 中的整闭包. 考虑如下非空集合

$$S \coloneqq \big\{(M, Q_M) \mid M \text{ 为 } L/K \text{ 的中间域}, Q_M \in \operatorname{Spec} A_M, Q_M \cap A = P_1, \\ Q_M \subset Q_2 \cap A_M \big\}.$$

定义 S 上的偏序关系 $\leq$ 为: $(M_1, Q_{M_1}) \leq (M_2, Q_{M_2}) \iff M_1 \subset M_2$, 且 $Q_{M_2} \cap A_{M_1} = Q_{M_1}$. 对 S 中的任意链 (全序子集) $\{(M_i, Q_{M_i}) \mid i \in I\}$, 令 $M \coloneqq \bigcup_{i \in I} M_i$, $Q_M \coloneqq \bigcup_{i \in I} Q_{M_i}$, 易验证 $(M, Q_M) \in S$, 并且 $(M_i, Q_{M_i}) \leq (M, Q_M)$, $\forall\, i \in I$. 这说明 S 中的任意链均有上界. 由 Zorn 引理, 可以找到 S 的一个极大元 (M_0, Q_{M_0}). 如果 $M_0 \neq L$, 取 $a \in L \setminus M_0$, 令 $M_1 = M_0(a)$. 则 M_1/M_0 为域的有限扩张, 并且对这个有限扩张应用下降定理可找到 $Q_{M_1} \in \operatorname{Spec} A_{M_1}$, 使得 $Q_{M_1} \cap A_{M_0} = Q_{M_0}$, 以及 $Q_{M_1} \subset Q_2 \cap A_{M_1}$. 从而得到 $(M_0, Q_{M_0}) < (M_1, Q_{M_1})$. 这与 (M_0, Q_{M_0}) 的极大性矛盾. 故 $M_0 = L$, 从而取 $Q_1 = Q_{M_0}$ 即可.

(3) 可设 L/K 为正规扩张. 理由为: 取 $\tilde{L}$ 为 L/K 的正规闭包, 令 $\tilde{B}$ 为 A 在 $\tilde{L}$ 中的整闭包. 则 $A \subset B \subset \tilde{B}$ 为整扩张. 由上升定理, 可取 $\tilde{Q}_2 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_2 \cap B = Q_2$. 如果对 $A \subset \tilde{B}$ 的情形已经证明了下降定理, 则可取 $\tilde{Q}_1 \in \operatorname{Spec} \tilde{B}$, 使得 $\tilde{Q}_1 \subset \tilde{Q}_2$, 且 $\tilde{Q}_1 \cap A = P_1$. 这样取 $Q_1 = \tilde{Q}_1 \cap B$ 即可.

(4) 可设 L/K 为可分扩张. 理由为: 设 $\operatorname{char}.K = p > 0$, 由于已经假设 L/K 为有限正规扩张, 域扩张 L/K 可以分解为 $K \subset L_{insep} \subset L$, 使得 L_{insep}/K 为有限纯不可分扩张, L/L_{insep} 为有限可分扩张 ([30, Lemma 030M]). 设 A_{insep} 为 A 在 L_{insep} 中的整闭包. 对 $j = 1, 2$, 令 $\tilde{P}_j \coloneqq \big\{x \in A_{insep} \mid \exists\, n \geq 1, x^{p^n} \in P_j\big\}$. 则 $\tilde{P}_j$ 为 A_{insep} 中唯一的满足 $\tilde{P}_j \cap A = P_j$ 的素理想, 并且 $\tilde{P}_1 \subset \tilde{P}_2$, $Q_2 \cap A_{insep} = \tilde{P}_2$. 如果对可分扩张 L/L_{insep} 已经证明了下降定理, 则可找到 $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$, 使得

$Q_1 \cap A_{insep} = \tilde{P}_1$, $Q_1 \subset Q_2$. 这样 Q_1 也满足 $Q_1 \cap A = P_1$ 的要求.

(5) 由前面的约化, 可以假设 L/K 为有限 Galois 扩张, B 为 A 在 L 中的整闭包. 令 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ 为 Galois 群, 则有 $A = B^G$. 由命题 3.6.6, 可找到 $Q_1' \in \operatorname{Spec} B$ 使得 $Q_1' \cap A = P_1$. 再由命题 3.7.1, (iii), 存在 $g \in G$, 使得 $Q_1' \subset gQ_0$. 故 $Q_1 \coloneqq g^{-1}Q_1'$ 即满足条件. □

注记 5.1.1 后面将证明, 在环的平坦扩张时也有形如下降定理的性质成立 (命题 7.3.6).

以下推论可以看作定理 5.1.2 的几何解释.

推论 5.1.1 设 $A \hookrightarrow B$ 为整环的单同态, 并且为整扩张. 还设 A 为整闭整环. 记 $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间之间的映射. 设 W 为 X 的一个不可约闭子集. 则对 $f^{-1}(W)$ 的任何极大不可约闭子集 Z, 都有 $f(Z) = W$, 并且 $\dim Z = \dim W$.

证明 设 $W = V(P)$, $Z = V(Q_1)$, 则 $P \in \operatorname{Spec} A$, $Q_1 \in \operatorname{Spec} B$, 并且 Q_1 为包含 PB 的一个极小素理想. 记 $P_1 \coloneqq Q_1 \cap A \supset P$. 由上升定理可以看到 $f(Z) = V(P_1)$. 如果 $P_1 \supsetneq P$, 由下降定理, 可以找到 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_1 \supsetneq Q$, 以及 $Q \cap A = P$. 这与 Q_1 为包含 PB 的一个极小素理想矛盾. 故 $P_1 = P$, $f(Z) = W$. 再由 $A/P \hookrightarrow B/Q_1$ 为单的整扩张以及命题 5.1.1 得到 $\dim A/P = \dim B/Q_1$, 即 $\dim Z = \dim W$. □

注意在上述命题中, 如果 B 为 Noether 环, 则 $f^{-1}(W)$ 的极大不可约闭子集就是 $f^{-1}(W)$ 的不可约分支. 现在将 Noether 正规化定理 3.6.2 加强为下面的版本.

定理 5.1.3 (Noether 正规化定理: 理想链版本) 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数. 设 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r$ 为 A 的理想链, 并且 $I_r \neq A$. 则在 A 中可找到有限个在 k 上代数无关的元 $t_1, \ldots, t_n$, 满足:

(i) $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow A$ 为有限扩张.

(ii) 存在整数 $0 \leq h(1) \leq h(2) \leq \cdots \leq h(r) \leq n$, 使得对每个 $1 \leq i \leq r$, 均有 $I_i \bigcap k[t_1, \ldots, t_n] = (t_1, \ldots, t_{h(i)})$. 其中当 $h(i) = 0$ 时, $(t_1, \ldots, t_{h(i)})$ 约定为零理想 (0).

证明 设 $A = k[x_1, \ldots, x_n]/J$, 则 $I_1 \subset \cdots \subset I_r$ 可看作 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 中的理想链. 通过考虑 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的理想链 $J \subset I_1 \subset \cdots \subset I_r$, 不妨假设 $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ 为多项式环. 下面对 n 进行归纳.

(1) 当 $n = 1$ 时, 不妨设 $I_1 \neq (0)$, 则 $I_1 = (f)$ 为主理想, 且 f 为次数大于 0 的多项式. 令 $t_1 = f$, 则 t_1 在 k 上代数无关, $k[t_1] \hookrightarrow A$ 为整扩张, 并且 $I_1 \cap k[t_1] \supset (t_1)$. 由于 (t_1) 为极大理想, 故 $I_i \cap k[t_1] = (t_1)$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 不妨设 $I_1 \neq 0$. 取 $0 \neq f \in I_1$, 并令 $I_0 = (f)$. 与定理 3.6.2 的证明类似, 通过一个可逆变量代换, 可以设 f 为 x_1 的首一多项式. 这样取 $u_1 = f$, $u_i = x_i$ $(2 \leq i \leq n)$, 则容易看到 $u_1, \ldots, u_n$ 在 k 上代数无关, $k[u_1, \ldots, u_n] \hookrightarrow A$ 为整扩张,

并且 $I_0 \cap k[u_1,\dots,u_n] = (u_1)$. 对 $k[u_2,\dots,u_n] \simeq k[u_1,\dots,u_n]/(u_1)$ 及其理想链

$$\frac{I_1 \cap k[u_1,\dots,u_n]}{(u_1)} \subset \frac{I_2 \cap k[u_1,\dots,u_n]}{(u_1)} \subset \cdots \subset \frac{I_r \cap k[u_1,\dots,u_n]}{(u_1)}$$

应用归纳假设, 可以找到 $k[u_2,\dots,u_n]$ 中在 k 上代数无关的元 $t_2,\dots,t_n$, 使得 $k[t_2,\dots,t_n] \hookrightarrow k[u_2,\dots,u_n]$ 为整扩张, 且

$$\frac{I_i \cap k[u_1,\dots,u_n]}{(u_1)} \bigcap k[t_2,\dots,t_n] = (t_2,\dots,t_{h(i)}),\ i = 1,\dots,r.$$

其中 $h(i)$ 为非负整数. 令 $t_1 = u_1$, 则 $t_1,\dots,t_n$ 为 A 中在 k 上代数无关的元素, 并且由 $k[t_1,\dots,t_n] \hookrightarrow k[u_1,\dots,u_n]$ 为整扩张知 $k[t_1,\dots,t_n] \hookrightarrow A$ 为整扩张. 同时不难验证, 对每个 $i = 1,\dots,r$, 有 $I_i \cap k[t_1,\dots,t_n] = (t_1,\dots,t_{h(i)})$. 归纳证毕. □

上述证明的几何意义为: 设 $V(I_1) \supset V(I_2) \supset \cdots \supset V(I_r)$ 为仿射空间 $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]$ 的闭子簇 (闭子概型). 取 $Y = V(f)$ 为 $\mathbb{A}_k^n$ 的包含 $V(I_1)$ 的超曲面. 通过可逆变量代换, 找到满的有限态射 $\mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{A}_k^n$, 使得 $\pi_1(Y) = H$, 其中 $H \simeq \mathbb{A}_k^{n-1}$ 为 $\mathbb{A}_k^n$ 的一个超平面. 取定一个线性同构 $\psi\colon \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\sim} H \times \mathbb{A}_k^1$ 使得 $\psi(H) = H \times \{0\}$. 对 H 及其闭子簇链 $\pi_1(V(I_1)) \supset \cdots \supset \pi_1(V(I_r))$ 应用归纳假设, 又可以找到满的有限态射 $\pi_2\colon H \longrightarrow \mathbb{A}_k^{n-1}$, 使得 $\pi_1(V(I_1)) \supset \cdots \supset \pi_1(V(I_r))$ 在 π_2 下的像为线性子空间降链. 这样得到复合态射

$$\pi\colon \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\psi} H \times \mathbb{A}_k^1 \xrightarrow{\pi_2 \times \mathrm{id}} \mathbb{A}_k^{n-1} \times \mathbb{A}_k^1 = \mathbb{A}_k^n$$

为满的有限态射, 且 $V(I_1) \supset V(I_2) \supset \cdots \supset V(I_r)$ 在 π 下的像为线性子空间降链.

下面分析 Noether 局部环的维数.

定义 5.1.1 设 (A,m) 为 Noether 局部环. m 中的一组元素 $x_1,\dots,x_r$ 称为一组**富余参数系**, 如果存在正整数 i, 使得 $m^i \subset (x_1,\dots,x_r)$. 这里“富余”意指参数个数可能大于实际维数. 包含元素个数最少的富余参数系称为 A 的一组**参数系**. 参数系包含的元素个数记为 $\delta(A)$.

如果存在正整数 i, 使得 $m^i = 0$, 则约定 $\delta(A) = 0$. 由定义, $\delta(A)$ 不超过 m 的极小生成元的个数. 实际上, 有下面更强的不等式成立.

引理 5.1.1 设 (A,m) 为 Noether 局部环. 则 $\delta(A) \leq \dim A$.

证明 不妨设 $d := \dim A < +\infty$. 对 d 归纳. 若 $d = 0$, 则 m 为极小素理想, 从而 m 为幂零理想, 故 $\delta(A) = 0$.

设 $d \geq 1$. 则 m 不是极小素理想. 由于 A 的极小素理想只有有限个, 由素避引理 3.2.1, 可以找到 $x \in m$, 使得 x 不在 A 的任何极小素理想中. 这样得到

$\dim A/(x) \leq d-1$. 记 $r = \delta(A/(x))$, 则由归纳假设, $r \leq \dim A/(x) \leq d-1$. 取 $y_1, \ldots, y_r \in m$, 使得 $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_r}$ 为 $A/(x)$ 的参数系。易知 $x, y_1, \ldots, y_r$ 为 A 的富余参数系. 故 $\delta(A)$ 不超过 $r+1 \leq d$. □

下面的目标是证明对于 Noether 局部环 A, 等式 $\delta(A) = \dim A$ 成立. 为此, 需要先考察参数系只含一个元素的情形.

命题 5.1.2 *设 (A, m) 为 Noether 局部环, 并且 $x \in m$ 为 A 的富余参数系. 则 $\dim A \leq 1$.*

证明 设 $P \subsetneq m$ 为 A 的一个不等于 m 的素理想. 我们只需证明 P 为极小素理想. 由富余参数系的定义, 存在 $i \geq 1$, 使得 $m^i \subset (x)$. 从而在 $A/(x)$ 中有 $\overline{m}^i = 0$. 这说明 $A/(x)$ 为有限长度的 A-模. 故 $A/(x)$ 的任意理想降链均在有限步稳定.

如果 $x \in P$, 由 $m^i \subset (x) \subset P$ 知 $m \subset P$. 这与 $P \subsetneq m$ 矛盾. 故 $x \notin P$.

考虑 P 的符号幂 $P^{(r)} = P^r A_P \bigcap A$, 以及 A 的理想降链

$$P^{(1)} + (x) \supset P^{(2)} + (x) \supset \cdots .$$

该理想降链对应到 $A/(x)$ 的理想降链, 再由 $A/(x)$ 的任意理想降链均在有限步稳定, 可知存在 $r \geq 1$, 使得 $P^{(r)} + (x) = P^{(r+1)} + (x)$. 从而对任意 $y \in P^{(r)}$, 存在 $z \in P^{(r+1)} \subset P^{(r)}$ 以及 $a \in A$, 使得 $y = z + xa$. 再由 $x \notin P$ 可知 $a \in P^{(r)}$. 由此得到 $P^{(r)} = P^{(r+1)} + xP^{(r)}$. 注意到 $x \in m$, 利用 Nakayama 引理可得 $P^{(r)} = P^{(r+1)}$. 这样在 A_P 中有 $P^r A_P = P^{r+1} A_P$. 在 Noether 局部环 A_P 中再次应用 Nakayama 引理, 即得 $P^r A_P = 0$. 故 PA_P 为 A_P 中的极小素理想. 从而 P 为 A 的极小素理想. □

通过局部化, 不难看到命题 5.1.2 等价于下面的:

定理 5.1.4 (Krull 主理想定理) *设 A 为 Noether 环, $x \in A$, 并且 P 为包含 x 的素理想中的极小元, 则 P 的高度 $\operatorname{ht} P \leq 1$.*

证明 在局部环 A_P 中, 极大理想 PA_P 为包含 (x) 的唯一素理想. 由此可以看到 x 为 A_P 的一个富余参数系. 从而利用命题 5.1.2 即得 $\operatorname{ht} P = \dim A_P \leq 1$. □

现在可以给出关于 Noether 局部环维数的如下基本定理.

定理 5.1.5 *设 (A, m) 为 Noether 局部环, 则 $\dim A = \delta(A)$.*

证明 对 $\delta(A)$ 归纳. 如果 $\delta(A) = 0$, 则 m 为幂零理想, 从而为极小素理想, 这说明 $\dim A = 0$.

如果 $\delta(A) = 1$, 由 Krull 主理想定理, $\dim A \leq 1$. 而若 $\dim A = 0$, 则 m 为极小素理想, 从而幂零, 这将得到 $\delta(A) = 0$, 与 $\delta(A) = 1$ 矛盾. 故 $\dim A = 1$.

下面假设 $\delta(A) = r \geq 2$. 由于引理 5.1.1 已经证明了 $r \leq \dim A$, 故只需证明 $\dim A \leq r$. 取 A 的一组参数系 $x_1, \ldots, x_r \in m$. 任取 A 的一个长度为 n 的素理想链

$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1} \subsetneq P_n = m$. 由 Noether 环中任意理想的非空子集均有极大元, 可知存在一个素理想 P 满足 $P_{n-1} \subset P \subsetneq m$, 并且 P 和 m 之间不存在其它的素理想. 由富余参数系的定义可以看到 $(x_1, \ldots, x_r) \not\subset P$, 因为否则 m 的一个幂次 (从而 m 本身) 将包含在 P 中. 不妨设 $x_r \notin P$. 则 m 为包含 $P + (x_r)$ 的素理想的极小元. 从而 m 的一个幂次包含在 $P + (x_r)$ 中. 特别地, 对每个 $i = 1, \ldots, r-1$, 均存在 $c_i \geq 1$, $y_i \in P$, $a_i \in A$, 使得 $x_i^{c_i} = y_i + a_i x_r$. 由此可以看到 $(y_1, \ldots, y_{r-1}, x_r)$ 为 A 的另一组参数系. 在商环 $A/(y_1, \ldots, y_{r-1})$ 中, $\bar{x}_r$ 为 $\overline{m}$ 的一个富余参数系, 从而由 Krull 主理想定理知 $\dim A/(y_1, \ldots, y_{r-1}) \leq 1$. 再由 $\overline{P} \subsetneq \overline{m}$ 知 $\overline{P}$ 为 $A/(y_1, \ldots, y_{r-1})$ 的极小素理想. 这样得到 $y_1, \ldots, y_{r-1}$ 为局部化 A_P 的一组富余参数系. 从而由归纳假设知 $\dim A_P \leq r-1$. 再由 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1} \subset P$ 知 $n - 1 \leq \dim A_P \leq r - 1$. 故 $n \leq r$. 这说明 A 的任意素理想链长度不超过 r. 即得 $\dim A \leq r = \delta(A)$. □

作为直接的推论, 我们得到下面关于局部同态纤维维数的不等式.

推论 5.1.2 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为 Noether 局部环的局部同态, 则

$$\dim B/mB \geq \dim B - \dim A.$$

证明 取 A 的一组参数系 $x_1, \ldots, x_r$, 取 B/mB 的一组参数系 $\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_s}$, 则 $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ 为 B 的一组富余参数系. 从而 $\dim B \leq \dim A + \dim B/mB$. □

5.2 有限生成代数的维数

作为上节几个基本定理的应用, 我们分析域上有限生成代数的维数. 为此, 先引入饱和素理想链的概念. 我们称环 A 的一个素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ 为**饱和素理想链**, 如果 P_n 为极大理想, P_0 为极小素理想, 并且对每个 $0 \leq i \leq n-1$, 不存在满足 $P_i \subsetneq Q \subsetneq P_{i+1}$ 的素理想 Q.

定理 5.2.1 设 A 为域 k 上的有限生成代数, 且为整环. 令 $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 则有:

(i) $\dim A = \mathrm{trdeg}_k K$. 其中 $\mathrm{trdeg}_k K$ 为 K/k 的超越次数 ([30, Definition 030G]).
(ii) A 的任意素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ 均可扩充为一个饱和素理想链.
(iii) A 的任意两个饱和素理想链的长度相等.
(iv) 对 A 的任意极大理想 m, 有 $\dim A = \dim A_m$.

证明 任取 A 的素理想链 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$. 由理想链形式的 Noether 正规化定理 5.1.3, 可以找到在 k 上代数无关的元 $t_1, \ldots, t_n$, 以及非负整数 $0 \leq h(0) \leq h(1) \leq \cdots \leq h(r) \leq n$, 使得 $k[t_1, \ldots, t_n] \hookrightarrow A$ 为整扩张, 并且 $P_i \cap k[t_1, \ldots, t_n] = (t_1, \ldots, t_{h(i)})$. 由于整扩张每个纤维中的素理想没有包含关系 (命题 3.6.5), 我们看

到 $h(i) < h(i+1)$, $\forall\ i = 0, \dots, r-1$. 不断应用上升定理 5.1.1 和下降定理 5.1.2, 不难看到 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ 可以扩充为素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$, 使得 $Q_i \cap k[t_1, \dots, t_n] = (t_1, \dots, t_i)$, $\forall\ i = 0, \dots, n$. 注意到 $k[t_1, \dots, t_n]$ 中的素理想链 $(0) \subsetneq (t_1) \subsetneq (t_1, t_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (t_1, \dots, t_n)$ 已经饱和, 再次应用整扩张每个纤维中的素理想没有包含关系 (命题 3.6.5), 我们看到素理想链 $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$ 是饱和的. 这样我们证明了 A 的任何有限长素理想链都可以扩充为长度为 n 的饱和素理想链. 由 $n = \operatorname{trdeg}_k K$, 定理得证. □

作为推论, 我们看到 $\dim k[x_1, \dots, x_n] = \operatorname{trdeg}_k k(x_1, \dots, x_n) = n$. 这与直观相符.

推论 5.2.1 *设 A 为域 k 上的有限生成代数, $\operatorname{Spec} A = X_1 \bigcup \cdots \bigcup X_r$ 为不可约分解. 则对每个 X_i, 任取闭点 $P \in X_i$, 使得 $\forall\ j \neq i$, $P \notin X_j$, 则 $\dim X_i = \dim A_P$.*

证明 设 $X_i = V(P_i)$, P_i 为极小素理想. 由定义, $\dim X_i = \dim A/P_i$. 再由定理 5.2.1 知 $\dim A/P_i = \dim A_P/P_iA_P$. 而根据 P 的取法, P_iA_P 为 A_P 的唯一极小素理想, 从而 $\dim A_P/P_iA_P = \dim A_P$. □

推论 5.2.2 *设 k 为域, $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$.*

(i) *如果 $I = (f_1, \dots, f_r)$, 则 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均大于或等于 $n - r$.*

(ii) *如果 $I = (f)$ 为非零主理想, 则 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均为 $n - 1$.*

证明 (i): 设 X 为 $\operatorname{Spec} A$ 的一个不可约分支. 取闭点 $P \in X$, 使得 P 不在其它不可约分支中. 由推论 5.2.1, $\dim X = \dim A_P = \dim k[x_1, \dots, x_n]_P/(f_1, \dots, f_r)$. 设 $d = \dim k[x_1, \dots, x_n]_P/(f_1, \dots, f_r)$, 由 Noether 局部环维数的基本定理 5.1.5, 可取 $a_1, \dots, a_d \in Pk[x_1, \dots, x_n]_P$ 使得 $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d$ 为 $k[x_1, \dots, x_n]_P/(f_1, \dots, f_r)$ 的参数系, 从而 $a_1, \dots, a_d, f_1, \dots, f_r$ 为 $k[x_1, \dots, x_n]_P$ 的富余参数系. 这样得到 $n = \dim k[x_1, \dots, x_n]_P \leq d + r$. 故 $d \geq n - r$.

(ii): 任取 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分支 X, 由于 X 为 $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ 的真闭子集, 得到 $\dim X < \dim \mathbb{A}_k^n = n$. 而由 (i) 知 $\dim X \geq n - 1$. 故 $\dim X = n - 1$. □

翻译为几何语言, 上述推论中的 (i) 是说在仿射空间 $\mathbb{A}_k^n$ 中, 每用一个超曲面 $V(f_i)$ 截一次, 维数至多降一维. (ii) 是说 $\mathbb{A}_k^n$ 的每个超曲面的不可约分支均为 $n - 1$ 维的.

定义 5.2.1 *我们称环 A 中元素的序列 $(a_1, \dots, a_n)$ 为一个**正则序列**, 如果其同时满足如下两个条件:*

(i) *a_1 为 A 的正则元, a_2 为 $A/(a_1)$ 的正则元, $\dots$, a_n 为 $A/(a_1, \dots, a_{n-1})$ 的正则元.*

(ii) *$A/(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.*

推论 5.2.3 *设 k 为域, $(f_1, \dots, f_r)$ 为 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的一个正则序列. 考虑商代数 $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$, 则 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均为 $n - r$.*

证明 由推论 5.2.2 可知 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均大于等于 $n - r$, 故只需证 $\operatorname{Spec} A$ 的每个不可约分支的维数均不超过 $n - r$. 我们对 r 归纳. 由推论 5.2.2

可知 $r=1$ 时成立. 对于 $1\leq i\leq r-1$, 设 $A_i\coloneqq k[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_i)$ 的每个不可约分支的维数均不超过 $n-i$. 考虑 $A_{i+1}\coloneqq k[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_{i+1})$. 注意到 $A_{i+1}=A_i/(f_{i+1})$. 由正则序列的定义可知 f_{i+1} 为 A_i 的正则元, 从而 f_{i+1} 不在 A_i 的任何一个伴随素理想中. 由于极小素理想都是伴随素理想, 故 f_{i+1} 不在 A_i 的任一极小素理想中. 由此不难看到, $\operatorname{Spec}A_{i+1}$ 的任意不可约分支 F_{i+1} 必为 $\operatorname{Spec}A_i$ 的某一个不可约分支 F_i 的真闭子集, 故 $\dim F_{i+1}<\dim F_i\leq n-i$, 从而 $\dim F_{i+1}\leq n-i-1$. □

对于一个满射 $f\colon Y\longrightarrow X$, 直观上看, 纤维 $f^{-1}(x)$ 的维数应该是 $\dim Y-\dim X$, 更一般地, 对 X 的不可约闭子集 W, 对 $f^{-1}(W)$ 的不可约闭子集 Z, 如果 $f(Z)=W$, 那么 $\dim Z-\dim W$ 也应该等于纤维维数 $\dim Y-\dim X$. 对于域上有限生成代数的素谱之间的映射, 下面的定理说明 $\dim Z-\dim W$ 都不会小于期望维数 $\dim Y-\dim X$, 并且对于 "大部分" W, Z, 其维数之差确实等于期望维数.

定理 5.2.2 设 k 为域, 设 A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $\varphi\colon A\hookrightarrow B$ 为单的 k-代数同态. 记 $f\colon Y=\operatorname{Spec}B\longrightarrow X=\operatorname{Spec}A$ 为相应的素谱空间之间的映射. 则:

(i) 对 X 的任意不可约闭子集 W, 对 $f^{-1}(W)$ 的任意不可约分支 Z, 若 $\overline{f(Z)}=W$, 那么有 $\dim Z-\dim W\geq\dim Y-\dim X$.

(ii) 存在 X 的非空开集 U, 使得 $U\subset f(Y)$, 并且对 X 的任意不可约闭子集 W, 对 $f^{-1}(W)$ 的任意不可约分支 Z, 如果 $Z\cap f^{-1}(U)\neq\varnothing$, 那么有 $\overline{f(Z)}=W$, 以及 $\dim Z-\dim W=\dim Y-\dim X$.

证明 (i): 设 $P\in\operatorname{Spec}A$, $Q\in\operatorname{Spec}B$, 使得 $W=V(P)$, $Z=V(Q)$. 则由条件可以看到 $Q\cap A=P$, 并且 Q 为 B/PB 的一个极小素理想. 由于 $\dim A$ 等于 A 的任一饱和素理想链的长度 (定理 5.2.1), 我们得到

$$\dim X-\dim W=\dim A-\dim A/P=\dim A_P.$$

同理可得

$$\dim Y-\dim Z=\dim B-\dim B/Q=\dim B_Q.$$

而由于 Q 为 B/PB 的极小素理想, 可知 QB_Q 为 B_Q/PB_Q 的极小素理想. 故 $\dim B_Q/PB_Q=0$. 对局部同态 $A_P\longrightarrow B_Q$ 应用推论 5.1.2 即得 $\dim A_P\geq\dim B_Q$. 故 $\dim X-\dim W\geq\dim Y-\dim Z$. 此即 $\dim W-\dim Z\geq\dim Y-\dim X$.

(ii): 由整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5, 通过将 A 修改为局部化 A_a, 我们不妨设 $A\longrightarrow B$ 可以分解为

$$A\hookrightarrow A[x_1,\dots,x_n]\hookrightarrow B,$$

使得 $x_1,\dots,x_n$ 在 $\operatorname{Frac}(A)$ 上代数无关, 并且 B 为 $A[x_1,\dots,x_n]$ 的有限扩张. 记

$Y_1 = \operatorname{Spec} A[x_1, \dots, x_n]$, 则 f 分解为

$$Y \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{f_2} X.$$

由 f_1 和 f_2 均为满射, 知 f 为满射. 由下面的引理 5.2.1, 通过考虑局部化 A_g, 我们不妨设 A 为整闭整环, 这样由推论 4.1.1, $A[x_1, \dots, x_n]$ 也为整闭整环. 对 X 的不可约闭子集 W, 容易看到 $W_1 \coloneqq f_2^{-1}(W)$ 为 Y_1 的不可约闭子集, 满足 $f_2(W_1) = W$ 和 $\dim W_1 = \dim W + n$. 再由推论 5.1.1, 对 $f^{-1}(W) = f_1^{-1}(W_1)$ 的任意不可约分支 Z, 有 $f_1(Z) = W_1$, 以及 $\dim Z = \dim W_1$. 从而 $f(Z) = W$, 并且 $\dim Z = \dim W + n = \dim W + \dim Y - \dim X$. □

引理 5.2.1 *设 A 为域 k 上的有限生成代数, 并且 A 为整环. 则存在 $0 \neq g \in A$, 使得 A_g 为整闭整环.*

证明 设 $K = \operatorname{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 记 B 为 A 在 K 中的整闭包. 由 Noether 正规化定理, 可以取到 $t_1, \dots, t_n \in A$ 在 k 上代数无关, 并且使得 $k[t_1, \dots, t_n] \hookrightarrow A$ 为有限扩张. 考虑如下图表:

$$\begin{array}{ccc} B & \subset & K \\ | & & | \\ A & & \\ | & & \\ k[t_1, \dots, t_n] & \subset & k(t_1, \dots, t_n) \end{array}$$

注意到 B 也为 $k[t_1, \dots, t_n]$ 在 K 中的整闭包, 由命题 4.3.1 可以得到 $k[t_1, \dots, t_n] \hookrightarrow B$ 为有限扩张, 从而 $A \hookrightarrow B$ 也为有限扩张. 设 $B = Ax_1 + \cdots + Ax_m$, 并且 $x_i = \frac{a_i}{b_i}$, $a_i, b_i \in A$. 令 $g = b_1 \cdots b_m \in A$, 则 $A_g = B_g$. 由 B 为整闭整环知其局部化 B_g 也为整闭整环. 故 A_g 是整闭整环. □

在上述定理中将 W 取为一个闭点, 就得到如下关于纤维维数的重要推论.

推论 5.2.4 *设 k 为域, 设 A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $\varphi\colon A \hookrightarrow B$ 为单的 k-代数同态. 记 $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间之间的映射. 则:*

(i) *对 X 的任一闭点 x, 如果 $f^{-1}(x) \neq \varnothing$, 则对 $f^{-1}(x)$ 的任一不可约分支 F, 均有 $\dim F \geq \dim Y - \dim X$.*

(ii) *存在 X 的非空开集 U, 使得 $U \subset f(Y)$, 并且对 U 的任一闭点 x, 对 $f^{-1}(x)$ 的任一不可约分支 F, 均有 $\dim F = \dim Y - \dim X$.*

例 5.2.1 下面是一个纤维维数不等于期望维数的例子. 设 k 为代数封闭域, $A = k[x, y]$, $B = k[x, y, z]/(x - zy)$, 而同态 $A \longrightarrow B$ 为 $x \mapsto x, y \mapsto y$. 则对于 $\operatorname{Spec} A$ 上的闭点 P, 当 $P \neq (x, y)$ 时, $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 P 处的纤维维数是 0, 而闭点 (x, y) 处的纤维

维数是 1.

以下直到本节结束我们总是保持如下假设和记号: k 为域, A, B 均为有限生成 k-代数, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 k-代数同态, 以及 $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间映射.

对 $y \in Y$, 令 $x = f(y)$. 定义如下数值

$$\dim_y Y/X \coloneqq \max\left\{\dim F \mid F \text{ 为过 } y \text{ 的} f^{-1}(f(y)) \text{ 的不可约分支}\right\}.$$

注意 F 只是 $f^{-1}(f(y))$ 的闭子集, 而不一定是 Y 的闭子集. 下面的命题利用 X 和 Y 的不可约闭子集维数给出了 $\dim_y Y/X$ 的另一个表达式, 具有更直观的几何意义.

命题 5.2.1 设 $y \in Y$, 令 $x = f(y) \in X$. 则

$$\dim_y Y/X = \max\left\{\dim Z - \dim\overline{\{x\}} \mid Z \text{ 为过 } y \text{ 的} f^{-1}(\overline{\{x\}}) \text{ 的不可约分支}\right\}.$$

特别地, 如果 y 为 Y 的闭点, 则 $\dim_y Y/X$ 为纤维 $f^{-1}(x)$ 的过 y 的不可约分支维数的最大值.

证明 设 y 对应的 B 的素理想为 Q, x 对应的 A 的素理想为 P. 则 $P = Q \cap A$, 令

$$S \coloneqq \{Q' \in \operatorname{Spec} B \mid Q' \cap A = P,\ Q \supset Q'\}.$$
$$T \coloneqq \{Q' \in \operatorname{Spec} B \mid Q' \cap A \supset P,\ Q \supset Q'\}.$$

则 S 的极小元一一对应到 $f^{-1}(x)$ 的过 y 的不可约分支, 而 T 的极小元一一对应到 $f^{-1}(\overline{\{x\}})$ 的过 y 的不可约分支. 由 $Q \cap A = P$ 容易看到 S 等于 T. 设 $S = T$ 的所有极小元为 $Q_1, \ldots, Q_m$. 对任意 $1 \leq i \leq m$, 素理想 Q_i 对应的 $f^{-1}(\overline{\{x\}})$ 的过 y 的不可约分支为 $\operatorname{Spec} B/Q_i$, 因此由定理 5.2.1 和超越次数的可加性得到

$$\begin{aligned}\dim B/Q_i - \dim\overline{\{x\}} &= \dim B/Q_i - \dim A/P = \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Frac}(B/Q_i) - \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Frac}(A/P)\\ &= \operatorname{trdeg}_k k(Q_i) - \operatorname{trdeg}_k k(P) = \operatorname{trdeg}_{k(P)} k(Q).\end{aligned}$$

另一方面, Q_i 对应的 $f^{-1}(x)$ 的过 y 的不可约分支为 $\operatorname{Spec} C_i$, 其中 C_i 为 $\frac{B_P/PB_P}{Q_iB_P}$. 注意到 C_i 为有限生成 $k(P)$-代数, 且为整环, 从而再次由定理 5.2.1 可得

$$\dim C_i = \operatorname{trdeg}_{k(P)} \operatorname{Frac}(C_i) = \operatorname{trdeg}_{k(P)} k(Q_i).$$

这样我们得到对每个 $i = 1, \ldots, m$, 都有 $\dim C_i = \dim B/Q_i - \dim\overline{\{x\}}$. 因此得到 $\dim_y Y/X = \max\left\{\dim B/Q_i - \dim\overline{\{x\}} \mid i = 1, \ldots, m\right\}$. 此即所要证的等式. □

当 y 变动时, 下面的命题断言数值 $\dim_y Y/X$ 的变化具有上半连续性, 这是代数几

何中出现的数值函数的一个普遍现象.

定理 5.2.3　Y 上的非负整数值函数

$$\begin{aligned} g\colon Y &\longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ y &\longmapsto \dim_y Y/X \end{aligned}$$

具有如下性质:

(i) g 是上半连续的, 即对任意整数 $n \geq 0$, 集合 $\{y \in Y \mid g(y) \geq n\}$ 均为 Y 的闭子集.

(ii) g 是有界函数, 即存在 $M > 0$, 使得 $\forall\, y \in Y$, 均有 $0 \leq g(y) \leq M$.

证明　设 Y 的所有不可约分支为 $Z_1, \ldots, Z_m$. 对 $1 \leq i \leq m$, 令 $W_i \coloneqq \overline{f(Z_i)}$. 则 W_i 为 X 的不可约闭子集, 并且 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_i$. 对每个 i, 设 $Z_i = V(Q_i)$, $Q_i \in \operatorname{Spec} B$, 则 $W_i = V(P_i)$, 其中 $P_i = Q_i \cap A$. 对整环的单同态 $A/P_i \hookrightarrow B/Q_i$ 应用定理 5.2.2, 不难看到函数 g 在 Z_i 上的最小值为 $\dim Z_i - \dim \overline{f(Z_i)}$, 并且在 Z_i 的一个非空开子集 V_i 上取常值 $\dim Z_i - \dim \overline{f(Z_i)}$. 通过缩小 V_i 还可使得 V_i 与除 Z_i 之外的不可约分支均不相交, 故 V_i 也是 Y 上的非空开子集. 令 $r_0 \coloneqq \min\left\{\dim Z_i - \dim \overline{f(Z_i)} \mid 1 \leq i \leq m\right\}$, 设 $S \coloneqq \left\{i \mid 1 \leq i \leq m,\ \dim Z_i - \dim \overline{f(Z_i)} = r_0\right\}$. 则得到 Y 的非空开子集 $V^{(0)} \coloneqq \bigcup\limits_{i \in S} V_i$. 由构造过程知函数 g 在 $V^{(0)}$ 上取常值 r_0, 并且 $\forall\, y \in Y$, $g(y) \geq r_0$.

令 $Y_1 \coloneqq Y \setminus V^{(0)}$ 为 $V^{(0)}$ 的补集. 取 B 的理想 J, 使得 $Y_1 = V(J)$. 令 $X_1 \coloneqq V(J \cap A)$ 为 X 的闭子集. 则 $f(Y_1) \subset X_1$. 并且 k-代数同态 $A/J \cap A \longrightarrow B/J$ 诱导的素谱空间映射恰为 f 的限制 $f\,|_{Y_1}\colon Y_1 \longrightarrow X_1$. 对这个 k-代数同态重复上面的过程, 可以得到非负整数 r_1 和 Y_1 的非空开子集 $V^{(1)}$, 使得 g 在 $V^{(1)}$ 上取常值 r_1, 并且 $\forall\, y \in Y_1$, $g(y) \geq r_1$. 由 Y_1 的构造可知 $r_1 \geq r_0$.

继续上面的操作, 最终得到一系列非负整数 r_m 和 Y 的互不相交的子集 $V^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. 满足:

(i) r_m 为递增的, 即 $r_0 \leq r_1 \leq \cdots$.

(ii) 函数 g 在 $V^{(m)}$ 上取常值 r_m.

(iii) $V^{(0)}$ 为 Y 的非空开子集.

(iv) 对任意 $m \geq 1$, $Y_m \coloneqq Y \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{m-1} V^{(i)}$ 为 Y 的闭子集. 并且如果 Y_m 非空, 则 $V^{(m)}$ 为 Y_m 的非空开子集.

如果对任意 m 都有 $Y_m \neq \varnothing$, 那么就得到无限长的闭集降链 $Y \supsetneqq Y_1 \supsetneqq Y_2 \supsetneqq \cdots$. 这与 B 的 Noether 性矛盾 (命题 1.5.2). 故存在 $N \geq 0$, 使得 $Y_N = \varnothing$. 从而得到 $Y = \coprod\limits_{m=0}^{N-1} V^{(m)}$. 由此易得 g 的上半连续性和有界性. □

注记 5.2.1　上述命题中通过不断取相对开子集 $V^{(m)}$ 来穷尽 Y 是处理 Noether 空间的常见手法. 这在命题 3.5.2 的证明中已经出现过.

5.3 Zariski 主定理

本节我们证明 Zariski 主定理的代数版本 (定理 5.3.1). 该定理在处理拟有限同态时起到重要作用. 一个综述可见 [7], 详细证明也可见 [30, Section 02LQ].

5.3.1 拟有限同态 我们称拓扑空间 X 中的一个点 x 是**孤立点**, 如果单点集 $\{x\}$ 为 X 的开子集. 设 A 为环, B 为有限生成 A-代数, $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P \coloneqq Q \cap A \in \operatorname{Spec} A$. 如果 Q 是纤维 $\operatorname{Spec} B \otimes_A k(P)$ 中的孤立点, 则称结构同态 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 在点 Q 处**拟有限**. 如果 φ 在 $\operatorname{Spec} B$ 的任意点处均拟有限, 则称 φ 为**拟有限同态**.

命题 5.3.1 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态, 使得 B 为有限生成 A-代数. 设 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 则 φ 在 Q 处拟有限 $\iff$ 存在 $f \in B$, 使得 $\{Q\} = D(f) \cap \varphi^{*-1}(P)$. 其中 $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为 φ 诱导的素谱空间映射, 而 $P \coloneqq \varphi^*(Q) = Q \cap A$.

证明 由孤立点的定义和命题 1.3.7 即得. □

下面考察两个同态的复合拟有限与每个同态拟有限的关系.

命题 5.3.2 设 $\varphi\colon A \longrightarrow R$ 和 $\psi\colon R \longrightarrow B$ 均为环同态, 使得 R 为有限生成 A-代数, B 成为有限生成 R-代数. 设 $Q_1 \in \operatorname{Spec} R$, $Q \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q_1 = Q \cap R$. 则有:

(i) 如果 φ 在 Q_1 处拟有限, ψ 在 Q 处拟有限, 那么 $\psi \circ \varphi$ 在 Q 处拟有限.

(ii) 如果 $\psi \circ \varphi$ 在 Q 处拟有限, 那么 ψ 也在 Q 处拟有限.

证明 由命题 5.3.1 直接验证即可. □

如果 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环的有限扩张, 则由命题 3.6.5 可知 φ 为拟有限同态, 并且对任意 $f \in B$, $A \longrightarrow B_f$ 也是拟有限的. 一般而言 $A \longrightarrow B_f$ 并不是有限扩张, 因此拟有限同态比有限扩张包含更多的情形. 另一方面, Zariski 主定理的主要内容就是说明拟有限同态在局部上都是上面 $A \longrightarrow B_f$ 的形式. 下面的命题在 A 是域的情形刻画了拟有限点附近的形状.

命题 5.3.3 设 k 为域, B 为有限生成 k-代数, $Q \in \operatorname{Spec} B$. 则以下几条互相等价:

(i) 结构同态 $k \longrightarrow B$ 在 Q 处拟有限.

(ii) Q 为 B 的极大理想, 同时也是极小素理想.

(iii) $\{Q\}$ 为 $\operatorname{Spec} B$ 的既开又闭的子集.

(iv) B_Q 作为 k-线性空间是有限维的.

证明 (i) $\implies$ (ii): 设 $g \in B$, 使得 $\{Q\} = D(g)$. 则 Q 为 $\operatorname{Spec} B_g$ 的唯一素理想. 由 Q 是 B_g 的极小素理想可知 Q 也是 B 的极小素理想. 由 Q 为 B_g 的极大理想可知 Q 也是 B 的极大理想 (推论 3.6.3).

(ii) $\implies$ (iii): 由 Q 为极大理想知 $\{Q\}$ 为 $\operatorname{Spec} B$ 的闭子集, 即 $\overline{\{Q\}} = \{Q\}$.

设 $\operatorname{Spec} B = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ 为不可约分解, 并且 $Q \in F_1$. 由 Q 为极小素理想知 $F_1 = \overline{\{Q\}} = \{Q\}$. 从而 F_1 为 $F_2 \cup \cdots \cup F_n$ 的补集, 这说明 $\{Q\} = F_1$ 为 $\operatorname{Spec} B$ 的开子集.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 由孤立点的定义即得.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): 由条件知 Q 为 $\operatorname{Spec} B_Q$ 的唯一素理想. 从而存在 $n \geqslant 1$, 使得 $Q^n B_Q = 0$. 由此知 $\dim_{k(Q)} B_Q = \sum_{i=0}^{n-1} \dim_{k(Q)} Q^i B_Q / Q^{i+1} B_Q < +\infty$. 再由 Q 为 B 的极大理想知 $k(Q)/k$ 为域的有限扩张 (定理 3.6.3). 从而得到 $\dim_k B_Q < +\infty$.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): 由 $\dim_k B_Q < +\infty$ 知 $\dim_k k(Q) < +\infty$. 故 Q 为 B 的极大理想 (定理 3.6.3). 因为 $k \longrightarrow B_Q$ 为有限扩张, 从而 B_Q 的任何两个素理想互不包含 (命题 3.6.5). 故 QB_Q 为 B_Q 的极小素理想. 这说明 Q 也是 B 的极小素理想. □

作为推论, 可以得到拟有限同态在基变换下是稳定的, 即如下性质.

命题 5.3.4 *设 A 为环, B 为有限生成 A-代数. 设 $A \longrightarrow R$ 为环同态. 若 $A \longrightarrow B$ 在点 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 处拟有限, 则对任意满足 $Q' \cap B = Q$ 的点 $Q' \in \operatorname{Spec} R \otimes_A B$, 同态 $R \longrightarrow R \otimes_A B$ 在 Q' 处拟有限.*

证明 设 $P \coloneqq Q \cap A \in \operatorname{Spec} A$. 由命题 5.3.1, 通过对 B 作局部化, 不妨设 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 P 处的纤维只有 Q. 从而再由命题 5.3.3 知 $\dim_{k(P)} k(P) \otimes_A B < +\infty$. 任取 $Q' \in \operatorname{Spec} R \otimes_A B$ 满足 $Q' \cap B = Q$, 令 $P' \coloneqq Q' \cap R \in \operatorname{Spec} R$, 则 $P' \cap A = P$. 这样映射 $\operatorname{Spec} R \otimes_A B \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ 在 P' 点的纤维为 $\operatorname{Spec} k(P') \otimes_R (R \otimes_A B)$. 而 $k(P') \otimes_R (R \otimes_A B) \simeq k(P') \otimes_{k(P)} k(P) \otimes_A B$. 故 $\dim_{k(P')} k(P') \otimes_R (R \otimes_A B) < +\infty$. 这说明 $\operatorname{Spec} k(P') \otimes_R (R \otimes_A B)$ 是有限个闭点的并集. 故 $R \longrightarrow R \otimes_A B$ 在 Q' 处拟有限. □

5.3.2 一个变元的情形

本小节分析形如 $A \longrightarrow A[b] \overset{\text{有限扩张}}{\longrightarrow} B$ 的同态在拟有限点附近的形状. 这是 Zariski 主定理证明中最困难的部分. 首先看 $B = A[b]$ 由一个元素生成的情形.

命题 5.3.5 *设 A 为环, B 为 A-代数, 并且存在 $b \in B$, 使得 $B = A[b]$. 记 $\tilde{A}$ 为 A 在 B 中的整闭包. 设 $A \longrightarrow B$ 在点 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 处拟有限, 则存在 $s \in \tilde{A}$, 使得 $Q \in D(s)$, 并且自然的包含同态 $\tilde{A}_s \hookrightarrow B_s$ 为同构, 记为 $\tilde{A}_s = B_s$.*

证明 令 $P \coloneqq Q \cap A \in \operatorname{Spec} A$, 并考虑 b 的零化理想 $I \coloneqq \{g(x) \in A[x] \mid g(b) = 0\}$. 则 $B = A[b] \simeq A[x]/I$. 映射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 P 处的纤维为 $\operatorname{Spec} B \otimes_A k(P) = \operatorname{Spec} k(P)[x]/\overline{I}$, 其中 $\overline{I} \coloneqq Ik(P)[x]$ 表示 I 在 $k(P)[x]$ 中生成的理想. 如果 $\overline{I} = (0)$, 则这个纤维成为 $\operatorname{Spec} k(P)[x]$, 而 Q 在 $\operatorname{Spec} k(P)[x]$ 中显然不是孤立点, 这与 $A \longrightarrow B$ 在 Q 处拟有限矛盾. 故 $\overline{I} \neq (0)$. 取 $0 \neq f(x) \in I$, 使得 $f(x)$ 在 $k(P)[x]$ 中非零. 这样 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_0$, 其中 $0 \leqslant m < n$, 并且 $a_i \in A$ 满足

$$a_n(P) = \cdots = a_{m+1}(P) = 0, \quad a_m(P) \neq 0. \tag{5.3–1}$$

这里 $a_i(P)=\overline{a_i}\in k(P)$ 是 a_i 在点 P 处的取值. 令 $s\coloneqq\sum_{i=m}^{n}a_ib^{i-m}\in B$, 则有

$$sb^m+a_{m-1}b^{m-1}+\cdots+a_0=f(b)=0. \tag{5.3–2}$$

将 b 看作 B_s 中的元素, 则 b 在 A_s 上整, 再由 $s=\sum_{i=m}^{n}a_ib^{i-m}$ 知 s 在 A_s 上整. 由此不难看到 s 在 A 上整, 故 $s\in\tilde{A}$, 并且 $b\in\tilde{A}_s\subset B_s$. 而 $B_s=A[b]_s\subset\tilde{A}_s[b]$. 由此知 $\tilde{A}_s=B_s$. 再由 (5.3–1) 知 $s(Q)\neq0$, 这说明 $Q\in D(s)$. □

为了分析更一般的 $A[b]\hookrightarrow B$ 为有限扩张的情形, 我们首先做一些准备. 对一个环 B 及其子环 $C\subset B$, 定义符号 $(C:B)\coloneqq\{x\in C\mid xB\subset C\}$, 显然这是 C 的一个理想.

命题 5.3.6 设 B 为环, C 为 B 的子环, 使得 $C\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 则有:

(i) $(C:B)$ 是 C 的理想, 同时也是 B 的理想.

(ii) 对环 C 的任一乘法子集 S, 有 $(C:B)C_S=(C_S:B_S)$.

(iii) 对 C 的任一素理想 P, 有 $P\not\supset(C:B)\iff C_P=B_P\iff$ 存在 $s\in C$, 使得 $P\in D(s)$, 并且 $C_s=B_s$.

证明 (i) 直接验证即可.

(ii) 显然有 $(C:B)C_S\subset(C_S:B_S)$. 设 B 作为有限 C-模的生成元为 $b_1,\dots,b_n$. 则对任意 $x\in(C_S:B_S)$, 对任意 b_i, 存在 $s_i\in S$, 使得 $s_ixb_i\in C$. 令 $s\coloneqq s_1s_2\dots s_n\in S$, 则 $\forall\,1\leq i\leq n$, 均有 $sxb_i\in C$. 由此知 $sx\in(C:B)$, 故 $x\in(C:B)C_S$.

(iii) 由定义可知 $C_P=B_P\iff(C_P:B_P)=C_P$. 再由 (ii) 知 $(C_P:B_P)=C_P\iff(C:B)C_P=C_P$, 而这又等价于 $P\not\supset(C:B)$. 这就证明了 $P\not\supset(C:B)\iff C_P=B_P$. 另一方面, 设 B 作为有限 C-模的生成元为 $b_1,\dots,b_n$. 如果 $C_P=B_P$, 则对每个 $i=1,\dots,n$, 存在 $s_i\in C\setminus P$, 使得 $s_ib_i\in C$. 令 $s\coloneqq s_1s_2\dots s_n\in C\setminus P$, 则 $sb_i\in C$, $\forall\,i$. 故 $C_s=B_s$. 这样得到了 $C_P=B_P\implies$ 存在 $s\in C$, 使得 $P\in D(s)$, 并且 $C_s=B_s$. 反方向的蕴含是显然的. □

上述命题的 (iii) 说明 $(C:B)$ 度量了 C 与 B 的偏离程度.

引理 5.3.1 设 B 为环, A 为 B 的子环, 并且 A 在 B 中整闭 (即 A 在 B 中的整闭包等于 A). 设 $b\in B$ 满足 $A[b]\hookrightarrow B$ 为有限扩张. 设 $f(x)\in A[x]$ 为首一多项式, 以及 $u\in B$, 使得 $uf(b)\in(A[b]:B)$, 则有 $u\in(A[b]:B)$.

证明 任取 $s\in B$, 只需证明 $us\in A[b]$. 由于 $uf(b)\in(A[b]:B)$, 可知 $suf(b)=g(b)\in A[b]$, 其中 $g(x)\in A[x]$. 因为 $f(x)$ 为首一多项式, 可以做带余除法, 得到 $h(x),r(x)\in A[x]$, 使得 $r(x)=0$ 或者 $\deg r<\deg f$, 并且有 $g(x)=h(x)f(x)+r(x)$. 由此知 $(su-h(b))f(b)=r(b)$. 令 $t\coloneqq su-h(b)$, 则在局部化 B_t 中有 $f(b)-t^{-1}r(b)=0$. 令 $A[t^{-1}]$ 为 A 和 t^{-1} 生成的 B_t 的子环. 则 b 作为 B_t 的元素, 满足系数在 $A[t^{-1}]$ 中的一个首一方程, 即 b 在 $A[t^{-1}]$ 上整, 进而得到 $A[t^{-1}]\hookrightarrow A[b]$ 为整扩张. 又由 $A[b]\hookrightarrow B$

为有限扩张知 $A[t^{-1}] \hookrightarrow B$ 为整扩张, 从而 $t \in B$ 在 $A[t^{-1}]$ 上整. 将 t 满足的系数在 $A[t^{-1}]$ 上的首一方程整理可知 t 在 A 上整, 再由 A 在 B 中整闭即得 $t \in A$. 这说明 $su = h(b) + t \in A[b]$. 故 $u \in (A[b] : B)$. □

由该引理, 可以得到下面的超越性质.

命题 5.3.7 设 B 为环, A 为 B 的子环, 并且 A 在 B 中整闭. 设 $b \in B$ 满足 $A[b] \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 对集合 $\{n \in \operatorname{Spec} B \mid n \supset (A[b] : B)\}$ 的一个极小元 n, 令 $m \coloneqq n \cap A \in \operatorname{Spec} A$. 则 $\overline{b} \in k(n)$ 为 $k(m)$ 上的超越元.

证明 假设 $\overline{b}$ 是 $k(m)$ 上的代数元, 则存在首一多项式 $f(x) \in A[x]$, 使得 $f(b) \in n$. 由 n 的极小性可知 n 是局部环 $B_n/(A[b] : B)B_n$ 的唯一素理想, 故 $f(b)$ 是 $B_n/(A[b] : B)B_n$ 中的幂零元. 这说明存在 $i \geq 1$, 存在 $u \in B \setminus n$, 使得 $uf(b)^i \in (A[b] : B)$. 注意到 $f(x)^i \in A[x]$ 也是首一多项式, 从而由引理 5.3.1 知 $u \in (A[b] : B)$. 但这与 $u \notin n$ 矛盾! □

下面的引理大意是说存在超越元的扩张没有拟有限点.

引理 5.3.2 设 B 为整环, A 为 B 的子环. 设 $b \in B$ 在 $\operatorname{Frac}(A)$ 上为超越元, 并且 $A[b] \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 则对任意 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 自然的包含同态 $A \longrightarrow B$ 在 Q 点都不是拟有限的.

证明 首先假设 A 为整闭整环. 任取 $Q \in \operatorname{Spec} B$. 对 A 和 B 同时在 $P \coloneqq Q \cap A$ 处作局部化, 则 A_P 仍为整闭整环, b 在 $\operatorname{Frac}(A_P)$ 上为超越元, 并且 $A_P[b] \hookrightarrow B_P$ 为有限扩张. 因此, 我们不妨设 (A, m) 为局部环, 并且 $Q \cap A = m$. 由于 $A[b] \simeq A[x]$, 知 $A[b]$ 为整闭整环 (命题 4.1.5). 素谱空间映射 $\operatorname{Spec} A[b] \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 m 点处的纤维 F 同胚于 $\operatorname{Spec} k(m)[x]$, 故 F 是 $\operatorname{Spec} A[b]$ 的一维不可约闭子集. 对 $A[b] \hookrightarrow B$ 应用推论 5.1.1, 可知 F 在 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A[b]$ 下的原像的任一极大不可约闭子集都是一维的. 这样得到 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 m 点的纤维 $\operatorname{Spec} B/mB$ 的每个极大不可约闭子集都是一维的. 由于 $B/mB \simeq B \otimes_A k(m)$ 是有限生成 $k(m)$-代数, 从而为 Noether 环. 故纤维 $\operatorname{Spec} B/mB$ 的每个不可约分支都是一维的. 由此得到 $A \longrightarrow B$ 在 Q 点不是拟有限的.

对一般的整环 A, 我们令 A' 为 A 在其分式域 $\operatorname{Frac}(A)$ 中的整闭包. 令 B' 为 B 和 A' 在 $\operatorname{Frac}(B)$ 中生成的子环, 则 B' 为有限生成 A'-代数, 并且有如下环扩张交换图:

$$\begin{array}{ccccc} B & \subset & B' & \subset & \operatorname{Frac}(B) \\ | & & | & & | \\ A & \subset & A' & \subset & \operatorname{Frac}(A) \end{array}$$

显然 b 在 $\operatorname{Frac}(A') = \operatorname{Frac}(A)$ 上仍为超越元, 并且 $A'[b] \hookrightarrow B'$ 为有限扩张. 从而由已证的整闭整环的情形知 $A' \longrightarrow B'$ 在 B' 的任何素理想处都不是拟有限的. 任取 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 由于 $B \hookrightarrow B'$ 为单的整扩张, 可以找到 $Q' \in \operatorname{Spec} B'$, 使得 $Q' \cap B = Q$(命

题 3.6.6). 令 $P' \coloneqq Q' \cap A'$, 则 $P' \cap A = P$. 根据 B' 的构造, 环同态 $\pi\colon B \otimes_A A' \longrightarrow B'$, $b \otimes a' \longmapsto ba'$ 为满同态. 令 $Q_1 \coloneqq \pi^{-1}(Q') \in \operatorname{Spec} B \otimes_A A'$, 则 $Q_1 \cap B = Q$. 根据拟有限同态的基变换性质 (命题 5.3.4), 如果 $A \longrightarrow B$ 在 Q 点处拟有限, 则 $A' \longrightarrow B \otimes_A A'$ 在 Q_1 处也拟有限, 从而 $A' \longrightarrow B'$ 在 Q' 处也是拟有限的. 这与已证的情形矛盾! 故 $A \longrightarrow B$ 在 Q 处不是拟有限的. □

为了完成归纳, 我们还需要如下引理.

引理 5.3.3 *设 $A \subset C \subset B$ 为环的包含. 设 $Q \in \operatorname{Spec} B$, $s_1 \in A$, $s_2 \in C$ 满足 $s_1 s_2 \notin Q$, 且 $A_{s_1} = C_{s_1}$, $C_{s_2} = B_{s_2}$. 则存在 $s \in A$, 使得 $s \notin Q$, 且 $A_s = B_s$.*

证明 由 $A_{s_1} = C_{s_1}$ 知, 存在 $a \in A$, $n \geq 1$, 使得在 C_{s_1} 中有 $s_2 = \frac{a}{s_1^n}$. 故存在 $m \geq 1$, 使得在 C 中有 $as_1^m = s_2 s_1^{n+m}$. 令 $s \coloneqq as_1^m \in A$, 则由 $s = s_2 s_1^{n+m}$ 知 $s \notin Q$, 由 $A_{s_1} = C_{s_1}$ 知 $A_s = (A_{s_1})_s = (C_{s_1})_s = C_s$, 以及由 $C_{s_2} = B_{s_2}$ 知 $C_s = (C_{s_2})_s = (B_{s_2})_s = B_s$. 从而得到 $A_s = B_s$. □

现在可以将命题 5.3.5 推广到下面的情形.

命题 5.3.8 *设 A 为环, B 为 A-代数, 并且存在 $b \in B$, 使得 $A[b] \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 记 $\tilde{A}$ 为 A 在 B 中的整闭包. 设 $A \longrightarrow B$ 在点 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 处拟有限, 则存在 $s \in \tilde{A}$, 使得 $Q \in D(s)$, 并且 $\tilde{A}_s = B_s$.*

证明 不妨设 $A = \tilde{A}$ 在 B 中整闭. 这样有 $A \subset A[b] \subset B$. 首先假设 $Q \not\supset (A[b] : B)$. 由命题 5.3.6, 存在 $s_1 \in A[b] \setminus Q$, 使得 $A[b]_{s_1} = B_{s_1}$. 从而 $A \longrightarrow A[b]$ 在 $Q \cap A[b]$ 处是拟有限的. 再由命题 5.3.5, 又可找到 $s_2 \in A \setminus Q$, 使得 $A_{s_2} = A[b]_{s_2}$. 这样根据引理 5.3.3 即知存在 $s \in A \setminus Q$, 使得 $A_s = B_s$.

下面只需证明 $Q \not\supset (A[b] : B)$ 总成立. 假设 $Q \supset (A[b] : B)$, 我们可以找到集合 $\{n \in \operatorname{Spec} B \mid Q \supset n \supset (A[b] : B)\}$ 的一个极小元 n, 令 $m \coloneqq n \cap A \in \operatorname{Spec} A$. 则由命题 5.3.7 可知 $\overline{b} \in k(n)$ 为 $k(m)$ 上的超越元. 令 $\overline{A} \coloneqq A/m$, $\overline{B} \coloneqq B/n$. 则 $\overline{b} \in \overline{B}$ 在 $\operatorname{Frac}(\overline{A}) = k(m)$ 上为超越元, 并且 $\overline{A}[\overline{b}] \hookrightarrow \overline{B}$ 是有限扩张. 这样由引理 5.3.2 得到 $\overline{A} \hookrightarrow \overline{B}$ 在 $\overline{Q} \coloneqq Q/n \in \operatorname{Spec} \overline{B}$ 处不是拟有限的. 注意到 $A \longrightarrow B$ 在 $P \coloneqq Q \cap A$ 处的纤维为 $\operatorname{Spec}(B/PB)_P$, 而 $\overline{A} \hookrightarrow \overline{B}$ 在 $\overline{P} \coloneqq P/m \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ 处的纤维为 $\operatorname{Spec}(\frac{B}{PB+n})_P$. 显然 $(\frac{B}{PB+n})_P$ 为 $(B/PB)_P$ 的商环, 故 $\operatorname{Spec}(\frac{B}{PB+n})_P$ 为 $\operatorname{Spec}(B/PB)_P$ 的闭子集. 这样由 $\overline{A} \hookrightarrow \overline{B}$ 在 $\overline{Q}$ 处不是拟有限的得到 $A \longrightarrow B$ 在 Q 处不是拟有限的. 这与条件矛盾! 故总是有 $Q \not\supset (A[b] : B)$ 成立. □

5.3.3 主定理及应用

一般的拟有限点附近有如下结构性命题.

命题 5.3.9 设 A 为环, B 为有限生成 A-代数, 记 $\tilde{A}$ 为 A 在 B 中的整闭包. 设 $A \longrightarrow B$ 在点 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 处拟有限, 则存在 $s \in \tilde{A}$, 使得 $Q \in D(s)$, 并且 $\tilde{A}_s = B_s$.

证明 不妨设 $A = \tilde{A}$ 在 B 中整闭. 我们对如下定义的 n 进行归纳:

$$n \coloneqq \min\{m \mid \text{存在 } b_1, \dots, b_m \in B, \text{ 使得 } A[b_1, \dots, b_m] \hookrightarrow B \text{ 为有限扩张}\}.$$

如果 $n = 0$, 则 $A \hookrightarrow B$ 为有限扩张, 结论显然成立.

如果 $n = 1$, 则由命题 5.3.8 即得.

下面设 $n \geq 2$. 令 $R \coloneqq A[b_1, \dots, b_{n-1}]$, 以及 $\tilde{R}$ 为 $A[b_1, \dots, b_{n-1}]$ 在 B 中的整闭包, 则 $R[b_n] \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 对 $R \subset R[b_n] \subset B$ 应用命题 5.3.8, 则存在 $s_1 \in \tilde{R} \setminus Q$, 使得 $\tilde{R}_{s_1} = B_{s_1}$. 由 B_{s_1} 为有限生成 A-代数知 $\tilde{R}_{s_1}$ 也为有限生成 A-代数. 从而可找到 $x_1, \dots, x_m \in \tilde{R}$, 以及 $k_i \geq 0$, 使得 $\tilde{R}_{s_1} = A[\frac{x_1}{s_1^{k_1}}, \dots, \frac{x_m}{s_1^{k_m}}]$. 考虑 $\tilde{R}$ 的子代数 $C \coloneqq A[b_1, \dots, b_{n-1}, x_1, \dots, x_m, s_1]$. 则 $C_{s_1} = \tilde{R}_{s_1} = B_{s_1}$, 并且 $A[b_1, \dots, b_{n-1}] \hookrightarrow C$ 为有限扩张. 对 $A \subset A[b_1, \dots, b_{n-1}] \subset C$ 应用归纳假设, 则可以找到 $s_2 \in A \setminus Q$, 使得 $A_{s_2} = C_{s_2}$. 从而根据引理 5.3.3 即可找到 $s \in A \setminus Q$, 使得 $A_s = B_s$. □

我们还可以将上述命题中的 $\tilde{A}$ 加强为 B 的有限 A-子代数, 得到如下定理.

定理 5.3.1 (Zariski 主定理) 设 A 为环, B 为有限生成 A-代数, 则有:

(i) 集合 $U \coloneqq \{Q \in \operatorname{Spec} B \mid A \longrightarrow B \text{ 在点 } Q \text{ 处拟有限}\}$ 为 $\operatorname{Spec} B$ 的开子集.

(ii) 如果 U 为拟紧的, 则存在 B 的 A-子代数 C, 使得 C 为有限 A-模, 并且对任意 $Q \in U$, 可以找到 $s \in C$, 满足 $Q \in D(s)$ 以及 $C_s = B_s$.

证明 (i): 由命题 5.3.9 和有限扩张均为拟有限同态即得.

(ii): 令 $\tilde{A}$ 为 A 在 B 中的整闭包. 由命题 5.3.9 和 U 的拟紧性可以找到有限个 $s_1, \dots, s_n \in \tilde{A}$, 使得 $U = \bigcup_{i=1}^{n} D(s_i)$, 并且对每个 i, 均有 $B_{s_i} = \tilde{A}_{s_i}$. 由于 B_{s_i} 为有限生成 A-代数, 我们可以找到有限个非负整数 $N_{i1}, \dots, N_{im_i} \geq 0$, 以及有限个 $x_{i1}, \dots, x_{im_i} \in \tilde{A}$, 使得 $\tilde{A}_{s_i} = A[\frac{x_{i1}}{s_i^{N_{i1}}}, \dots, \frac{x_{im_i}}{s_i^{N_{im_i}}}]$. 令 C 为有限集

$$\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m_i\} \cup \{s_1, \dots, s_n\}$$

在 $\tilde{A}$ 中生成的 A-子代数. 则不难看到对每个 $1 \leq i \leq n$, 均有 $C_{s_i} = \tilde{A}_{s_i} = B_{s_i}$. 由于 C 为有限生成 A-代数, 且 $A \longrightarrow C$ 为整扩张, 从而 $A \longrightarrow C$ 也为有限扩张. □

注意在以下两种典型情形, U 均为拟紧的: B 为 Noether 环 (推论 1.5.1), 或者存在环 R, 使得有同胚 $U \simeq \operatorname{Spec} R$ (命题 1.2.4). 在域上的有限生成代数情形, 我们得到如下推论, 这是 Zariski 主定理的最初版本, 其几何意义是明显的.

定理 5.3.2 设 B 为整环, A 为 B 的子环, 且 A, B 均为域 k 上的有限生成代数, 使得 A 为整闭整环, 并且 $\mathrm{Frac}(A)=\mathrm{Frac}(B)$. 记 $f\colon Y=\operatorname{Spec}B\longrightarrow X=\operatorname{Spec}A$ 为包含同态 $A\hookrightarrow B$ 对应的素谱空间映射. 则对 X 的任意闭点 x, 如果 $x\in f(Y)$, 那么必有以下两种情形之一成立:

(i) 纤维 $f^{-1}(x)$ 的每个不可约分支的维数都大于或等于 1.

(ii) 存在 $g\in A$, 使得 $x\in D(g)$, 并且 $A_g=B_g$.

证明 记 $K=\mathrm{Frac}(A)=\mathrm{Frac}(B)$. 则有 $A\subset B\subset K$. 设 $x\in X$ 为闭点, 且 $x\in f(Y)$. 任取 $f^{-1}(x)$ 的闭点 y, 并设 $\dim_y Y/X=0$, 只需证明此时情形 (ii) 成立. 设 y 对应 B 的极大理想 Q. 由 $\dim_y Y/X=0$ 知 $A\hookrightarrow B$ 在 Q 处拟有限. 由定理 5.3.1, 可以找到 B 的 A-子代数 C 以及 $g\in C\setminus Q$, 使得 $A\hookrightarrow C$ 为有限扩张, 并且 $B_g=C_g$. 由于 $C\subset B\subset K$, 而且 A 为整闭整环, 故 $A=C$. 这说明 $g\in A$, 并且作为 K 的子环有 $A_g=B_g$. □

5.4 Hilbert–Samuel 多项式

环 A 称为**分次环**, 如果作为加法群有直和分解 $A=\bigoplus\limits_{n\geq 0}A_n$, 并且 $A_n\cdot A_m\subset A_{n+m},\quad \forall\, n,m\geq 0$. 设 $A=\bigoplus\limits_{n\geq 0}A_n$ 为分次环, 一个 A-模 M 称为**分次 A-模**, 如果作为加法群有直和分解 $M=\bigoplus\limits_{n\geq 0}M_n$, 并且 $A_n\cdot M_m\subset M_{n+m},\quad \forall\, n,m\geq 0$.

例 5.4.1 设 A_0 为环, 则多项式环 $A=A_0[x_1,\dots,x_n]$ 为分次环, 其中 A_m 为 m 次齐次多项式形成的加法子群.

设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 则 $\mathrm{gr}(A)\coloneqq\bigoplus\limits_{n\geq 0}m^n/m^{n+1}$ 为分次环, $\mathrm{gr}(M)\coloneqq\bigoplus\limits_{n\geq 0}m^nM/m^{n+1}M$ 为分次 $\mathrm{gr}(A)$-模, 并且每个 $m^nM/m^{n+1}M$ 均为有限维 k-线性空间. 我们希望考察函数 $n\mapsto\dim_k m^nM/m^{n+1}M$ 的形状. 下面的定理说明当 n 充分大时这是 n 的一个多项式.

定理 5.4.1 设 $A=\bigoplus\limits_{n\geq 0}A_n$ 为 Noether 分次环, $M=\bigoplus\limits_{n\geq 0}M_n$ 为分次 A-模, 且为有限 A-模. 设 A 作为 A_0-代数可以由 A_1 中的有限个元素 $x_1,\dots,x_s$ 生成, 并且每个 M_n 作为 A_0-模的长度 $\ell(M_n)$ 均有限. 则存在唯一的多项式 $f(t)\in\mathbb{Q}[t]$, 使得 $\deg f(t)\leq s-1$, 并且对充分大的 n 有 $f(n)=\ell(M_n)$, 其中当 $s=0$ 时 $f(t)=0$. 这个多项式 $f(t)$ 称为 M 的 **Hilbert 多项式**.

证明 对 s 归纳. 当 $s=0$ 时, $A=A_0$. 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 M 的生成元. 取 m 为正整数, 使得每个 e_i 均包含在 $\bigoplus\limits_{n=0}^{m}M_n$ 中. 则 $M_n=0,\ \forall\, n>m$. 这说明当 $n>m$ 时有 $\ell(M_n)=0$. 故 $f(t)$ 为零多项式.

设 $s \geq 1$. 考虑乘 x_1 的 A-模同态 $M \xrightarrow{x_1\cdot} M$, 其在每个分次部分上诱导了正合列:

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_1\cdot} M_{n+1} \longrightarrow \frac{M_{n+1}}{x_1 M_n} \longrightarrow 0. \tag{5.4–1}$$

令 $K \coloneqq \bigoplus_{n\geq 0} K_n$, $\overline{M} \coloneqq \bigoplus_{n\geq 0} \dfrac{M_n}{x_1 M_{n-1}}$, 其中 $M_{-1} \coloneqq 0$. 则 K 和 M 均为分次 $A/(x_1)$-模. 这里 $A/(x_1)$ 的分次环结构为 $A/(x_1) = \bigoplus_{n\geq 0} \dfrac{A_n}{xA_{n-1}}$, 其中 $A_{-1} = 0$. 由于作为 A-模, K 为 M 的子模, $\overline{M}$ 为 M 的商模, 从而 K 和 $\overline{M}$ 均为有限 A-模, 也为有限 $A/(x_1)$-模. 由于 $A/(x_1)$ 由 $s-1$ 个元素 $x_2, \ldots, x_s$ 生成, 根据归纳假设, 存在有理系数多项式 $g(t)$ 和 $h(t)$, 次数均不超过 $s-2$, 并且对充分大的 n 有 $g(n) = \ell(K_n)$, $h(n) = \ell(M_n/x_1 M_{n-1})$. 这样由正合列 (5.4–1) 得到对充分大的 n, $\ell(M_{n+1}) - \ell(M_n) = h(n+1) - g(n)$. 由此不难看到存在有理系数多项式 $f(t)$, 次数不超过 $s-1$, 使得对充分大的 n, 有 $f(n) = \ell(M_n)$. $f(t)$ 的唯一性是显然的. □

推论 5.4.1 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 则存在唯一的多项式 $F(t) \in \mathbb{Q}[t]$, 使得对充分大的 n 有 $F(n) = \ell(M/m^n M)$. 其中 $\ell(M/m^n M)$ 是指 $M/m^n M$ 作为 A-模的长度. 这个多项式 $F(t)$ 称为 M 的 **Hilbert–Samuel 多项式**.

证明 考虑分次环 $\mathrm{gr}(A)$ 上的分次模 $\mathrm{gr}(M)$. 设 $x_1, \ldots, x_s$ 为理想 m 的生成元, $e_1, \ldots, e_r$ 为 M 作为 A-模的生成元. 则 $x_1, \ldots, x_s \in m/m^2$ 也是 $\mathrm{gr}(A)$ 作为 k-代数的生成元, 而 $e_1, \ldots, e_r \in M/mM$ 是 $\mathrm{gr}(M)$ 作为 $\mathrm{gr}(A)$-模的生成元. 作为有限生成 k-代数, $\mathrm{gr}(A)$ 也是 Noether 环. 应用定理 5.4.1, 存在有理系数多项式 $f(t)$, 使得对充分大的 n 有 $f(n) = \dim_k(m^n M/m^{n+1}M)$. 再由 $\ell(M/m^n M) = \sum_{i=0}^{n-1} \dim_k(m^i M/m^{i+1}M)$ 即知多项式 $F(t)$ 的存在性. $F(t)$ 的唯一性是显然的. □

我们记 $d(M) \coloneqq \deg F(t)$ 为 M 的 Hilbert–Samuel 多项式 $F(t)$ 的次数.

命题 5.4.1 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 设 $x \in A$ 为 M-正则元. 则 $d(M/xM) \leq d(M) - 1$.

证明 记 $\overline{M} = M/xM$, 则对任意 $n \geq 1$, 有短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{xM + m^n M}{m^n M} \longrightarrow \frac{M}{m^n M} \longrightarrow \frac{\overline{M}}{m^n \overline{M}} \longrightarrow 0.$$

记 $F(t)$ 和 $\overline{F}(t)$ 分别为 M 和 $\overline{M}$ 的 Hilbert–Samuel 多项式, 令 $G(t) = F(t) - \overline{F}(t)$. 则对充分大的 n 有

$$G(n) = F(n) - \overline{F}(n) = \ell\Big(\frac{M}{m^n M}\Big) - \ell\Big(\frac{\overline{M}}{m^n \overline{M}}\Big) = \ell\Big(\frac{xM + m^n M}{m^n M}\Big) = \ell\Big(\frac{xM}{m^n M \bigcap xM}\Big).$$

由 Artin–Rees 引理, 存在 $c \geq 1$, 使得 $\forall\, n \geq c$, 均有 $m^n M \bigcap xM = m^{n-c}(m^c M \bigcap xM)$.

而

$$m^n(xM) \subset m^{n-c}(m^cM \bigcap xM) \subset m^{n-c}(xM).$$

故对充分大的 n, 有

$$\ell\left(\frac{xM}{m^{n-c}(xM)}\right) \leq G(n) = \ell\left(\frac{xM}{m^{n-c}(m^cM \bigcap xM)}\right) \leq \ell\left(\frac{xM}{m^n(xM)}\right).$$

由 x 为 M-正则元知对任意 n, $\dfrac{M}{m^nM} \simeq \dfrac{xM}{m^n(xM)}$. 从而对充分大的 n 有

$$F(n-c) \leq F(n) - \overline{F}(n) = G(n) \leq F(n).$$

由此知 $\deg \overline{F}(t) \leq \deg F(t) - 1$, 即 $d(M/xM) \leq d(M) - 1$. □

对于 Noether 局部环 A, 其作为 A-模的 Hilbert–Samuel 多项式的次数记为 $d(A)$. 回忆 $\delta(A)$ 为 A 的一组参数系包含的元素个数.

命题 5.4.2 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 则有 $d(A) \leq \delta(A)$.

证明 记 $r = \delta(A)$. 取 $x_1, \ldots, x_r \in m$ 为 A 的一组参数系. 由于对任意 $n \geq 1$, 自然同态 $A/(x_1, \ldots, x_r)^n \longrightarrow A/m^n$ 为满同态, 故

$$\ell(A/m^n) \leq \ell(A/(x_1, \ldots, x_r)^n).$$

由于对每个 $i \geq 0$, 如下 $\binom{i+r-1}{r-1}$ 个元素形成 A-模 $(x_1, \ldots, x_r)^i/(x_1, \ldots, x_r)^{i+1}$ 的一组生成元:

$$\left\{x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_r^{a_r} \mid a_1 + \cdots + a_r = i,\ a_1, \ldots, a_r \geq 0\right\},$$

从而 $\ell((x_1, \ldots, x_r)^i/(x_1, \ldots, x_r)^{i+1}) \leq \ell(A/(x_1, \ldots, x_r))\binom{i+r-1}{r-1}$. 这样得到

$$\ell\left(\frac{A}{(x_1, \ldots, x_r)^n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell\left(\frac{(x_1, \ldots, x_r)^i}{(x_1, \ldots, x_r)^{i+1}}\right) \leq \ell\left(\frac{A}{(x_1, \ldots, x_r)}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+r-1}{r-1}.$$

由此得到

$$\ell(A/m^n) \leq \ell\left(\frac{A}{(x_1, \ldots, x_r)}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+r-1}{r-1}.$$

不难看到上述不等式右边是关于 n 的 r 次多项式. 从而 $d(A) \leq r = \delta(A)$. □

命题 5.4.3 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 则 $d(A) \geq \dim A$.

证明 对 $d(A)$ 归纳. 当 $d(A) = 0$ 时, 对充分大的 n, $\ell(A/m^n)$ 为 n 的常值函数. 从而存在 n 使得 $m^n = m^{n+1}$. 由 Nakayama 引理知 $m^n = 0$. 故 $\dim A = 0$.

设 $d(A)\geq 1$. 任取 A 的极小素理想 P_0. 令 $\overline{A}=A/P_0$, $\overline{m}=m/P_0$. 则对任意 $n\geq 1$, 有满同态 $A/m^n\longrightarrow \overline{A}/\overline{m}^n$. 从而 $d(A)\geq d(\overline{A})$. 由于 $\dim A$ 为集合 $\{\dim \overline{A}\mid P_0为A的极小素理想\}$ 的上确界, 不难看到我们只需证明 $d(\overline{A})\geq \dim \overline{A}$. 由此, 下面不妨设 $A=\overline{A}$ 为整环.

如果 $\dim A=0$, 则显然 $d(A)\geq \dim A$. 下面设 $\dim A\geq 1$. 任取 A 的素理想链 $(0)=P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_r=m$, 并且 $r\geq 1$. 取 $0\neq x\in P_1$. 由 A 是整环知 x 为 A-正则元. 从而可以应用命题 5.4.1 得到 $d(A/(x))\leq d(A)-1$.

注意到 $A/(x)$ 分别看作 A-模和 $A/(x)$-模得到的 Hilbert–Samuel 多项式相同, 对环 $A/(x)$ 应用归纳假设可得 $d(A/(x))\geq \dim(A/(x))$. 由于 $P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_r$ 对应了 $A/(x)$ 中的一个长度为 $r-1$ 的素理想链, 可知 $\dim(A/(x))\geq r-1$. 由此得到 $r-1\leq d(A)-1$. 故 $r\leq d(A)$. 再由素理想链 $(0)=P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_r=m$ 的任意性即知 $\dim A\leq d(A)$. □

综合引理 5.1.1, 命题 5.4.2 以及 命题 5.4.3, 我们得到对于 Noether 局部环 A 的不等式:

$$\dim A\geq \delta(A)\geq d(A)\geq \dim A.$$

从而该不等式处处为等式. 这样得到如下关于 Noether 局部环维数的三种等价刻画.

定理 5.4.2 设 A 为 Noether 局部环, 则 $\dim A=\delta(A)=d(A)$.

注意这给出了定理 5.1.5 以及 Krull 主理想定理 5.1.4的另一个证明.

5.5 正则局部环初步

对于 Noether 局部环 (A,m,k), 我们称 k-线性空间 m/m^2 为 A 的余切空间. 由 Noether 性, 这是有限维线性空间. 再由 Nakayama 引理, 其维数等于 m 的极小生成元的个数.

命题 5.5.1 对于 Noether 局部环 (A,m,k), 有 $\dim A\leq \dim_k m/m^2$.

证明 由定理 5.1.5 和 A 的参数系包含的元素个数不超过 $\dim_k m/m^2$ 即得. □

定义 5.5.1 Noether 局部环 (A,m,k) 称为**正则局部环**, 如果 $\dim A=\dim_k m/m^2$.

由定义和 Nakayama 引理, 离散赋值环等价于一维正则局部环. 设 k 为代数封闭域, m 为 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的极大理想, 则局部化 $k[x_1,\dots,x_n]_m$ 为正则局部环. 这是因为由 Hilbert 零点定理, m 具有形式 $(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$, $a_i\in k$. 从而显式计算可以看到 $\dim_k m/m^2=n=\dim k[x_1,\dots,x_n]_m$. 事实上, 对任意域 k, 多项式环 $k[x_1,\dots,x_n]$ 在任意素理想处的局部化都是正则局部环 (推论 9.2.1, 命题 9.2.2).

命题 5.5.2 正则局部环均为整环.

证明 设 (A,m) 为正则局部环. 对 $\dim A$ 归纳. 当 $\dim A=0$ 时 $m=0$, 从而 A 为域, 也为整环. 设 $\dim A>0$. 由素避引理 3.2.1, 可取 $x\in m-m^2$, 使得 x 不在任何极小素理想中. 直接验证可知 $\dim A/(x)=\dim A-1$, $\dim_k \dfrac{\overline{m}}{\overline{m}^2}=\dim_k \dfrac{m}{m^2}-1$, 其中 $\overline{m}\coloneqq\dfrac{m}{(x)}$ 为 $A/(x)$ 的唯一极大理想. 这样由 A 为正则局部环知 $A/(x)$ 也为正则局部环. 由归纳假设, $A/(x)$ 为整环. 从而 (x) 为 A 的素理想. 设 P 为包含在 (x) 中的极小素理想. 对任意 $a\in P$, 由 $P\subset(x)$ 知存在 $b\in A$ 使得 $a=bx$. 再由 $x\notin P$ 知 $b\in P$. 这样得到 $P=xP$. 由 Nakayama 引理知 $P=0$. 故 A 为整环. □

注记 5.5.1 事实上, 正则局部环都是唯一因子分解整环 (定理 9.3.1).

命题 5.5.3 *设 (A,m,k) 为正则局部环, $I\subset m$ 为 A 的理想. 则 A/I 为正则局部环 $\iff$ I 存在一组生成元 $x_1,\dots,x_r$, 使得 $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_r$ 在余切空间 m/m^2 中是 k-线性无关的.*

证明 我们分析商环 A/I 的余切空间维数与 A 的余切空间维数之差. 记 A/I 的极大理想为 $\overline{m}$. 则有

$$\frac{\overline{m}}{\overline{m}^2}=\frac{m/I}{(m^2+I)/I}=\frac{m}{m^2+I}=\frac{m/m^2}{(I+m^2)/m^2}.$$

记 $r\coloneqq\dim_k\dfrac{I+m^2}{m^2}=\dim_k\dfrac{m}{m^2}-\dim_k\dfrac{\overline{m}}{\overline{m}^2}$ 为两个余切空间维数之差. 设 $x_1,\dots,x_r\in I$ 形成 $\dfrac{I+m^2}{m^2}$ 的一组 k-线性基. 令 $J=(x_1,\dots,x_r)\subset I$. 则同样的分析可知 A/J 的余切空间维数等于 A/I 的余切空间维数, 均为 $\dim_k m/m^2-r=\dim A-r$. 不断应用 Krull 主理想定理可知 $\dim A/J\geq\dim A-r$. 这样得到 $\dim A/J$ 大于等于 A/J 的余切空间维数, 而由命题 5.5.1, 反向不等式总是成立, 故 A/J 为正则局部环, 并且 $\dim A/J$ 等于 A/I 的余切空间维数.

$\Longrightarrow$: 如果 A/I 为正则局部环, 则通过比较余切空间维数得到 $\dim A/J=\dim A/I$, 再由 A/J 为整环和满同态 $A/J\longrightarrow A/I$ 知 $I=J=(x_1,\dots,x_r)$, 并且由 x_i 的取法知 $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_r$ 在余切空间 m/m^2 中是 k-线性无关的.

$\Longleftarrow$: 如果 I 由在 m/m^2 中 k-线性无关的元素生成, 则容易看到上述 $J=(x_1,\dots,x_r)$ 可取为 I. 从而 $A/I=A/J$ 为正则局部环. □

定义 5.5.2 *设 (A,m,k) 为正则局部环. m 的一组元素 $x_1,\dots,x_r$ 称为 A 的一个***正则参数系***, 如果 $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_r$ 为余切空间 m/m^2 的一组 k-线性空间基.*

由定义不难看到, 正则参数系都是参数系. 反之不一定成立, 例如在幂级数环 $k[\![x]\!]$ 中, x^2 为参数系, 但不是正则参数系.

习题

1. 设 A 为 Noether 环, 证明 A 的素理想降链一定在有限步稳定.

2. 设 k 为域, A 为 k-代数, 且 $\dim_k A = n$. 证明: $|\operatorname{Spec} A| \leq n$.

3. 设 $A \longrightarrow B$ 为有限扩张, 并且存在 $b_1, \ldots, b_n \in B$ 使得 $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$. 证明: $\forall\, P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在 P 处的纤维包含的点的个数不超过 n.

4. 设 k 为域, A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 k-代数同态, $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间映射. 设 $\dim Y \geq \dim X$, 并且存在 X 的闭点 x, 使得 $f^{-1}(x)$ 为非空的有限集. 证明 $f(Y)$ 在 X 中稠密, 并由此证明 φ 为单同态.

5. [Chevalley] 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为结构同态. 证明 $\varphi^*(\operatorname{Spec} B)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的可构造子集.

6. 设 k 为域, A, B 均为有限生成 k-代数. 设 B 为整环, A 为整闭整环. 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为单的 k-代数同态, $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间映射.

(i) 设 φ 为整扩张, 证明 f 为开映射.

(ii) 设存在非负整数 $d \geq 0$, 使得对 X 的任一闭点 x, 如果 $f^{-1}(x)$ 非空, 那么 $f^{-1}(x)$ 的每个不可约分支的维数都是 d. 证明 f 为开映射.

7. 设 k 为代数封闭域, A, B 均为有限生成 k-代数, 且均为整环. 设 $\varphi\colon A \hookrightarrow B$ 为单的 k-代数同态. 记 $f\colon Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ 为相应的素谱空间映射. 记 $K \coloneqq \operatorname{Frac}(A)$, $L \coloneqq \operatorname{Frac}(B)$, 则 φ 诱导域扩张 L/K.

(i) 如果对 X 的每个闭点 x, 纤维 $f^{-1}(x)$ 均为有限集, 证明 L/K 为有限扩张.

(ii) 如果 L/K 为有限扩张, 证明 $B \otimes_A K = L$.

(iii) 如果 L/K 为有限扩张, 证明存在 $0 \neq g \in A$, 使得 $A_g \hookrightarrow B_g$ 为有限扩张, A_g 为整闭整环, 并且 B_g 为 A_g 在 L 中的整闭包.

(iv) 如果 L/K 为有限可分扩张, 证明存在 X 的非空开子集 U, 使得对 U 中的任意闭点 x, 均有 $|f^{-1}(x)| = [L : K]$.

(v) 如果 L/K 为有限扩张, 证明存在 X 的非空开子集 U, 使得对 U 中的任意闭点 x, 均有 $|f^{-1}(x)| = [L : K]_s$. 其中 $[L : K]_s$ 是指 L/K 的可分次数 ([30, Definition 030L]).

(vi) 设 A 为整闭整环, 并且存在正整数 m, 使得对 X 的任意闭点 x, 均有 $|f^{-1}(x)| = m$. 证明 φ 为有限扩张.

8. 设 $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$. 记 $A = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$, $X = \operatorname{Spec} A$. 对每个 $m \geq 1$, 记 $X(\mathbb{F}_{p^m})$ 为 $f_1, \ldots, f_r$ 在 $\mathbb{F}_{p^m}^n$ 中的公共零点集.

(i) 证明存在集合的双射 $X(\mathbb{F}_{p^m}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_p}(A, \mathbb{F}_{p^m})$. 其中后者是指 A 到 $\mathbb{F}_{p^m}$ 的所有 $\mathbb{F}_p$-代数同态的全体.

(ii) 对 $m \geq 1$, 记 X_m 为 $\operatorname{Spec} A$ 中满足 $k(P) \simeq \mathbb{F}_{p^m}$ 的点 P 的全体. 证明

$$|X(\mathbb{F}_{p^m})| = \sum_{r \mid m} r\,|X_r|\,.$$

(iii) 设 $d = \dim X$. 证明存在正实数 $C > 0$, 使得对任意 $m \geq 1$, 均有 $|X(\mathbb{F}_{p^m})| \leq Cp^{md}$.

9. 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数, 并且 A 为整环. 证明: 集合 $\{P \in \operatorname{Spec} A \mid A_P \text{ 为整闭整环}\}$ 是 $\operatorname{Spec} A$ 的非空开子集.

10. 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环, $\widehat{A}$ 为其完备化. 证明:

(i) $\forall\, i\geq 0$, $\dim_k m^i/m^{i+1}=\dim_k m^i\widehat{A}/m^{i+1}\widehat{A}$.

(ii) A 为正则局部环 $\iff$ $\widehat{A}$ 为正则局部环.

11. 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环. 证明 A 为 n 维正则局部环 $\iff$ 分次 k-代数 $\mathrm{gr}(A)=\bigoplus\limits_{n\geq 0} m^n/m^{n+1}$ 同构于 n 元多项式代数 $k[x_1,\ldots,x_n]$.

12. 设 k 为域, (A,m) 为 Noether 局部环, 并且 A 为 k-代数. 设 $k\xrightarrow{\sim} A/m$ 为域的同构.

(i) 设 $\dim_k m/m^2=d$, 证明: 存在满的 k-代数同态 $k[\![x_1,\ldots,x_d]\!]\longrightarrow\widehat{A}$.

(ii) 证明: A 为正则局部环 $\iff$ 存在 k-代数同构 $\widehat{A}\simeq k[\![x_1,\ldots,x_d]\!]$, 其中 $d\geq 0$ 为非负整数.

习题提示

1. 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则 $\dim A_P < +\infty$.

2. 先证明 $\dim A = 0$, 再利用命题 1.4.7.

4. 利用推论 5.2.4 证明 $\dim \overline{f(Y)} = \dim Y$.

5. 利用推论 5.2.4, (ii) 进行 Noether 归纳.

6. (i): 利用第一章习题 15, (vii) 和下降定理 5.1.2.

(ii): 设 y 为 Y 的一个闭点, 记 $x = f(y)$. 基本想法是取一个 Y 的不可约闭子簇 W, 使得 W 与纤维 $f^{-1}(x)$ 在 y 处 "横截相交", 且 $\dim W = \dim X$. 这样 $W \longrightarrow X$ 在 y 处拟有限, 再应用 Zariski 主定理约化到 (i). 具体而言, 设 y 对应 B 的极大理想 Q, 而 x 对应 A 的极大理想 P. 由 $\dim(B/PB)_Q = d$, 可以取到 B 的 d 个元素 $b_1, \ldots, b_d$, 使得 $\dim(B/PB + (b_1, \ldots, b_d))_Q = 0$. 取 $B/(b_1, \ldots, b_d)$ 的一个极小素理想 Q_0, 使得 $Q_0 \subset Q$, 并令 $\overline{B} \coloneqq B/(b_1, \ldots . b_d) + Q_0$. 则 $\dim \overline{B} \geq \dim B - d = \dim A$, 并且 $A \longrightarrow \overline{B}$ 在 Q 处拟有限. 利用 Zariski 主定理, 不妨设 $A \longrightarrow \overline{B}$ 为有限扩张. 再由 $\dim \overline{B} \geq \dim A$ 以及 A, $\overline{B}$ 均为整环可知 $A \longrightarrow \overline{B}$ 为单同态. 从而利用 (i) 即得.

7. (i): 利用推论 5.2.4 证明 $\dim A = \dim B$, 从而 $\operatorname{trdeg}_k K = \operatorname{trdeg}_k L$.

(ii): 对 K-代数 $B \otimes_A K$ 应用 Noether 正规化定理.

(iii): 利用整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5 和引理 5.2.1.

(iv): 利用 L/K 为单扩张证明存在 $0 \neq g \in A$, 使得 $B_g = A_g[x]/(f(x))$, 其中 $f(x) \in A_g[x]$ 为首一多项式.

(v): 利用 (iii), (iv) 和域扩张的分解 $K \subset L_{sep} \subset L$, 得到整闭整环的有限扩张 $A_g \subset C \subset B_g$, 使得 $A_g \hookrightarrow C$ 为有限平展同态, 且 $\operatorname{Frac}(C) = L_{sep}$.

(vi): 设 $\tilde{A}$ 为 A 在 B 中的整闭包. 利用 (v), 第三章习题 16, 以及 Zariski 主定理 5.3.1, 证明 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} \tilde{A}$ 为双射, 进而再证明 $\tilde{A} = B$.

8. (iii): 对 $\mathbb{F}_p$-代数 A 应用 Noether 正规化定理.

9. 参考引理 5.2.1 的证明过程.

11. $\Longrightarrow$: 通过正则参数系构造满同态 $k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \bigoplus\limits_{n \geq 0} m^n/m^{n+1}$, 如果 ker 非零, 比较两边 Hilbert 多项式的次数. 见 [3, Theorem 11.22].

12. (ii). $\Longrightarrow$: 设 $d = \dim_k m/m^2$. 由 (i), 存在满同态 $k[\![x_1, \ldots, x_d]\!] \xrightarrow{\varphi} \widehat{A}$, 从而 $k[\![x_1, \ldots, x_d]\!]/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \widehat{A}$. 由 A 为正则局部环知 $\widehat{A}$ 也为正则局部环, 从而 $\widehat{A}$ 是整环, $\operatorname{Ker}\varphi$ 为素理想. 再由 $\dim k[\![x_1, \ldots, x_d]\!]/\operatorname{Ker}\varphi = \dim \widehat{A} = \dim A = d$ 即知 $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

第六章 同调工具

6.1 复形的同调群

本节中 A 总是指一个环, 复形总是指 A-模复形. 回忆一个 A-模同态形成的序列 $\cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \longrightarrow \cdots$ 称为一个复形, 如果对任意 n, 有 $d_n \circ d_{n+1} = 0$. 我们将该复形记作 $K_\bullet$, 并且在不引起歧义的情况下将 d_n 简记为 d. 定义 $K_\bullet$ 的第 n 阶同调群为 $H_n(K_\bullet) \coloneqq \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$.

我们将形如 $\cdots \longrightarrow K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \longrightarrow \cdots$ 的复形记为 $K^\bullet$, 并称 $H^n(K^\bullet) \coloneqq \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$ 为 $K^\bullet$ 的第 n 阶上同调群.

一个复形同态 $f\colon K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ 是指一族满足 $\forall\ n,\ d' \circ f_n = f_{n-1} \circ d$ 的 A-模同态 $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. 这等价于下面的图表交换

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & K_{n+1} & \xrightarrow{d} & K_n & \xrightarrow{d} & K_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & K'_{n+1} & \xrightarrow{d'} & K'_n & \xrightarrow{d'} & K'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

复形同态 $f\colon K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ 诱导了同调群的同态 $f_*\colon H_n(K_\bullet) \longrightarrow H_n(K'_\bullet),\ [x] \longmapsto [f_n(x)]$. 如果对每个 n, 均有 $H_n(K_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_n(K'_\bullet)$ 为同构, 则称 f 为**拟同构**.

定义 6.1.1 设 $f, g\colon K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ 为两个复形同态. 如果有一族 A-模同态 $h_n\colon K_n \longrightarrow K'_{n+1}$, 使得对任意 n, 有 $f_n - g_n = h_{n-1} \circ d + d' \circ h_n$, 则称 f 与 g **同伦**, 记为 $f \sim g$.

如果存在复形同态 $f\colon K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ 和 $g\colon K'_\bullet \longrightarrow K_\bullet$, 使得 $f \circ g \sim \mathrm{id}$ 以及 $g \circ f \sim \mathrm{id}$, 则称 $K_\bullet$ 和 $K'_\bullet$ **同伦等价**.

设 $K_\bullet$ 为复形, M 为 A-模. 记 $K_\bullet \otimes_A M$ 为如下复形

$$\cdots \longrightarrow K_n \otimes_A M \xrightarrow{d\otimes 1} K_{n-1} \otimes_A M \longrightarrow \cdots$$

记 $\mathrm{Hom}_A(K_\bullet, M)$ 为如下复形

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(K_n, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(K_{n+1}, M) \longrightarrow \cdots$$

用函子的语言, 我们可以说 $\cdot \otimes_A M$ 和 $\mathrm{Hom}_A(\cdot, M)$ 为复形范畴到自身的函子. 下面的命题说明同伦可以被这两个函子所保持.

命题 6.1.1 设 $K_\bullet$, $K'_\bullet$ 为复形, M 为 A-模.

(i) 如果 $f, g\colon K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ 为同伦的复形同态, 那么它们诱导的 $K_\bullet \otimes_A M$ 到 $K'_\bullet \otimes_A M$ 的复形同态是同伦的, 诱导的 $\mathrm{Hom}_A(K'_\bullet, M)$ 到 $\mathrm{Hom}_A(K_\bullet, M)$ 的复形同态也是同伦的.

(ii) 如果 $K_\bullet$ 和 $K'_\bullet$ 同伦等价, 那么 $K_\bullet \otimes_A M$ 和 $K'_\bullet \otimes_A M$ 同伦等价, 并且 $\mathrm{Hom}_A(K_\bullet, M)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(K'_\bullet, M)$ 也同伦等价.

证明 (i): 设 $h_n\colon K_n \longrightarrow K'_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$ 给出了 f 与 g 的同伦. 容易验证 $h_n \otimes 1\colon K_n \otimes_A M \longrightarrow K'_{n+1} \otimes_A M$ $(n \in \mathbb{Z})$ 给出了 $f \otimes 1$ 和 $g \otimes 1$ 的同伦. 同样的推理可知 f 和 g 诱导的 $\mathrm{Hom}_A(K'_\bullet, M)$ 到 $\mathrm{Hom}_A(K_\bullet, M)$ 的复形同态也是同伦的.

(ii): 由 (i) 即得. □

下面的命题说明同伦的复形同态会诱导相同的同调群同态, 从而如果只关心同调群, 那么可以将复形同态自由地替换为与之同伦的同态. 这样的自由度是我们在这里引入同伦的主要目的.

命题 6.1.2 设 $M_\bullet$, $N_\bullet$ 为复形.

(i) 若 $f, g\colon M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ 为同伦的复形同态, 则 $\forall\, n$, 有 $f_* = g_*\colon H_n(M_\bullet) \longrightarrow H_n(N_\bullet)$.

(ii) 若 $M_\bullet$ 和 $N_\bullet$ 同伦等价, 则 $\forall\, n$, 有 $H_n(M_\bullet) \simeq H_n(N_\bullet)$.

证明 (i) 直接验证即得. (ii) 由 (i) 得到. □

设 $f\colon M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ 和 $g\colon N_\bullet \longrightarrow K_\bullet$ 均为复形同态. 如果对任意 n, $0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} N_n \xrightarrow{g_n} K_n \longrightarrow 0$ 均为 A-模的短正合列, 则我们称 $M_\bullet \xrightarrow{f} N_\bullet \xrightarrow{g} K_\bullet$ 为**复形的短正合列**, .

命题 6.1.3 (复形短正合列诱导同调群长正合列) 设 $M_\bullet \xrightarrow{f} N_\bullet \xrightarrow{g} K_\bullet$ 为复形的短正合列, 则对任意 n, 存在同态 $\delta_n\colon H_n(K_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(M_\bullet)$, 使得有如下长正合列:

$$\cdots \longrightarrow H_n(M_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_n(N_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(M_\bullet) \xrightarrow{f_*} \cdots .$$

证明 设 $[x]\in H_n(K_\bullet)$, 其中 $x\in\mathrm{Ker}(K_n\longrightarrow K_{n-1})$. 由 $N_n\xrightarrow{g_n}K_n$ 为满同态, 可找到 $y\in N_n$, 使得 $g_n(y)=x$. 由图表的交换性可知 $d(y)\in N_{n-1}$ 满足 $g_{n-1}(d(y))=0$, 故由短正合列 $0\longrightarrow M_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}N_{n-1}\xrightarrow{g_{n-1}}K_{n-1}\longrightarrow 0$ 可找到 $z\in M_{n-1}$, 使得 $f_{n-1}(z)=d(y)$. 再由图表的交换性可得 $z\in\mathrm{Ker}(M_{n-1}\longrightarrow M_{n-2})$. 直接验证可以看到 $[z]\in H_{n-1}(M_\bullet)$ 不依赖于 y,z 的选取. 从而得到良好定义的映射 $\delta_n\colon H_n(K_\bullet)\longrightarrow H_{n-1}(M_\bullet)$. 不难看到这是一个 A-模同态. 所得同调群序列的正合性直接验证即得. □

6.2 标准单形与 Čech 复形

设 I 为非空集合. 对 $m\geq 0$, 令 $C_m(\Delta_I)$ 为符号集合 $\{<i_0i_1\dots i_m>\,|(i_0,\dots,i_m)\in I^{m+1}\}$ 作为基生成的自由 Abel 群, 即

$$C_m(\Delta_I)\coloneqq\bigoplus_{(i_0,\dots,i_m)\in I^{m+1}}\mathbb{Z}<i_0i_1\dots i_m>.$$

令 $C_{-1}(\Delta_I)=\mathbb{Z}$. 对 $m<-1$, 令 $C_m(\Delta_I)=0$. 定义如下边缘同态 $\partial_\bullet$

$$\begin{aligned}C_m(\Delta_I)&\xrightarrow{\partial_m}C_{m-1}(\Delta_I)\\ <i_0\dots i_m>&\longmapsto\sum_{j=0}^{m}(-1)^j<i_0\dots\hat{i}_j\dots i_m>\\ C_0(\Delta_I)&\xrightarrow{\partial_0}C_{-1}(\Delta_I)\\ <i_0>&\longmapsto 1\end{aligned}$$

容易验证 $\forall\, m\in\mathbb{Z},\ \partial_{m-1}\circ\partial_m=0$, 从而 $(C_\bullet(\Delta_I),\partial_\bullet)$ 成为复形, 称为以 I 为顶点的**增广标准单形**.

定理 6.2.1 增广标准单形 $(C_\bullet(\Delta_I),\partial_\bullet)$ 处处正合, 即 $H_m(C_\bullet(\Delta_I))=0,\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$.

证明 我们构造 $C_\bullet(\Delta_I)$ 到自身的恒等同态 id 和零同态的一个同伦 h. 固定一个 $i\in I$. 令 $h_{-1}\colon C_{-1}(\Delta_I)=\mathbb{Z}\longrightarrow C_0(\Delta_I)$ 由 $1\mapsto<i>$ 确定. 对 $m\geq 0$, 令 $h_m\colon C_m(\Delta_I)\longrightarrow C_{m+1}(\Delta_I)$ 由 $h_m(<i_0\dots i_m>)=<i\ i_0\dots i_m>$ 确定. 容易验证, h_m 给出了 id 和 0 的同伦, 即对任意 m, 有 $\mathrm{id}=h_{m-1}\circ\partial_m+\partial_{m+1}\circ h_m$. 由此得到 $H_m(C_\bullet(\Delta_I))=0,\forall\, m\in\mathbb{Z}$. □

上面定理证明中的同伦 h 称为**锥构造**, 其不仅证明了零调性, 实际上构造了 $C_\bullet(\Delta_I)$ 上恒等同态 id 与零同态的同伦. 这是一个比零调性更强的结论. 对于从 $C_\bullet(\Delta_I)$ 衍生出来的复形, 如果要分析其零调性, 我们经常可以让同伦映射 h 相应地诱导衍生复形上恒等同态与零同态的一个同伦. 这从下面的例子中可以看到.

命题 6.2.1 设 M 为 $\mathbb{Z}$-模 (Abel 群), 则复形 $C^\bullet(\Delta_I; M) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet(\Delta_I), M)$ 是处处正合的.

证明 同态 $h_m \colon C_m(\Delta_I) \longrightarrow C_{m+1}(\Delta_I)$ 诱导了

$$h^{m+1} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{m+1}(\Delta_I), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_m(\Delta_I), M).$$

容易验证 $h^m (m \geq -1)$ 给出了 id 和零同态的同伦. 从而 $C^\bullet(\Delta_I; M)$ 是零调的. □

另一个从标准单形衍生出的复形为预层的增广 Čech 复形. 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为开集基, 满足 $X \in \mathcal{B}$, 并且 $\mathcal{B}$ 中任意两个开集的交均在 $\mathcal{B}$ 中. 设 $\mathcal{F}$ 为 X 上的 $\mathcal{B}$-预层. 设 $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ 为 X 的一个开覆盖, 并且 $U_i \in \mathcal{B}$, $\forall\, i \in I$. 对每个 $n \geq 0$, 定义 Abel 群 $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \coloneqq \prod_{(i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_n})$. 其中 $U_{i_0 \dots i_n} \coloneqq U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. 令 $C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \coloneqq \mathcal{F}(X)$. 对 $n \geq 0$, 定义群同态

$$\delta^n \colon C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{6.2–1}$$

$$s = (s_{i_0 \dots i_n}) \longmapsto \delta^n(s) \tag{6.2–2}$$

其中 $\delta^n(s)$ 的 $(i_0 \dots i_{n+1})$ 分量为

$$\delta^n(s)_{i_0 \dots i_{n+1}} \coloneqq \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s_{i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_{n+1}} \mid_{U_{i_0 \cdots i_{n+1}}},$$

而 $\widehat{i_j}$ 是指将指标 i_j 删除. 另外定义群同态

$$\delta^{-1} \colon C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{6.2–3}$$

$$s \longmapsto (s \mid_{U_i})_{i \in I} \tag{6.2–4}$$

不难验证, 对 $n \geq -1$, 有 $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. 从而 $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta^\bullet)$ 形成一个复形, 称为 $\mathcal{F}$ 在开覆盖 $\mathcal{U}$ 下的**增广 Čech 复形**, 其上同调群 $H^n(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \coloneqq \mathrm{Ker}\, \delta^n / \mathrm{Im}\, \delta^{n-1}$ 记为 $H^n(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. 直观上看, $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 可以看做从增广标准单形 $C_\bullet(\Delta_I)$ 到 $\mathcal{F}$ 的 "同态" 形成的复形, 即有形式上的等式 "$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(C_\bullet(\Delta_I), \mathcal{F})$". 我们自然希望模仿命题 6.2.1 的证明, 得到增广 Čech 复形的零调性. 实际上, 增广 Čech 复形并不总是零调的. 其零调性需要一些额外的条件.

命题 6.2.2 设开覆盖 $\mathcal{U}$ 满足 $X \in \mathcal{U}$, 则增广 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 是零调的. 即 $H^n(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

证明 设 $\mathcal{U}=\{U_j \mid j\in I\}$. 取 $i\in I$, 使得 $U_i=X$. 对 $n\geq 0$, 我们定义如下同态:

$$\begin{aligned} h^{n+1}\colon C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) &\longrightarrow C^n(\mathcal{U},\mathcal{F})\\ s=(s_{i_0\dots i_{n+1}}) &\longmapsto h^{n+1}(s)\end{aligned}$$

其中 $h^{n+1}(s)$ 的 $(i_0\dots i_n)$ 分量为 $h^{n+1}(s)_{i_0\dots i_n}\coloneqq s_{ii_0\dots i_{n+1}}\in\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$. 注意 $s_{ii_0\dots i_{n+1}}$ 虽然是 $\mathcal{F}(U_{ii_0\dots i_n})$ 中的元素, 但是因为 $U_{ii_0\dots i_n}=U_i\cap U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_n}=X\cap U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_n}=U_{i_0\dots i_n}$, 我们将 $s_{ii_0\dots i_n}$ 自然看作 $\mathcal{F}(U_{i_0\dots i_n})$ 中的元素.

再定义同态 $h^0\colon C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\longrightarrow C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $s=(s_{i_0})\longmapsto s_i$. 通过直接验证可以看到 $h^\bullet$ 给出了 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 上恒等同态与零同态的一个同伦. 从而得到增广 Čech 复形的零调性. □

对于素谱空间上由模给出的预层, 我们有如下推论.

命题 6.2.3 设 A 为环, M 为 A-模. 设 $\operatorname{Spec}A=\cup_{i=1}^n D(f_i)$ 为主开集形成的有限开覆盖, 记为 $\mathcal{U}$. 则 $H^m(\mathcal{U},\widetilde{M})=0,\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$.

证明 注意到 $C^\bullet(\mathcal{U},\widetilde{M})$ 是 A-模复形, 由局部化保持正合性, 只需验证 $\forall\, P\in\operatorname{Spec}A$, 有 $C^\bullet(\mathcal{U},\widetilde{M})_P$ 处处正合. 由于 $\operatorname{Spec}A=\cup_{i=1}^n D(f_i)$, 又只需验证 $\forall\, i=1,\dots,n$, 在 f_i 处的局部化 $C^\bullet(\mathcal{U},\widetilde{M})_{f_i}$ 处处正合.

考虑 $\mathcal{U}$ 在 $D(f_i)$ 上的限制形成的开覆盖 $\mathcal{U}\mid_{D(f_i)}=\{D(f_i)\cap D(f_j)\mid j\in I\}$. 则 $C^\bullet(\mathcal{U},\widetilde{M})_{f_i}$ 恰为子空间 $D(f_i)\simeq\operatorname{Spec}A_{f_i}$ 上的增广 Čech 复形 $C^\bullet(\mathcal{U}\mid_{D(f_i)},\widetilde{M_{f_i}})$. 由于 $\mathcal{U}\mid_{D(f_i)}$ 满足命题 6.2.2 的条件, 从而利用该命题得到 $C^\bullet(\mathcal{U},\widetilde{M})_{f_i}$ 处处正合. 故原命题得证. □

注记 6.2.1 对于拓扑空间 X 上的 $\mathcal{B}$-预层 $\mathcal{F}$, 不难看到, $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathcal{B}$-层 $\iff$ 对 $\mathcal{B}$ 的任何元素 U, 对 U 的任何由 $\mathcal{B}$ 中元素形成的开覆盖 $\mathcal{V}$, 均有 $H^{-1}(\mathcal{V},\mathcal{F})=H^0(\mathcal{V},\mathcal{F})=0$. 如果 $\mathcal{B}$ 中每个元素都是拟紧空间, 则上述开覆盖 $\mathcal{V}$ 可以只取为有限开覆盖. 由此, 作为命题 6.2.3 的推论, 我们得到命题 2.5.1 的另一个证明. 而命题 1.4.4 又可看作命题 2.5.1 在 $M=A$ 时的特殊情况.

在实际应用中标准单形 $C_\bullet(\Delta_I)$ 还有一些变体, 我们给出其定义并分析和 $C_\bullet(\Delta_I)$ 的关系. 对 $m\geq 0$, 令 $R_m(\Delta_I)$ 为 $C_m(\Delta_I)$ 中由

$$\{<i_{\sigma(0)}\dots i_{\sigma(m)}>-\operatorname{sgn}(\sigma)\ <i_0\dots i_m>\mid(i_0,\dots,i_m)\in I^{m+1},\ \sigma\in S_{m+1}\}$$

中元素生成的子群. 这里 S_{m+1} 理解为 $\{0,1,\dots,m\}$ 到自身的双射形成的群. 定义 $C'_m(\Delta_I)$ 为商群 $C_m(\Delta_I)/R_m(\Delta_I)$. 令 $C'_{-1}(\Delta_I)\coloneqq C_{-1}(\Delta_I)=\mathbb{Z}$. 容易看到 $C_\bullet(\Delta_I)$ 上的边缘算子 $\partial_\bullet$ 诱导了 $C'_\bullet(\Delta_I)$ 上的边缘算子, 使其成为一个复形. 并且有自然的复形同态 $C_\bullet(\Delta_I)\xrightarrow{\pi}C'_\bullet(\Delta_I)$, 使得每个 $\pi_m\colon C_m(\Delta_I)\longrightarrow C'_m(\Delta_I)$ 为商同态.

固定 I 上的一个全序. 对 $m\geq 0$, 令 $C''_m(\Delta_I)$ 为 $\{<i_0\dots i_m>\mid(i_0,\dots,i_m)\in$

$I^{m+1},\ i_0 < i_1 \cdots < i_m\}$ 生成的 $C_m(\Delta_I)$ 的子群. 令 $C''_{-1}(\Delta_I) \coloneqq C_{-1}(\Delta_I) = \mathbb{Z}$. 容易看到 $C''_\bullet(\Delta_I)$ 为 $C_\bullet(\Delta_I)$ 的子复形.

命题 6.2.4 固定非空顶点集 I 上的一个全序. 则有:

(i) 复形 $C'_\bullet(\Delta_I)$ 与 $C''_\bullet(\Delta_I)$ 同构.
(ii) 复形 $C_\bullet(\Delta_I)$ 与 $C'_\bullet(\Delta_I)$ 同伦等价.

证明 (i): 自然的包含同态 $C''_\bullet(\Delta_I) \longrightarrow C_\bullet(\Delta_I)$ 和自然的商同态 $\pi\colon C_\bullet(\Delta_I) \xrightarrow{\pi} C'_\bullet(\Delta_I)$ 的复合给出了复形的同构: $C''_\bullet(\Delta_I) \xrightarrow{\sim} C'_\bullet(\Delta_I)$.

(ii): 记 (i) 中的同构 $C'_\bullet(\Delta_I) \xrightarrow{\sim} C''_\bullet(\Delta_I)$ 和自然的包含同态 $C''_\bullet(\Delta_I) \longrightarrow C_\bullet(\Delta_I)$ 的复合给出的复形同态为 $i\colon C'_\bullet(\Delta_I) \longrightarrow C_\bullet(\Delta_I)$. 我们验证 i 和 π 给出同伦等价. 首先容易看到 $\pi \circ i = \mathrm{id}$. 下面只需验证 $i \circ \pi \sim \mathrm{id}$. 令 $\alpha_m \coloneqq i_m \circ \pi_m - \mathrm{id}$. 我们希望构造如下同伦 h_m.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & C_2(\Delta_I) & \xrightarrow{\partial} & C_1(\Delta_I) & \xrightarrow{\partial} & C_0(\Delta_I) & \xrightarrow{\partial} & C_{-1}(\Delta_I) & \longrightarrow & 0 \\
 & \swarrow^{h_2} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & \swarrow^{h_1} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & \swarrow^{h_0} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & \swarrow^{h_{-1}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial} & C_2(\Delta_I) & \xrightarrow{\partial} & C_1(\Delta_I) & \xrightarrow{\partial} & C_0(\Delta_I) & \xrightarrow{\partial} & C_{-1}(\Delta_I) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

首先注意到 $\alpha_{-1} = 0,\ \alpha_0 = 0$. 故可以令 $h_{-1} = 0,\ h_0 = 0$. 对 $i_0, i_1 \in I$, 可以看到 $(\alpha_1 - h_0 \circ \partial)(< i_0\ i_1 >) \in C_1(\Delta_{\{i_0,i_1\}}) \cap \mathrm{Ker}\,\partial$. 由于 $\{i_0, i_1\}$ 为顶点集的增广标准单形 $C_\bullet(\Delta_{\{i_0,i_1\}})$ 各阶同调群均为 0, 可以找到 $b \in C_2(\Delta_{\{i_0,i_1\}})$ 使得 $\partial\, b = (\alpha_1 - h_0 \circ \partial)(< i_0\ i_1 >)$. 令 $h_1(< i_0\ i_1 >) = b$. 这样给出了同态 $h_1\colon C_1(\Delta_I) \longrightarrow C_2(\Delta_I)$. 继续上面的构造过程, 不难通过归纳对每个 m 给出同态 $h_m\colon C_m(\Delta_I) \longrightarrow C_{m+1}(\Delta_I)$, 使得 $\alpha_m = h_{m-1} \circ \partial + \partial \circ h_m$. 从而 $h_m (m \geq -1)$ 给出了 $i \circ \pi$ 和 id 的同伦. □

注记 6.2.2 注意到在命题 6.2.4 证明中构造的同伦 h_m 还满足: 对任意 $i_0, \ldots, i_m \in I$, $h_m(< i_0 \ldots i_m >) \in C_{m+1}(\Delta_{\{i_0,\ldots,i_m\}})$. 这个额外的性质在证明由 $C_\bullet(\Delta_I)$ 和 $C'_\bullet(\Delta_I)$ 衍生出的一些复形同伦等价时会用得上 (如本章习题 3).

6.3 投射消解

设 A 为环. 一个 A-模的短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 称为**分裂的**, 如果其作为复形与 "标准" 短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_3 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 同构, 即有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{i} & M_1 \oplus M_3 & \xrightarrow{\pi} & M_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 i 为嵌入同态 $x \mapsto (x, 0)$, 而 π 为投影同态 $(x, y) \mapsto y$.

命题 6.3.1 设 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模短正合列. 则以下几条互相等价:

(i) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0$ 是分裂的.

(ii) 存在 A-模同态 $\psi_2 \colon M_3 \longrightarrow M_2$, 使得 $\varphi_2 \circ \psi_2 = \mathrm{id}$.

(iii) 存在 A-模同态 $\psi_1 \colon M_2 \longrightarrow M_1$, 使得 $\psi_1 \circ \varphi_1 = \mathrm{id}$.

证明 由分裂的定义即知 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 和 (i) $\Longrightarrow$ (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): φ_1 和 ψ_2 给出同态 $\varphi_1 + \psi_2 \colon M_1 \oplus M_3 \longrightarrow M_2$, $(x_1, x_3) \longmapsto \varphi_1(x_1) + \psi_2(x_3)$. 并且有交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_1 \oplus M_3 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1+\psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由命题 2.3.1 知 $\varphi_1 + \psi_2$ 为同构. 故 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 分裂.

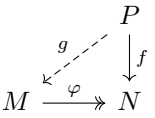
(iii) $\Longrightarrow$ (i): ψ_1 和 φ_2 给出同态 $(\psi_1, \varphi_2) \colon M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_3$, $x \longmapsto (\psi_1(x), \varphi_2(x))$. 并且有交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (\psi_1,\varphi_2)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_1 \oplus M_3 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由命题 2.3.1 知 (ψ_1, φ_2) 为同构. 故 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 是分裂的. □

定义 6.3.1 一个 A-模 P 称为**投射模**, 如果其满足如下性质: 对任意 A-模的满同态 $\varphi \colon M \longrightarrow N$, 对任意 $f \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$, 均存在 $g \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$, 使得 $f = \varphi \circ g$. 用

图表表示为:



利用自由模的万有性质, 不难看到自由模都是投射模. 下面的性质说明了投射模和自由模的紧密联系.

命题 6.3.2 设 M 为 A-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 为投射模.

(ii) 函子 $\mathrm{Hom}_A(M,\bullet)$ 是正合的, 即对任意 A-模短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$, 均有 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M_3) \longrightarrow 0$ 为短正合列.

(iii) 对任意 A-模 M_1, M_2, 任意形如 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M \longrightarrow 0$ 的 A-模短正合列都是分裂的.

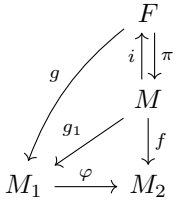
(iv) 存在 A-模 N 以及自由 A-模 F, 使得 $F \simeq M \oplus N$. 即 M 为 F 的一个直和项 (direct summand).

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由投射模的定义以及 $\mathrm{Hom}_A(M,\bullet)$ 的左正合性即得.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 由 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M) \longrightarrow 0$ 为短正合列, 可以找到 $\psi_2 \colon M \longrightarrow M_2$, 使得 $\varphi_2 \circ \psi_2 = \mathrm{id}$. 再由命题 6.3.1 即知 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 分裂.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): 利用 M 的一组生成元, 可以构造一个满同态 $\varphi \colon F \longrightarrow M$, 使得 F 为自由 A-模. 令 $K \coloneqq \mathrm{Ker}\,\varphi$, 则有短正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$. 从而由 (iii) 知 $F \simeq K \oplus M$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): 不妨设 $F = M \oplus N$ 为自由模. 记 $i \colon M \longrightarrow F,\ x \longmapsto (x,0)$ 为嵌入同态. 记 $\pi \colon F \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x$ 为投影同态. 则有 $\pi \circ i = \mathrm{id}$. 设 $\varphi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ 为 A-模满同态, $f \in \mathrm{Hom}_A(M,M_2)$. 则 $f \circ \pi \in \mathrm{Hom}_A(F,M_2)$. 由于自由模 F 为投射模, 可以找到 $g \in \mathrm{Hom}_A(F,M_1)$, 使得 $f \circ \pi = \varphi \circ g$. 令 $g_1 \coloneqq g \circ i \in \mathrm{Hom}_A(M,M_1)$. 则有 $f = f \circ \pi \circ i = \varphi \circ g \circ i = \varphi \circ g_1$. 这就证明了 M 为投射模. 用图表表示如下:



□

由于投射模和自由模的联系, 很多对自由模成立的性质对投射模来说也是成立的, 如下面的命题.

命题 6.3.3 设 A 为环, P 为投射 A-模, 则 $\cdot \otimes_A P$ 为正合函子, 即对任意 A-模的短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$, 均有 $0 \longrightarrow M_1 \otimes_A P \longrightarrow M_2 \otimes_A P \longrightarrow M_3 \otimes_A P \longrightarrow 0$ 也为正合列.

证明 由 P 为投射模知存在 A-模 Q, 使得 $F \coloneqq P \oplus Q$ 为自由模. 故 $0 \longrightarrow F \otimes_A M_1 \longrightarrow F \otimes_A M_2 \longrightarrow F \otimes_A M_3 \longrightarrow 0$ 为短正合列. 由于 $F \otimes_A M_i \simeq (P \otimes_A M_i) \oplus (Q \otimes_A M_i)$, $i = 1, 2, 3$, 可以看到 $0 \longrightarrow P \otimes_A M_1 \longrightarrow P \otimes_A M_2 \longrightarrow P \otimes_A M_3 \longrightarrow 0$ 也为短正合列.□

定义 6.3.2 设 A 为环, M 为 A-模. M 的一个**投射消解**是指如下的一个满足每个 $P_n (n \geq 0)$ 均为投射模, 并且处处正合的 A-模复形:

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

该投射消解也记为 $P_\bullet \longrightarrow M$.

命题 6.3.4 设 M 为 A-模. 则 M 必存在投射消解.

证明 通过取 M 的一组生成元, 我们可以构造一个满同态 $\varphi_0 \colon F_0 \longrightarrow M$, 使得 F_0 为自由模. 记 $K_0 \coloneqq \operatorname{Ker} \varphi_0$, 则有短正合列 $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. 对 A-模 K_0, 同样可以构造一个满同态 $\varphi_1 \colon F_1 \longrightarrow K_0$, 使得 F_1 为自由模. 记 $K_1 \coloneqq \operatorname{Ker} \varphi_1$, 则有短正合列 $0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$. 继续操作, 得到一系列首尾相接的短正合列:

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow K_0 &\longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow K_1 &\longrightarrow F_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0 \\
&\vdots \\
0 \longrightarrow K_n &\longrightarrow F_n \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow K_{n+1} &\longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow K_n \longrightarrow 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

不难看到由此拼接得到的 $\cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是正合列. 由于每个 F_n 均为自由模, 也是投射模, 从而这是 M 的一个投射消解. □

对给定的 M, 其投射消解显然不是唯一的, 下面说明在同伦等价意义下投射消解具有唯一性.

命题 6.3.5 设 $P_\bullet \longrightarrow M_1$ 和 $Q_\bullet \longrightarrow M_2$ 分别是 A-模 M_1 和 M_2 的投射消解. 设 $f_{-1} \colon M_1 \longrightarrow M_2$ 为 A-模同态. 则有:

(i) 存在复形同态 $f\colon P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$, 使得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} P_\bullet & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_{-1}} \\ Q_\bullet & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

(ii) 设 $f, g\colon P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ 均为满足 (i) 中条件的复形同态, 则 f 与 g 同伦.

证明 记 $K_0 \coloneqq \mathrm{Ker}(P_0 \longrightarrow M_1)$. 对 $n \geq 1$, 记 $K_n \coloneqq \mathrm{Ker}(P_n \longrightarrow P_{n-1})$. 则由 $P_\bullet \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$ 为正合列得到以下首尾相接的一系列短正合列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow & P_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow & P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0 \\ & \vdots \\ 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow & P_n \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow & P_{n+1} \longrightarrow K_n \longrightarrow 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

同样的, 记 $K'_0 \coloneqq \mathrm{Ker}(Q_0 \longrightarrow M_2)$. 对 $n \geq 1$, 记 $K'_n \coloneqq \mathrm{Ker}(Q_n \longrightarrow Q_{n-1})$. 则由 $Q_\bullet \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ 为正合列得到以下首尾相接的一系列短正合列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow K'_0 \longrightarrow & Q_0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow K'_1 \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow K'_0 \longrightarrow 0 \\ & \vdots \\ 0 \longrightarrow K'_n \longrightarrow & Q_n \longrightarrow K'_{n-1} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow K'_{n+1} \longrightarrow & Q_{n+1} \longrightarrow K'_n \longrightarrow 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

(i): 由 P_0 为投射模, $Q_0 \longrightarrow M_2$ 为满同态, 可以找到同态 $f_0\colon P_0 \longrightarrow Q_0$, 使得如下图表交换

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_{-1}} \\ Q_0 & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

不难看到 $f_0(K_0)\subset K_0'$, 从而有如下交换图表

$$\begin{array}{ccccc} K_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f_0|_{K_0}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_{-1}} \\ K_0' & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

对 $n\geq 0$ 进行归纳, 假设已经构造了同态 $f_n\colon P_n\longrightarrow Q_n$, 使得 $f_n\mid_{K_n}\subset K_n'$. 利用 P_{n+1} 是投射模以及 $Q_{n+1}\longrightarrow K_n'$ 是满同态, 可以找到同态 $f_{n+1}\colon P_{n+1}\longrightarrow Q_{n+1}$, 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & \longrightarrow & K_n \\ \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n|_{K_n}} \\ Q_{n+1} & \longrightarrow & K_n' \end{array}$$

由图表的交换性即知 $f_{n+1}(K_{n+1})\subset K_{n+1}'$. 这样归纳地构造出的同态 f_n $(n\geq 0)$ 即给出一个满足条件的复形同态 f.

(ii): 对 $n\geq 0$, 令 $\alpha_n\coloneqq f_n-g_n$, 则有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{d} & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 & \longrightarrow & M_1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \cdots & \longrightarrow & Q_n & \xrightarrow{d'} & \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{d'} & Q_0 & \longrightarrow & M_2 \end{array}$$

由图表的交换性知 $\alpha_0(P_0)\subset \operatorname{Ker}(Q_0\longrightarrow M_2)=K_0'$, 故同态 α_0 通过同态 $\alpha_0'\colon P_0\longrightarrow K_0'$ 分解得到, 即有交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P_0 \\ & & & \swarrow{\scriptstyle \alpha_0'} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} \\ 0 & \longrightarrow & {K_0}' & \longrightarrow & Q_0 \end{array}$$

由 P_0 为投射模, $Q_1\longrightarrow K_0'$ 为满同态, 知 α_0' 又可以提升为同态 $h_0\colon P_0\longrightarrow Q_1$, 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P_0 \\ & & \swarrow{\scriptstyle h_0} & \swarrow{\scriptstyle \alpha_0'} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} \\ Q_1 & \longrightarrow & K_0' & \longrightarrow & Q_0 \end{array}$$

假设对 $n\geq 0$, 已经构造了同态 $h_i\colon P_i\longrightarrow Q_{i+1}(0\leq i\leq n)$, 使得 $\alpha_n=h_{n-1}\circ d+d'\circ h_n$. 下面构造 $h_{n+1}\colon P_{n+1}\longrightarrow Q_{n+1}$, 满足 $\alpha_{n+1}=h_n\circ d+d'\circ h_{n+1}$. 为此, 记 $\delta_{n+1}\coloneqq \alpha_{n+1}-h_n\circ d\colon P_{n+1}\longrightarrow Q_{n+1}$. 则由 $\alpha_n=h_{n-1}\circ d+d'\circ h_n$ 和图表的交换性可知 $d'\circ\delta_{n+1}=0\colon P_{n+1}\longrightarrow Q_n$. 从而 $\operatorname{Im}\delta_{n+1}\subset K_{n+1}'$. 这样得到同态

$\delta'_{n+1}\colon P_{n+1} \longrightarrow K_{n+1}$ 使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P_{n+1} \\ & & & \swarrow^{\delta'_{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle \delta_{n+1}} \\ 0 & \longrightarrow & K'_{n+1} & \longrightarrow & Q_{n+1} \end{array}$$

再由 $P_{n+2} \longrightarrow K'_{n+1}$ 为满同态以及 P_{n+1} 为投射模, 可知 δ'_{n+1} 可以提升为同态 $h_{n+1}\colon P_{n+1} \longrightarrow Q_{n+2}$, 且有交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P_{n+1} \\ & \swarrow^{h_{n+1}} & & \swarrow^{\delta'_{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle \delta_{n+1}} \\ Q_{n+2} & & \longrightarrow & K'_{n+1} & \longrightarrow & Q_{n+1} \end{array}$$

这样构造的 h_{n+1} 即满足 $\alpha_{n+1} = h_n \circ d + d' \circ h_{n+1}$. 由归纳法, 我们构造了 $\alpha = f - g$ 与 0 的同伦 $h = (h_n)_{n\geq 0}$. 这也给出了 f 与 g 的同伦. □

注记 6.3.1 命题 6.3.4 和命题 6.3.5 的证明中用到的长正合列与一系列首尾相接的短正合列可以互相决定的方法在处理长正合列, 甚至一般的复形时经常用到. 其可以将问题约化到短正合列的情形.

推论 6.3.1 设 $P_\bullet \longrightarrow M$ 和 $Q_\bullet \longrightarrow M$ 均为 A-模 M 的投射消解. 则 $P_\bullet$ 与 $Q_\bullet$ 是同伦等价的.

证明 由命题 6.3.5, 存在复形同态 $f\colon P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ 和 $g\colon Q_\bullet \longrightarrow P_\bullet$, 使得有交换图表

$$\begin{array}{ccc} P_\bullet & \longrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ Q_\bullet & \longrightarrow & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_\bullet & \longrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ P_\bullet & \longrightarrow & M \end{array}$$

再由命题 6.3.5 知 $f \circ g \sim \mathrm{id}$, $g \circ f \sim \mathrm{id}$. 故 $P_\bullet$ 和 $Q_\bullet$ 同伦等价. □

命题 6.3.6 (短正合列的投射消解) 设 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模短正合列, 则存在如下交换图表

$$\begin{array}{ccccc} P_\bullet & \xrightarrow{i} & Q_\bullet & \xrightarrow{\pi} & R_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \end{array}$$

使得 $P_\bullet \longrightarrow M_1$, $Q_\bullet \longrightarrow M_2$, $R_\bullet \longrightarrow M_3$ 分别为 M_1, M_2, M_3 的投射消解, 并且 $P_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} R_\bullet$ 为复形的短正合列.

证明 取投射模 P_0, R_0 以及满同态 $P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M_1$, $R_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_3$. 令 $Q_0 = P_0 \oplus R_0$. 由 $M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$ 为满同态, 可以找到同态 $\psi_2 \colon R_0 \longrightarrow M_2$, 使得下面的图表交换

$$\begin{array}{ccc} & & R_0 \\ & \overset{\psi_2}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0} \\ M_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & M_3 \end{array}$$

考虑 $\varphi_1 \circ \alpha_0 \colon P_0 \longrightarrow M_2$ 和 $\psi_2 \colon R_0 \longrightarrow M_2$ 诱导的同态 $\beta_0 \coloneqq \varphi_1 \circ \alpha_0 + \psi_2 \colon Q_0 \longrightarrow M_2$, 则以下图表交换:

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{i_0} & Q_0 & \xrightarrow{\pi_0} & R_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0} \\ M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & M_3 \end{array} \tag{6.3–1}$$

其中 $i_0 \colon P_0 \longrightarrow Q_0$, $x \longmapsto (x, 0)$ 为嵌入同态, $\pi_0 \colon Q_0 \longrightarrow R_0$, $(x, y) \longmapsto y$ 为投影同态. 由于 (6.3–1) 中上下两行均为短正合列, 故该交换图可以看做复形的短正合列, 从而由命题 6.1.3 得到正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \alpha_0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \beta_0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \gamma_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} \alpha_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} \beta_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} \gamma_0 \longrightarrow 0$. 由 α_0, γ_0 为满同态知 $\operatorname{Coker} \alpha_0 = 0$, $\operatorname{Coker} \gamma_0 = 0$. 故 $\operatorname{Coker} \beta_0 = 0$, 即 β_0 为满同态. 并且 $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \alpha_0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \beta_0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \gamma_0 \longrightarrow 0$ 为短正合列. 对这个短正合列进行类似的操作, 可构造交换图表

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{i_1} & Q_1 & \xrightarrow{\pi_1} & R_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} \\ \operatorname{Ker} \alpha_0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} \beta_0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} \gamma_0 \end{array}$$

使得 P_1, R_1 为投射模, $Q_1 = P_1 \oplus R_1$, 并且 i_1 为嵌入同态 $x \mapsto (x, 0)$, π_1 为投影同态 $(x, y) \mapsto y$, 同时 α_1 和 γ_1 均为满同态. 与刚才一样推理, 得到 β_1 为满同态, 并且有短正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \alpha_1 \longrightarrow \operatorname{Ker} \beta_1 \longrightarrow \operatorname{Ker} \gamma_1 \longrightarrow 0$. 不断重复以上过程, 即得到所需的投射消解 $P_\bullet \longrightarrow M_1$, $Q_\bullet \longrightarrow M_2$, $R_\bullet \longrightarrow M_3$ 以及复形同态 $P_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet$, $Q_\bullet \xrightarrow{\pi} R_\bullet$. □

注记 6.3.2 通过将复形分解为一系列短正合列, 可以基于命题 6.3.6 得到一般复形的 Cartan-Eilenberg 消解 (Cartan-Eilenberg resolution). 详细介绍可见 [30, Section 015G] 及 [31].

6.4 Tor 函子与 Ext 函子

定义 6.4.1 设 A 为环, M,N 为 A-模. 取 $P_\bullet \longrightarrow M$ 为 M 的一个投射消解. 对任意 $n \geq 0$, 我们定义如下 A-模:

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) := H_n(P_\bullet \otimes_A N) = \frac{\mathrm{Ker}(P_n \otimes_A N \longrightarrow P_{n-1} \otimes_A N)}{\mathrm{Im}(P_{n+1} \otimes_A N \longrightarrow P_n \otimes_A N)}$$
$$\mathrm{Ext}_A^n(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(P_n,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_{n+1},N))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(P_{n-1},N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_n,N))}.$$

对 M 的另一个投射消解 $Q_\bullet \longrightarrow M$, 由推论 6.3.1知 $P_\bullet$ 和 $Q_\bullet$ 同伦等价, 从而不难验证 $P_\bullet \otimes_A N$ 和 $Q_\bullet \otimes_A N$ 同伦等价, 以及 $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, N)$ 同伦等价. 这样得到 $H_n(P_\bullet \otimes_A N) \simeq H_n(Q_\bullet \otimes_A N)$, $H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, N))$ (命题 6.1.2). 这说明 $\mathrm{Tor}_n^A(M,N)$ 和 $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$ (在同构的意义下) 不依赖于 M 的投射消解的选取.

例 6.4.1 设 $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, m,n 为非零整数. 我们计算 $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N)$ 和 $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(M,N)$. 注意到 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 为 M 的投射消解. 故 $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N)$ 由复形 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\cdot m \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow 0$ 的同调群给出. 从而

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(M,N) \simeq \mathrm{Ker}(N \xrightarrow{\cdot m} N) \simeq \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}.$$
$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N) \simeq \mathrm{Coker}(N \xrightarrow{\cdot m} N) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\ k = \frac{n}{(m,n)}.$$
$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N) = 0,\ \forall\ i \neq 0,1.$$

类似地, 可以得到:

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(M,N) \simeq \mathrm{Ker}(N \xrightarrow{\cdot m} N) \simeq \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}.$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M,N) \simeq \mathrm{Coker}(N \xrightarrow{\cdot m} N) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\ k = \frac{n}{(m,n)}.$$
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(M,N) = 0,\ \forall\ i \neq 0,1.$$

设 $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$ 为 A-模同态, $P_\bullet \longrightarrow M_1$, $Q_\bullet \longrightarrow M_2$ 分别为 M_1, M_2 的投射消解. 由命题 6.3.5, φ 可以扩充为复形同态 $f\colon P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$, 从而诱导复形同态 $P_\bullet \otimes_A N \longrightarrow Q_\bullet \otimes_A N$ 和 $\mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$. 由此得到同调群之间的同态 $\mathrm{Tor}_n^A(M_1,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M_2,N)$ 和 $\mathrm{Ext}_A^n(M_2,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^n(M_1,N)$. 由于 φ 的不同扩充都是同伦的, 从而同调群的同态不依赖于扩充 f 的选取. 这说明 $\mathrm{Tor}_n^A(\bullet, N)$ 是一个共变函子, $\mathrm{Ext}_A^n(\bullet, N)$ 是一个反变函子. 同样地, 可以看到 $\mathrm{Tor}_n^A(M,\bullet)$ 和 $\mathrm{Ext}_A^n(M,\bullet)$ 都是共变函子.

以下为 Tor 函子的基本性质.

命题 6.4.1 设 M, N 均为 A-模. 则有:

(i) $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \simeq M \otimes_A N$.

(ii) 如果 M 为投射模, 那么 $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = 0$, $\mathrm{Tor}_n^A(N,M) = 0$, $\forall\ n > 0$.

(iii) 如果 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模的短正合列, 那么有如下长正合列:

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M_1,N) &\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M_2,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M_3,N)\\ &\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M_1,N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M_3,N)\\ &\longrightarrow M_1 \otimes_A N \longrightarrow M_2 \otimes_A N \longrightarrow M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0\end{aligned}$$

(iv) 如果 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模的短正合列, 那么有如下长正合列:

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M,N_1) &\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M,N_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M,N_3)\\ &\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^A(M,N_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,N_3)\\ &\longrightarrow M \otimes_A N_1 \longrightarrow M \otimes_A N_2 \longrightarrow M \otimes_A N_3 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

(v) $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_n^A(N,M)$, $\forall\ n \geq 0$.

证明 (i): 取 M 的一个投射消解 $P_\bullet \longrightarrow M$. 由于 $\cdot \otimes_A N$ 是右正合函子, 可知 $P_1 \otimes_A N \longrightarrow P_0 \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow 0$ 正合. 故 $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \simeq H_0(P_\bullet \otimes_A N) \simeq M \otimes_A N$.

(ii): 设 M 是投射模, 则 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \longrightarrow 0$ 为 M 的投射消解. 由此得到 $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = 0$, $\forall\ n > 0$. 设 $P_\bullet \longrightarrow N$ 为 N 的投射消解. 由 M 为投射模和命题 6.3.3 知 $P_\bullet \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow 0$ 为正合列, 故 $\mathrm{Tor}_n^A(N,M) = 0$, $\forall\ n > 0$.

(iii): 根据命题 6.3.6, 有交换图表

$$\begin{array}{ccccc} P_\bullet & \xrightarrow{i} & Q_\bullet & \xrightarrow{\pi} & R_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \end{array}$$

使得 $P_\bullet \longrightarrow M_1$, $Q_\bullet \longrightarrow M_2$, $R_\bullet \longrightarrow M_3$ 分别为 M_1, M_2, M_3 的投射消解, 并且 $P_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} R_\bullet$ 为复形的短正合列. 由于 $\forall\ n \geq 0$, R_n 为投射模, 则 $P_n \longrightarrow Q_n \longrightarrow R_n$ 为分裂的短正合列, 从而 $0 \longrightarrow P_n \otimes_A N \longrightarrow Q_n \otimes_A N \longrightarrow R_n \otimes_A N \longrightarrow 0$ 也为分裂的短正合列. 这说明 $P_\bullet \otimes_A N \longrightarrow Q_\bullet \otimes_A N \longrightarrow R_\bullet \otimes_A N$ 为复形的短正合列. 由命题 6.1.3 即得所要的长正合列.

(iv): 设 $P_\bullet \longrightarrow M$ 为 M 的一个投射消解. 对任意 $n \geq 0$, 由命题 6.3.3 知 $0 \longrightarrow P_n \otimes_A N_1 \longrightarrow P_n \otimes_A N_2 \longrightarrow P_n \otimes_A N_3 \longrightarrow 0$ 也为短正合列. 从而 $P_\bullet \otimes_A N_1 \longrightarrow$

$P_\bullet \otimes_A N_2 \longrightarrow P_\bullet \otimes_A N_3$ 为复形的短正合列. 由命题 6.1.3 即得所要的长正合列.

(v): 设 $P_\bullet \longrightarrow M$ 为 M 的投射消解. 令 $K_0 \coloneqq \mathrm{Ker}(P_0 \longrightarrow M)$, 对 $n \geq 1$, 令 $K_n \coloneqq \mathrm{Ker}(P_n \longrightarrow P_{n-1})$. 将长正合列 $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 分解为以下首尾相接的一系列短正合列:

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow K_0 &\longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow K_1 &\longrightarrow P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0\\
&\vdots\\
0 \longrightarrow K_n &\longrightarrow P_n \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow K_{n+1} &\longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow K_n \longrightarrow 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

对短正合列 $0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 应用 (iv), 得到正合列 $\mathrm{Tor}_n^A(N, P_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(N, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^A(N, K_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^A(N, P_0)$. 如果 $n-1 > 0$, 则由 (ii) 知 $\mathrm{Tor}_n^A(N, P_0) = 0$, $\mathrm{Tor}_{n-1}^A(N, P_0) = 0$. 故 $\mathrm{Tor}_n^A(N, M) \simeq \mathrm{Tor}_{n-1}^A(N, K_0)$. 继续利用上述短正合列进行类似推理, 可得

$$\mathrm{Tor}_n^A(N, M) \simeq \mathrm{Tor}_{n-1}^A(N, K_0) \simeq \mathrm{Tor}_{n-2}^A(N, K_1) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Tor}_1^A(N, K_{n-2}).$$

利用短正合列 $0 \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow 0$ 诱导的 Tor 的长正合列可得 $\mathrm{Tor}_1^A(N, K_{n-2}) \simeq \mathrm{Ker}(K_{n-1} \otimes_A N \longrightarrow P_{n-1} \otimes_A N)$. 由 $\cdot \otimes_A N$ 为右正合函子可得下面的两个右正合列

$$\begin{aligned}
K_n \otimes_A N &\longrightarrow P_n \otimes_A N \longrightarrow K_{n-1} \otimes_A N \longrightarrow 0\\
K_{n+1} \otimes_A N &\longrightarrow P_{n+1} \otimes_A N \longrightarrow K_n \otimes_A N \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

由此不难分析出 $\mathrm{Ker}(K_{n-1} \otimes_A N \longrightarrow P_{n-1} \otimes_A N) \simeq \frac{\mathrm{Ker}(P_n \otimes_A N \longrightarrow P_{n-1} \otimes_A N)}{\mathrm{Im}(P_{n+1} \otimes_A N \longrightarrow P_n \otimes_A N)} \simeq \mathrm{Tor}_n^A(M, N)$. 故 $\mathrm{Tor}_n^A(N, M) \simeq \mathrm{Tor}_n^A(M, N)$. □

类似地, 我们有如下 Ext 的基本性质.

命题 6.4.2 设 M, N 均为 A-模. 则有:

(i) $\mathrm{Ext}_A^0(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N)$.
(ii) 如果 M 为投射模, 那么 $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0$, $\forall\, n > 0$.

(iii) 如果 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模的短正合列, 那么有如下长正合列:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_3, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_1, N) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M_3, N) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(iv) 如果 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 为 A-模的短正合列, 那么有如下长正合列:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_3) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, N_3) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M, N_1) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

证明 (i): 设 $P_\bullet \longrightarrow M$ 为 M 的投射消解. 由 $\mathrm{Hom}_A(\bullet, N)$ 为左正合函子可知以下为左正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, N)$. 由此可得 $\mathrm{Ext}^0_A(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

(ii): 由 M 为投射模可知 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \longrightarrow 0$ 为 M 的一个投射消解. 由此得到 $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0, \ \forall\, n > 0$.

(iii): 根据命题 6.3.6, 有交换图表

$$\begin{array}{ccccc} P_\bullet & \xrightarrow{i} & Q_\bullet & \xrightarrow{\pi} & R_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \end{array}$$

使得 $P_\bullet \longrightarrow M_1$, $Q_\bullet \longrightarrow M_2$, $R_\bullet \longrightarrow M_3$ 分别为 M_1, M_2, M_3 的投射消解, 并且 $P_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} R_\bullet$ 为复形的短正合列. 由于 $\forall\, n \geq 0$, R_n 为投射模, 则 $P_n \longrightarrow Q_n \longrightarrow R_n$ 为分裂的短正合列, 从而 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_n, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q_n, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_n, N) \longrightarrow 0$ 也为分裂的短正合列. 这说明 $\mathrm{Hom}_A(R_\bullet, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q_\bullet, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ 为复形的短正合列. 由命题 6.1.3 即得所要的长正合列.

(iv): 设 $P_\bullet \longrightarrow M$ 为 M 的一个投射消解. 对任意 $n \geq 0$, 由 P_n 为投射模知 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_n, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_n, N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_n, N_3) \longrightarrow 0$ 也为短正合列. 从而 $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N_3)$ 为复形的短正合列. 由命题 6.1.3 即得所要的长正合列. □

一般而言, 同态 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ 诱导的 $\mathrm{Ext}^i_A(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M_1, N)$ 不太容易显式写出来. 但当 f 比较特殊时, Ext 之间的同态会比较简单.

命题 6.4.3 设 M, N 为 A-模, $a \in A$. 则对任意 $i \geq 0$, 乘 a 同态 $M \xrightarrow{a\cdot} M$, $x \mapsto ax$ 诱导的同态 $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M, N)$ 也为乘 a 同态.

证明 任取 M 的投射消解 $P_\bullet \longrightarrow M$. 则乘 a 同态给出如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \\ & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot} \\ \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M \end{array}$$

作用 $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$ 即得交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_1,N) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_0,N) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ & & \uparrow{\scriptstyle a\cdot} & & \uparrow{\scriptstyle a\cdot} & & \uparrow{\scriptstyle a\cdot} \\ \cdots & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_1,N) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_0,N) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) \end{array}$$

再由 Ext 的定义即得诱导的 $\mathrm{Ext}^i_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ 也为乘 a 同态. □

习题

1. 设 I 为非空集合, M 为 Abel 群, 证明: $C_\bullet(\Delta_I) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ 的各阶同调群均为零.

2. 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的 Abel 群预层, $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ 为 X 的开覆盖. 对 $n \geq 0$, 定义 $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 的子群 $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})'$ 为

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})' \coloneqq \left\{ (s_{i_0 \cdots i_n}) \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid s_{i_{\sigma(0)} \cdots i_{\sigma(n)}} = \mathrm{sgn}(\sigma) s_{i_0 \cdots i_n},\ \forall\, \sigma \in S_{n+1} \right\}.$$

令 $C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})' \coloneqq C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. 则 $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})'$ 为 $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 的子复形.

证明: 自然的包含给出的复形同态 $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})' \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 为同伦等价, 特别地, $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})'$ 和 $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 的各阶上同调群是同构的.

3. 设 I, J 为非空集合. 对一个映射 $f\colon J \longrightarrow I$, 对 $n \geq 0$, 定义如下同态

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n &\colon C_n(\Delta_J) \longrightarrow C_n(\Delta_I) \\ &< j_0 \cdots j_n > \longmapsto < f(j_0) \cdots f(j_n) > \end{aligned}$$

令 $\tilde{f}_{-1}\colon C_{-1}(\Delta_J) = \mathbb{Z} \longrightarrow C_{-1}(\Delta_I) = \mathbb{Z}$ 为恒等同态.

(i) 证明 $\tilde{f}_n (n \geq -1)$ 给出复形同态 $\tilde{f}\colon C_\bullet(\Delta_J) \longrightarrow C_\bullet(\Delta_I)$.

(ii) 设 $f, g\colon J \longrightarrow I$ 为两个映射, 证明存在 $\tilde{f}$ 与 $\tilde{g}$ 的同伦 h, 使得对每个 $n \geq 0$, 对任意 $j_0, \ldots, j_n \in J$, 均有 $h_n(< j_0 \cdots j_n >) \in C_{n+1}(\Delta_K)$, 其中 K 为 I 的如下子集:

$$K \coloneqq \{f(j_0), \ldots, f(j_n), g(j_0), \ldots, g(j_n)\} \subset I.$$

4. 设 X 为拓扑空间, $\mathcal{F}$ 为 X 上的 Abel 群预层. 设 $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ 和 $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ 为 X 的两个开覆盖. 称映射 $f\colon J \longrightarrow I$ 为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的一个加细映射, 如果 $\forall\, j \in J$, $V_j \subset U_{f(j)}$.

这样的一个加细映射诱导复形同态 $\tilde{f}\colon C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) &\longrightarrow C^n(\mathcal{V},\mathcal{F}) \\ s = (s_{i_0\cdots i_n}) &\longmapsto \tilde{s} \end{aligned}$$

其中 $\tilde{s}_{j_0\cdots j_n} = s_{f(j_0)\cdots f(j_n)}\,|_{V_{j_0\cdots j_n}}$.

证明: 对 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的两个加细映射 f, g, 其诱导的复形同态 $\tilde{f}, \tilde{g}\colon C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})$ 是同伦的. 特别地, 对任意 n, 有 $\tilde{f}_* = \tilde{g}_*\colon H^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{V},\mathcal{F})$.

5. 举例说明存在 A-模 M, N, 使得 $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \ncong \mathrm{Ext}^1_A(N,M)$.

习题提示

2. 利用形式看法 “$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(C_\bullet(\Delta_I),\mathcal{F})$” 和 “$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})'=\mathrm{Hom}(C'_\bullet(\Delta_I),\mathcal{F})$”, 将命题 6.2.4 中构造的同伦 h 解释到增广 Čech 复形上.

4. 利用形式看法 “$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(C_\bullet(\Delta_I),\mathcal{F})$” 和 “$C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(C_\bullet(\Delta_J),\mathcal{F})$”, 将习题 3 中的同伦 h 解释到增广 Čech 复形上.

第七章 平坦性

尽管定义较为抽象, 平坦性却对应着几何上 “族” 的观念. 在实际例子中, 局部判别法 (定理 7.2.1) 是最常用到的判断方法. 对于忠实平坦的环同态 $A \longrightarrow B$, 素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 可以看作开覆盖的类比, 进而有 Čech 复形和 “粘合” 的相应类比. 本章最后一节较为详细地介绍了 “粘合”(下降) 的基本定理及其应用.

7.1 基本性质

定义 7.1.1 设 A 为环. 我们称 A-模 M 是**平坦的**, 如果对任意 A-模之间的单同态 $N_1 \longrightarrow N_2$, 均有 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态. 环同态 $A \longrightarrow B$ 称为平坦的, 或者说 B 为平坦 A-代数, 如果 B 作为 A-模是平坦的.

由于张量积是右正合函子, 可知 M 平坦等价于 $\cdot \otimes_A M$ 为正合函子.

命题 7.1.1 设 A 为环.

(i) 投射 A-模均为平坦的.

(ii) (局部化) 对任意乘法集 $S \subset A$, 局部化 A_S 为平坦 A-代数.

(iii) (传递性) 设 $A \longrightarrow B$ 为平坦的环同态, M 为平坦 B-模. 则 M 也为平坦 A-模.

(iv) (基变换) 设 $A \longrightarrow A'$ 为环同态, 设 M 为平坦 A-模. 则 $M' := M \otimes_A A'$ 为平坦 A'-模.

证明 (i): 此即命题 6.3.3. (ii)-(iv): 根据定义和张量积的简单性质即得. □

下面的命题说明, 平坦性是一个局部性质.

命题 7.1.2 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, 设 M 为 B-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 作为 A-模是平坦的.
(ii) 对任意 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 局部化 M_Q 是平坦 A_P-模. 其中 $P \coloneqq Q \bigcap A \in \operatorname{Spec} A$.
(iii) 对 B 的任意极大理想 Q, 局部化 M_Q 是平坦 A_P-模. 其中 $P \coloneqq Q \bigcap A \in \operatorname{Spec} A$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 设 $N_1 \longrightarrow N_2$ 为 A_P-模的单同态. 注意到对 $i = 1, 2$, 有如下同构:

$$N_i \otimes_{A_P} M_Q = (N_i \otimes_A A_P) \otimes_{A_P} (M \otimes_B B_Q) = (N_i \otimes_A M) \otimes_B B_Q. \tag{7.1–1}$$

由 M 为平坦 A-模知 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态, 从而局部化 $(N_1 \otimes_A M)_Q \longrightarrow (N_2 \otimes_A M)_Q$ 也为单同态. 再由 (7.1–1) 即知 $N_1 \otimes_{A_P} M_Q \longrightarrow N_2 \otimes_{A_P} M_Q$ 为单同态. 这说明 M_Q 为平坦 A_P-模.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 是显然的.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 设 $N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2$ 为 A-模的单同态. 则 $N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N_2 \otimes_A M$ 也可看作 B-模同态. 从而 $\varphi \otimes 1$ 为单同态 $\Longleftrightarrow$ 对 B 的任意极大理想 Q, 局部化 $(N_1 \otimes_A M)_Q \xrightarrow{(\varphi \otimes 1)_Q} (N_2 \otimes_A M)_Q$ 为单同态. 注意到对 $i = 1, 2$, 有同构

$$(N_i \otimes_A M)_Q = N_i \otimes_A M \otimes_B B_Q = N_i \otimes_A A_P \otimes_{A_P} (M \otimes_B B_Q) = N_{iP} \otimes_{A_P} M_Q.$$

由 $N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2$ 为单同态知局部化 $N_{1P} \xrightarrow{\varphi_P} N_{2P}$ 也为单同态, 从而由 M_Q 是平坦 A_P-模得到 $(\varphi \otimes 1)_Q$ 为单同态. 由 Q 的任意性知 $\varphi \otimes 1$ 为单同态. 这说明 M 为平坦 A-模.□

由定义, 为了验证 M 的平坦性, 我们需要对任意 A-模单同态 $N_1 \longrightarrow N_2$ 来验证 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态. 下面的命题说明, 可以只对一些特殊的单同态 $N_1 \longrightarrow N_2$ 进行验证.

命题 7.1.3 设 A 为环, M 为 A-模. 则以下几条互相等价:
(i) M 平坦.
(ii) 对任意的有限 A-模 N_1, N_2, 以及任意单同态 $N_1 \longrightarrow N_2$, 有 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 也为单同态.
(iii) 对 A 的任意有限生成理想 I, 自然同态 $I \otimes_A M \longrightarrow M$ 为单同态.
(iv) 对 A 的任意有限生成理想 I, 有 $\operatorname{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.
(v) 对 A 的任意理想 I, 自然同态 $I \otimes_A M \longrightarrow M$ 为单同态.
(vi) 对 A 的任意理想 I, 有 $\operatorname{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.
(vii) 对任意有限 A-模 N, 有 $\operatorname{Tor}_1^A(N, M) = 0$.

证明 显然有 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv): 对 A-模短正合列 $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$ 应用函子 $\cdot \otimes_A M$ 得到 Tor 正合列 $\operatorname{Tor}_1^A(A, M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(A/I, M) \longrightarrow I \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M = M$. 由 A 为平坦 A-模知 $\operatorname{Tor}_1^A(A, M) = 0$. 故 $I \otimes_A M \longrightarrow M$ 为单同态当且仅当 $\operatorname{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (v): 设 $x \in \mathrm{Ker}(I \otimes_A M \longrightarrow M)$. 由张量积的定义, 存在 $a_1, \ldots, a_n \in I$, 以及 $y_1, \ldots, y_n \in M$, 使得 $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i$. 令 $J = (a_1, \ldots, a_n)$, 及 $x' \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i \in J \otimes_A M$. 则 $x' \in \mathrm{Ker}(J \otimes_A M \longrightarrow M)$, 并且 x 为 x' 在自然同态 $J \otimes_A M \longrightarrow I \otimes_A M$ 下的像. 而根据 (iii) 知 $x' = 0$. 故 $x = 0$.

(v) $\Longleftrightarrow$ (vi): 同 (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv).

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): 对 N 的生成元个数 r 进行归纳. 如果 $r = 1$, 则显然存在 A 的理想 I, 使得 $N \simeq A/I$. 这样由 (vi) 即知 $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$. 下面设 $r \geq 2$, 并且 N 的一组生成元为 $x_1, \ldots, x_r$. 令 $N_1 \coloneqq Ax_1 + \cdots + Ax_{r-1}$ 为 $x_1, \ldots, x_{r-1}$ 生成的 N 的子模. 则有短正合列 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N \longrightarrow N/N_1 \longrightarrow 0$. 对该短正合列应用函子 $\cdot \otimes_A M$, 得到 Tor 正合列 $\mathrm{Tor}_1^A(N_1, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(N, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(N/N_1, M)$. 注意到 N_1 的生成元个数为 $r-1$, 并且 N/N_1 的生成元个数为 1, 从而可以应用归纳假设得到 $\mathrm{Tor}_1^A(N_1, M) = \mathrm{Tor}_1^A(N/N_1, M) = 0$. 故 $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$.

(vii) $\Longrightarrow$ (ii): 对短正合列 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_2/N_1 \longrightarrow 0$ 应用函子 $\cdot \otimes_A M$, 得到 Tor 正合列 $\mathrm{Tor}_1^A(N_2/N_1, M) \longrightarrow N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$. 由 N_2 为有限 A-模知 N_2/N_1 也为有限 A-模. 从而由 (vii) 知 $\mathrm{Tor}_1^A(N_2/N_1, M) = 0$. 故 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 设 $N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2$ 为 A-模的单同态. 设 $x \in \mathrm{Ker}(N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N_2 \otimes_A M)$. 根据张量积的具体构造, 可以看到存在 N_i 的有限子模 N_i', 使得 $\varphi(N_1') \subset N_2'$, 有以下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} N_1' \otimes_A M & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & N_2' \otimes_A M \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} \\ N_1 \otimes_A M & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & N_2 \otimes_A M \end{array}$$

并且存在 $y \in \mathrm{Ker}(N_1' \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N_2' \otimes_A M)$, 使得 $x = \psi_1(y)$. 由于 $N_1' \longrightarrow N_2'$ 为有限 A-模的单同态, 应用 (ii) 即知 $N_1' \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N_2' \otimes_A M$ 为单同态. 从而 $y = 0$. 故 $x = 0$. 这样就证明了 $N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N_2 \otimes_A M$ 为单同态. □

由平坦性的这些等价判别法, 容易得到离散赋值环上模的平坦性的等价刻画.

命题 7.1.4 *设 (A, m) 为离散赋值环, π 为 m 的生成元. 则 A-模 M 平坦 $\Longleftrightarrow$ π 不是 M 的零因子.*

证明 由 A 的理想具有形式 (π^i) 及命题 7.1.3, (iii) 即得. □

对于 Noether 局部环上的有限模, 其平坦性的检验可以进一步简化如下.

命题 7.1.5 *设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 设 M 为有限 A-模. 则以下几条互相等价:*

(i) *M 为自由 A-模.*

(ii) *M 为投射 A-模.*

(iii) *M 为平坦 A-模.*

(iv) $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)=0$.
(v) 自然同态 $m\otimes_A M\longrightarrow M$ 为单同态.

证明 不难看到有 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (v). 下面证明 (iv) $\Longrightarrow$ (i). 取 $x_1,\dots,x_r$ 为 M 的一组极小生成元. 则得到 A-模满同态 $\varphi\colon A^r\longrightarrow M$, 使得 $\varphi\otimes 1\colon A^r\otimes_A k\longrightarrow M\otimes_A k$ 为同构. 对短正合列 $0\longrightarrow\operatorname{Ker}\varphi\longrightarrow A^r\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 应用函子 $k\otimes_A\cdot$, 得到 Tor 函子的如下正合列

$$\operatorname{Tor}_1^A(k,M)\longrightarrow\operatorname{Ker}\varphi\otimes_A k\longrightarrow A^r\otimes_A k\xrightarrow{\varphi\otimes 1}M\otimes_A k\longrightarrow 0.$$

再由 $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)=0$ 及 $\varphi\otimes 1$ 为同构知 $\operatorname{Ker}\varphi\otimes_A k=0$. 应用 Nakayama 引理即得 $\operatorname{Ker}\varphi=0$, 故 φ 为同构. □

对于一般的 Noether 环上的有限模, 其自由性, 投射性与平坦性也有非常密切的关系. 我们先引入局部自由模的概念.

定义 7.1.2 设 A 为环. A-模 M 称为**有限局部自由模**, 如果 M 为有限 A-模, 并且对任意 $P\in\operatorname{Spec}A$, 局部化 M_P 为自由 A_P-模.

由定义, 可逆模都是有限局部自由模. 与命题 4.4.1类似, 我们有如下命题.

命题 7.1.6 设 A 为 Noether 环, M 为有限局部自由 A-模. 则对任意 $P\in\operatorname{Spec}A$, 存在 $f\in A$, 使得 $P\in D(f)$, 并且 M_f 为秩有限的自由 A_f-模.

证明 由于 M 为有限 A-模, 可知 M_P 为秩有限的自由 A_P-模. 设 $x_1,\dots,x_n$ 为 M_P 的一组基. 不难看到我们可以假设每个 $x_i\in M$. 考虑 A-模同态

$$\begin{aligned}\varphi\colon A^n&\longrightarrow M\\ e_i&\longmapsto x_i\end{aligned}$$

其中 $e_1,\dots,e_n$ 为自由 A-模 A^n 的一组基. 由 x_i 的选取知 φ 在 P 处的局部化 $\varphi_P\colon A_P^n\longrightarrow M_P$ 为同构. 从而 $(\operatorname{Ker}\varphi)_P=0$, $(\operatorname{Coker}\varphi)_P=0$. 由于 $\operatorname{Ker}\varphi$ 和 $\operatorname{Coker}\varphi$ 均为有限 A-模, 可以找到 $f\in A$, 使得 $f\notin P$, 并且 $(\operatorname{Ker}\varphi)_f=0$, $(\operatorname{Coker}\varphi)_f=0$. 这样得到 $\varphi_f\colon A_f^n\longrightarrow M_f$ 为 A_f-模同构. □

下面的命题说明对 Noether 环上的有限模而言, 有限局部自由性, 投射性和平坦性是互相等价的.

命题 7.1.7 设 A 为 Noether 环, 设 M 为有限 A-模. 则以下几条互相等价:
(i) M 为有限局部自由 A-模.
(ii) M 为投射 A-模.
(iii) M 为平坦 A-模.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由 M 为有限 A-模, 可以找到秩有限的自由 A-模 F 以及满同态 $\varphi\colon F \longrightarrow M$. 令 $K = \operatorname{Ker}\varphi$, 则得到有限 A-模的短正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$. 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 由命题 2.3.4, 通过作局部化得到短正合列 $0 \longrightarrow K_P \longrightarrow F_P \longrightarrow M_P \longrightarrow 0$. 由 M_P 为自由 A_P-模知其也为投射 A_P-模, 从而有短正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A_P}(M_P, K_P) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A_P}(M_P, F_P) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A_P}(M_P, M_P) \longrightarrow 0$. 利用命题 2.3.6 即得到短正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, K)_P \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, F)_P \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, M)_P \longrightarrow 0$. 由 P 的任意性, 再次利用命题 2.3.4就得到短正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, M) \longrightarrow 0$. 从而存在 $f \in \operatorname{Hom}_A(M, F)$, 使得 $\varphi \circ f = \mathrm{id}$. 故 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 分裂, 有同构 $F \simeq K \oplus M$. 故 M 为投射模.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 由 M_P 为自由 A_P-模知其为平坦 A_P-模. 由 P 的任意性即知 M 为平坦 A-模 (命题 7.1.2).

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 由命题 7.1.5 即得. □

另一个表明平坦模和自由模的相似性的性质是维数的局部常值性, 即如下命题.

命题 7.1.8 设 A 为 Noether 环, 设 M 为平坦的有限 A-模. 对 $P, Q \in \operatorname{Spec} A$, 如果 P, Q 位于 $\operatorname{Spec} A$ 的同一个连通分支中, 则 $\dim_{k(P)} M \otimes_A k(P) = \dim_{k(Q)} M \otimes_A k(Q)$.

证明 由于存在 $\operatorname{Spec} A$ 的不可约分支 $V_1, \ldots, V_n$, 使得 $P \in V_1$, $Q \in V_n$, 并且 $V_i \cap V_{i+1} \neq \varnothing$ $(1 \leq i \leq n-1)$, 可以看到不妨假设 P, Q 在 $\operatorname{Spec} A$ 的同一个不可约分支中. 设该不可约分支对应的极小素理想为 R, 则 $R \subset P$, $R \subset Q$. 在 P 处作局部化得到 M_P 为平坦的有限 A_P-模, 从而是自由 A_P-模. 这样得到

$$\dim_{k(P)} M \otimes_A k(P) = \dim_{k(P)} M_P \otimes_{A_P} k(P) = \dim_{k(R)} M_P \otimes_{A_P} k(R) = \dim_{k(R)} M \otimes_A k(R).$$

同理在 Q 处作局部化得到 $\dim_{k(Q)} M \otimes_A k(Q) = \dim_{k(R)} M \otimes_A k(R)$. 故

$$\dim_{k(P)} M \otimes_A k(P) = \dim_{k(Q)} M \otimes_A k(Q).$$

□

反过来, $\dim_{k(P)} M \otimes_A k(P)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 上的常值函数在某些条件下也可以蕴含 M 的平坦性. 具体而言, 我们有如下命题.

命题 7.1.9 设 (A, m, k) 为整的 Noether 局部环. 记 $K = \operatorname{Frac}(A)$ 为其分式域. 设 M 为有限 A-模. 则 M 为自由模 $\Longleftrightarrow \dim_k M \otimes_A k = \dim_K M \otimes_A K$.

证明 $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 设 $\dim_k M \otimes_A k = r$. 通过取 M 的一组极小生成元, 我们构造满同态

$\varphi\colon A^r \longrightarrow M$, 使得 $\varphi\otimes 1\colon A^r\otimes_A k \longrightarrow M\otimes_A k$ 为同构. 令 $N=\operatorname{Ker}\varphi$. 对短正合列

$$0\longrightarrow N\longrightarrow A^r\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

应用正合函子 $\cdot\otimes_A K$ 得到短正合列

$$0\longrightarrow N\otimes_A K\longrightarrow A^r\otimes_A K\xrightarrow{\varphi\otimes 1} M\otimes_A K\longrightarrow 0.$$

由 $\dim_K M\otimes_A K=r$ 知满同态 $\varphi\otimes 1\colon A^r\otimes_A K\longrightarrow M\otimes_A K$ 为同构. 从而 $N\otimes_A K=0$. 作为 A^r 的子模, N 是无挠的 (torsion-free). 故 $N=0$, 从而 $M\simeq A^r$ 为自由模. □

命题 7.1.10 设 A 为 Noether 环, I 为 A 的理想. 设 $\widehat{A}=\varprojlim_n A/I^n$ 为 A 的 I-进完备化. 则 $A\longrightarrow\widehat{A}$ 是平坦的.

证明 由命题 3.3.3 和 命题 3.3.4, 对有限 A-模 M, 有 $\widehat{M}=M\otimes_A\widehat{A}$, 并且 I-进完备化为有限 A-模上的正合函子. 从而函子 $\cdot\otimes_A\widehat{A}$ 为有限 A-模上的正合函子. 再由命题 7.1.3 (ii) 即得 $\widehat{A}$ 为平坦 A-代数. □

7.2 局部判别法

命题 7.1.5 将 Noether 局部环上有限模的平坦性检验约化到只需验证 $m\otimes_A M\longrightarrow M$ 为单同态. 在实际应用中, 经常遇到 M 不是有限 A-模的情形. 下面说明即使在更一般的情形, 单同态 $m\otimes_A M\longrightarrow M$ 也能保证 M 的平坦性.

定理 7.2.1 (平坦性的局部判别法) 设 $(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态. 设 M 为有限 B-模. 则以下几条互相等价:

(i) M 为平坦 A-模.
(ii) 自然同态 $m\otimes_A M\longrightarrow M$ 为单同态.
(iii) $\operatorname{Tor}_1^A(k,M)=0$. 其中 $k:=A/m$ 为剩余类域.
(iv) 对任意 $i\geq 1$, M/m^iM 均为平坦 A/m^i-模.
(v) 对任意长度有限的 A-模之间的单同态 $N_1\hookrightarrow N_2$, 均有 $N_1\otimes_A M\longrightarrow N_2\otimes_A M$ 为单同态.

证明 显然有 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), (i) $\Longrightarrow$ (iv). 下面只需再证明 (iii) $\Longrightarrow$ (v), (iv) $\Longrightarrow$ (v), 以及 (v) $\Longrightarrow$ (i).

(iii) $\Longrightarrow$ (v): 设 N_1,N_2 为长度有限的 A-模, $\varphi\colon N_1\hookrightarrow N_2$ 为单同态. 令 $N_3:=\operatorname{Coker}\varphi=N_2/\operatorname{Im}\varphi$. 则有短正合列 $0\longrightarrow N_1\longrightarrow N_2\longrightarrow N_3\longrightarrow 0$, 并且由 N_2 长度

有限可知 N_3 长度有限, 从而存在 $s \geq 1$, 使得 $m^s N_3 = 0$. $\forall\, 0 \leq i \leq s-1$, 短正合列

$$0 \longrightarrow m^{i+1}N_3 \longrightarrow m^i N_3 \longrightarrow \frac{m^i N_3}{m^{i+1}N_3} \longrightarrow 0$$

诱导正合列 $\mathrm{Tor}_1^A(m^{i+1}N_3, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(m^i N_3, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(\frac{m^i N_3}{m^{i+1}N_3}, M)$. 由于 $\frac{m^i N_3}{m^{i+1}N_3}$ 为 k-线性空间, 其作为 A-模同构于有限个 k 的直和, 从而由 $\mathrm{Tor}_1^A(k, M) = 0$ 知 $\mathrm{Tor}_1^A(\frac{m^i N_3}{m^{i+1}N_3}, M) = 0$. 这样得到对任意 $i = 0, \ldots, s-1$, $\mathrm{Tor}_1^A(m^{i+1}N_3, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(m^i N_3, M)$ 为满同态. 故

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(m^s N_3, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(m^0 N_3, M) = \mathrm{Tor}_1^A(N_3, M)$$

为满同态. 即 $\mathrm{Tor}_1^A(N_3, M) = 0$. 对短正合列 $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ 应用函子 $\cdot \otimes_A M$ 得到 Tor 函子的正合列 $\mathrm{Tor}_1^A(N_3, M) \longrightarrow N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$. 故由 $\mathrm{Tor}_1^A(N_3, M) = 0$ 知 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): 设 N 为长度有限的 A-模, 则存在 $i \geq 1$, 使得 $m^i N = 0$. 故 N 也可以看作 A/m^i-模. 并且有同构 $N \otimes_{A/m^i} (M/m^i M) = N \otimes_{A/m^i} (A/m^i \otimes_A M) = N \otimes_A M$. 由此, 对长度有限的 A-模的单同态 $\varphi\colon N_1 \hookrightarrow N_2$, 可找到充分大的 i, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} N_1 \otimes_A M & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & N_2 \otimes_A M \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ N_1 \otimes_{A/m^i} (M/m^i M) & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & N_2 \otimes_{A/m^i} (M/m^i M) \end{array}$$

由 $M/m^i M$ 为平坦 A/m^i-模即知 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态.

(v) $\Longrightarrow$ (i): 设 $N_1 \hookrightarrow N_2$ 为有限 A-模的单同态. 由命题 7.1.3, 只需证明 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$ 为单同态即可. 对任意正整数 $i \geq 1$, 有长度有限的 A-模形成的短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{N_1}{N_1 \cap m^i N_2} \longrightarrow \frac{N_2}{m^i N_2} \longrightarrow \frac{N_2}{N_1 + m^i N_2} \longrightarrow 0$$

由 (v) 的条件, $\frac{N_1}{N_1 \cap m^i N_2} \otimes_A M \longrightarrow \frac{N_2}{m^i N_2} \otimes_A M$ 为单同态. 又有同构

$$\frac{N_1}{N_1 \cap m^i N_2} \otimes_A M = \frac{N_1 \otimes_A M}{(N_1 \cap m^i N_2) \otimes_A M}.$$

由 Artin–Rees 引理, 存在 $i_0 \geq 1$, 使得对任意 $i \geq i_0$, 均有

$$N_1 \cap m^i N_2 = m^{i-i_0}(N_1 \cap m^{i_0} N_2) \subset m^{i-i_0} N_1.$$

从而 $\mathrm{Im}((N_1\cap m^iN_2)\otimes_A M\longrightarrow N_1\otimes_A M)\subset m^{i-i_0}(N_1\otimes_A M)$. 综合以上信息得到

$$\mathrm{Ker}(N_1\otimes_A M\longrightarrow N_2\otimes_A M)\subset\bigcap_{i\geq i_0}m^{i-i_0}(N_1\otimes_A M).$$

注意到 $N_1\otimes_A M$ 为有限 B-模. 从而

$$\bigcap_{i\geq i_0}m^{i-i_0}(N_1\otimes_A M)\subset\bigcap_{i\geq i_0}n^{i-i_0}(N_1\otimes_A M)=0.$$

这样得到 $\mathrm{Ker}(N_1\otimes_A M\longrightarrow N_2\otimes_A M)=0$, 即 $N_1\otimes_A M\longrightarrow N_2\otimes_A M$ 为单同态. □

设 M 为非零 A-模. 回忆 $a\in A$ 称为 M-正则元, 如果乘 a 映射 $M\xrightarrow{a\cdot}M$ 为单射, 或者等价地, 如果 a 不是 M 的零因子.

引理 7.2.1 设 $(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, M 为有限 B-模. 记 $k=A/m$. 设 $b\in n$, 则以下两条互相等价:

(i) b 为 M-正则元, 并且 M/bM 为平坦 A-模.

(ii) $\bar{b}\in B/mB$ 为 $M\otimes_A k$-正则元, 且 M 为平坦 A-模.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 对短正合列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{b\cdot}M\longrightarrow M/bM\longrightarrow 0$ 应用函子 $k\otimes_A\cdot$, 得到长正合列:

$$\begin{aligned}\cdots\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^A(k,M)&\xrightarrow{b\cdot}\mathrm{Tor}_1^A(k,M)\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^A(k,M/bM)\\&\longrightarrow M\otimes_A k\xrightarrow{\bar{b}\cdot}M\otimes_A k\longrightarrow M/bM\otimes_A k\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

由 M/bM 平坦知 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M/bM)=0$, 故 $M\otimes_A k\xrightarrow{\bar{b}\cdot}M\otimes_A k$ 为单同态, 而 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)\xrightarrow{b\cdot}\mathrm{Tor}_1^A(k,M)$ 为满同态. 前者说明 $\bar{b}\in B/mB$ 为 $M\otimes_A k$-正则元, 后者说明 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)=b\,\mathrm{Tor}_1^A(k,M)$. 注意到 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)$ 为有限 B-模, 从而由 Nakayama 引理知 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)=0$. 再由定理 7.2.1 得到 M 为平坦 A-模.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 记 K 为 $M\xrightarrow{b\cdot}M$ 的核, 则有如下两个短正合列:

$$0\longrightarrow K\longrightarrow M\xrightarrow{\varphi}bM\longrightarrow 0,\tag{7.2–1}$$

$$0\longrightarrow bM\xrightarrow{i}M\longrightarrow M/bM\longrightarrow 0.\tag{7.2–2}$$

其中 φ 为乘 b 同态, i 为自然包含同态. 由 $M\otimes_A k\xrightarrow{\bar{b}\cdot}M\otimes_A k$ 为单同态, 知同态 $M\otimes_A k\xrightarrow{\varphi\otimes 1}bM\otimes_A k$ 和同态 $bM\otimes_A k\xrightarrow{i\otimes 1}M\otimes_A k$ 的复合为单同态. 再由 $\varphi\otimes 1$ 为满同态知 $\varphi\otimes 1$ 为同构. 从而 $i\otimes 1$ 为单同态. 在正合列

$$\mathrm{Tor}_1^A(k,M)\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^A(k,M/bM)\longrightarrow bM\otimes_A k\xrightarrow{i\otimes 1}M\otimes_A k$$

中, 由 M 平坦知 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M)=0$. 再由 $i\otimes 1$ 为单同态得到 $\mathrm{Tor}_1^A(k,M/bM)=0$. 应用定理 7.2.1 即知 M/bM 为平坦 A-模. 再由短正合列 (7.2–2) 以及 M 的平坦性知 bM 为平坦 A-模. 从而对短正合列 (7.2–1) 应用 $\cdot\otimes_A k$ 得到如下短正合列:

$$0=\mathrm{Tor}_1^A(bM,k)\longrightarrow K\otimes_A k\longrightarrow M\otimes_A k\xrightarrow{\varphi\otimes 1} bM\otimes_A k\longrightarrow 0.$$

我们已经知道 $\varphi\otimes 1$ 为同构, 从而 $K\otimes_A k=0$. 这说明 $K=mK=nK$, 注意到 K 为有限 B-模, 应用 Nakayama 引理即得 $K=0$. 故 b 为 M-正则元. □

上面的引理经常被迭代使用. 为此, 我们先引入正则序列的概念.

定义 7.2.1 设 M 为非零 A-模. 我们称 A 中元素的序列 $(a_1,\dots,a_n)$ 为 M-**正则序列**, 如果其同时满足如下两个条件:

(i) a_1 为 M-正则元, a_2 为 M/a_1M-正则元, …, a_n 为 $M/(a_1,\dots,a_{n-1})M$-正则元.

(ii) $M/(a_1,\dots,a_n)M\neq 0$.

当 $M=A$ 时, M-正则序列就是定义 5.2.1 中的正则序列.

命题 7.2.1 设 $(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, M 为有限 B-模. 记 $k=A/m$. 设 $b_1,\dots,b_r\in n$, 则以下两条互相等价:

(i) $(b_1,\dots,b_r)$ 为 M-正则序列, 并且 $M/(b_1,\dots,b_r)M$ 为平坦 A-模.

(ii) $(\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_r)\in B/mB$ 为 $M\otimes_A k$-正则序列, 且 M 为平坦 A-模.

证明 对 r 归纳, 并应用引理 7.2.1 即可. □

命题 7.2.1可以用来判断 $M/(b_1,\dots,b_r)M$ 的平坦性, 或者用来寻找 M-正则序列. 下面的例子是判断平坦性的一个典型用法.

例 7.2.1 设 k 为代数封闭域, $A=k[t_1,t_2]$, $B=k[t_1,t_2,x_1,x_2]$ 为多项式环. 令 $f=x_1^2+t_1x_1+t_2x_2$, $g=x_2^2+t_1x_1+t_2x_2$. 则 $C=B/(f,g)$ 为平坦 A-代数. 理由简述如下: 任取 C 的极大理想 n, 令 $m=n\cap A$, 则只需验证 $A_m\longrightarrow C_n$ 平坦. 由于 $C_n\simeq B_n/(f,g)$, 并且 $A_m\longrightarrow B_n$ 平坦, 可以应用命题 7.2.1, 从而只需验证 $(\bar{f},\bar{g})$ 为 B/mB 的正则序列. 根据 Hilbert 零点定理 3.6.1 和 3.6.3, 可以看到 m 为 A 的极大理想, 并且具有形式 $m=(t_1-a_1,t_2-a_2)$, $a_i\in k$. 这样在同构 $B/mB\simeq k[x_1,x_2]$ 下, 有 $\bar{f}=x_1^2+a_1x_1+a_2x_2$, $\bar{g}=x_2^2+a_1x_1+a_2x_2$, 显然 $\bar{f},\bar{g}$ 在 $k[x_1,x_2]$ 中互素, 故 $(\bar{f},\bar{g})$ 为 B/mB 的正则序列.

7.3 忠实平坦性

定义 7.3.1 称 A-模 M 为**忠实平坦的**, 如果对任意 A-模复形 $N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$, 该复形正合 $\Longleftrightarrow$ 与 M 作张量积后的复形 $N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M \longrightarrow N_3 \otimes_A M$ 正合. 环同态 $A \longrightarrow B$ 称为忠实平坦的, 或者说 B 为忠实平坦 A-代数, 如果 B 作为 A-模是忠实平坦的.

命题 7.3.1 设 M 为 A-模. 以下几条互相等价:

(i) M 忠实平坦.

(ii) M 平坦, 并且对任意非零的 A-模 N, 有 $N \otimes_A M \neq 0$.

(iii) M 平坦, 并且对 A 的任意极大理想 m, 均有 $mM \subsetneqq M$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由忠实平坦的定义知 M 平坦. 对任意 A-模 N, 考虑复形 $0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$. 如果 $N \otimes_A M = 0$, 则 $0 \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow 0 \otimes_A M$ 正合, 从而由 M 忠实平坦得到 $0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 正合, 即 $N = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 设有 A-模复形 $N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_3$. 与 M 作张量积后得到的复形记作 $N_1 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi_1'} N_2 \otimes_A M \xrightarrow{\varphi_2'} N_3 \otimes_A M$. 由 M 的平坦性知

$$\frac{\operatorname{Ker}\varphi_2'}{\operatorname{Im}\varphi_1'} = \frac{\operatorname{Ker}\varphi_2}{\operatorname{Im}\varphi_1} \otimes_A M.$$

从而由 $\frac{\operatorname{Ker}\varphi_2'}{\operatorname{Im}\varphi_1'} = 0$ 知 $\frac{\operatorname{Ker}\varphi_2}{\operatorname{Im}\varphi_1} = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 由 $A/m \otimes_A M = M/mM$ 即得.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): 对非零 A-模 N, 取 $0 \neq x \in N$, 令 $I = \operatorname{ann}(x)$. 则有单同态 $A/I \hookrightarrow N$, 从而由 M 的平坦性得单同态 $A/I \otimes_A M = M/IM \hookrightarrow N \otimes_A M$. 取 A 的一个包含 I 的极大理想 m, 则 $IM \subset mM \subsetneqq M$. 故 $M/IM \neq 0$, 知 $N \otimes_A M \neq 0$. □

下面几个命题说明了何时会出现忠实平坦同态.

命题 7.3.2 设 (A, m) 为 Noether 局部环, $\widehat{A} = \varprojlim_i A/m^i$ 为 A 的完备化. 则 $A \longrightarrow \widehat{A}$ 为忠实平坦的.

证明 由 $m\widehat{A}$ 为 $\widehat{A}$ 的极大理想和命题 7.3.1, (iii) 即得. □

命题 7.3.3 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态, 则 φ 忠实平坦 $\Longleftrightarrow$ φ 平坦, 并且其诱导的素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为满射.

证明 $\Longrightarrow$: 任取 $P \in \operatorname{Spec} A$, 由命题 7.3.1, (ii) 知 $B \otimes_A k(P) \neq 0$. 故 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 的在 P 处的纤维 $\operatorname{Spec} B \otimes_A k(P)$ 非空.

$\Longleftarrow$: 由 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为满射, 对 A 的任意极大理想 m, 均存在 $Q \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q \bigcap A = m$. 特别地, $mB \subset Q \subsetneqq B$. 从而由命题 7.3.1, (iii) 得到 φ 忠实平坦. □

命题 7.3.4 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为局部环之间平坦的局部同态, 则 B 为忠实平坦 A-代数.

证明 应用命题 7.3.1, (iii) 即得. □

下面的命题说明忠实平坦同态总是单同态. 注意平坦态射并没有这个性质 (零同态总是平坦的).

命题 7.3.5 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为忠实平坦的环同态, 则 φ 为单同态.

证明 记 $I \coloneqq \operatorname{Ker} \varphi$, 则由 φ 的平坦性可知自然包含 $I \hookrightarrow A$ 诱导的同态 $I \otimes_A B \longrightarrow A \otimes_A B = B$ 为单同态, 另一方面又容易看到这个同态的像是 0, 故得到 $I \otimes_A B = 0$, 再由忠实平坦性知 $I = 0$. □

回忆定理 5.1.2 在满足一定条件的整扩张情形给出了素理想链的下降性质. 下面的命题说明类似的下降性质在平坦扩张时也成立.

命题 7.3.6 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为平坦的, 则 φ 满足素理想链的下降性质, 即对于 $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P' \in \operatorname{Spec} A$, 若 $P' \subset P \coloneqq Q \bigcap A$, 那么存在 $Q' \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q' \subset Q$, 并且 $Q' \bigcap A = P'$.

证明 通过将 A 和 B 分别在 P 和 Q 处作局部化, 我们不妨假设 A, B 均为局部环, 而 P, Q 分别为极大理想. 利用命题 7.3.4, 得到 φ 为忠实平坦的. 再由命题 7.3.3 知 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为满射, 从而存在 $Q' \in \operatorname{Spec} B$, 使得 $Q' \bigcap A = P'$. □

回忆推论 5.1.2 是说纤维维数总是大于或等于期望的维数. 下面的命题说明在平坦扩张时, 纤维维数恰好等于期望的维数.

命题 7.3.7 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为 Noether 局部环之间的平坦同态. 则

$$\dim B = \dim A + \dim B/mB.$$

证明 由推论 5.1.2 知 $\dim B \leq \dim A + \dim B/mB$. 另一方面, 设 $\dim A = r$, $\dim B/mB = s$, 并设 $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_r = m$ 为 A 的素理想链, 设 $Q_0 \subsetneqq Q_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Q_s = n/mB$ 为 B/mB 的素理想链. 将 Q_i 看作 B 中包含 mB 的素理想, 则 $P_r \subset Q_0 \bigcap A$. 由平坦同态的素理想降链性质 (命题 7.3.6), 可以将 P_i 提升为 B 中的素理想链 $P_0' \subsetneqq P_1' \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_r'$, 使得 $P_r' \subset Q_0$. 这样得到 B 中素理想链

$$P_0' \subsetneqq P_1' \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_r' \subset Q_0 \subsetneqq Q_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Q_s = n.$$

由此得到 $\dim B \geq r + s = \dim A + \dim B/mB$. 从而 $\dim B = \dim A + \dim B/mB$. □

命题 7.3.8 (Grothendieck's Generic Freeness Lemma) 设 A 为 Noether 整环, B 为有限生成 A-代数, M 为有限 B-模. 则存在非零的 $a \in A$, 使得 M_a 为自由 A_a-模或零模. 特别地, M_a 为平坦 A_a-模.

证明 设 $K = \mathrm{Frac}(A)$, $B = A[b_1, \dots, b_m]$. 考虑 K-代数 $B \otimes_A K$. 如果 $B \otimes_A K = 0$, 则存在 $0 \neq a \in A$, 使得 $ab_i = 0$, $\forall\, i = 1, \dots, m$. 故 $B_a = 0$. 从而又有 $M_a = 0$. 下面设 $B \otimes_A K \neq 0$.

由整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5, 通过在一个非零元处作局部化, 我们不妨设存在分解 $A \hookrightarrow C \hookrightarrow B$, 使得 $C = A[x_1, \dots, x_n]$ 为 A 上的多项式环, 并且 $C \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 注意到 $n = \dim B \otimes_A K$ 为 $B \otimes_A K$ 的 Krull 维数. 下面对 n 进行归纳.

若 $n = 0$, 即 $C = A$, 则 $A \hookrightarrow B$ 为有限扩张, 这样得到 M 为有限 A-模. 从而由 $M \otimes_A K$ 为有限维 K-线性空间可以看到, 存在 $0 \neq a \in A$, 使得 M_a 为自由 A_a-模.

若 $n \geq 1$, 则 M 为有限 C-模. 从而由定理 3.4.1, 存在 M 的有限 C-子模降链

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M,$$

使得 $\forall\, 1 \leq i \leq r$, 有 $M_i/M_{i-1} \simeq C/P_i$, 其中 $P_i \in \mathrm{Spec}\, C$. 对每个 i, 如果 $P_i = 0$, 令 $a_i = 1$, 则 $(C/P_i)_{a_i} = C/P_i = C$ 为自由 A-模. 如果 $P_i \neq 0$, 由归纳假设 (注意 $\dim (C/P_i) \otimes_A K < n$), 存在 $0 \neq a_i \in A$, 使得 $(C/P_i)_{a_i}$ 为自由 A_{a_i}-模. 最终令 $a = a_1 a_2 \dots a_r \in A$, 则 M_a 为自由 A_a-模. □

作为推论, 我们得到推论 5.2.4 的另一个证明

推论 7.3.1 设 k 为域, A, B 均为整的有限生成 k-代数. 设 $\varphi\colon A \hookrightarrow B$ 为单的 k-代数同态. 则存在 $\mathrm{Spec}\, A$ 的非空开子集 U, 满足

(i) $U \subset \mathrm{Im}\, \varphi^*$.

(ii) 对 U 的每个闭点 x, 纤维 $\varphi^{*-1}(x)$ 的每个不可约分支的维数均为 $\dim B - \dim A$.

证明 由整环形式的 Noether 正规化定理 3.6.5 和 命题 7.3.8, 我们不妨设 B 为平坦 A-代数, 并且存在分解 $A \hookrightarrow A[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow B$, 使得 $A[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow B$ 为有限扩张. 这样得到 $\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A[x_1, \dots, x_n]$ 为满射, 故 $\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ 为满射. 对 $\mathrm{Spec}\, A$ 的每个闭点 x, 设 F 为纤维 $\varphi^{*-1}(x)$ 的一个不可约分支. 我们可以取 F 上的一个闭点 y, 使得 y 不在 $\varphi^{*-1}(x)$ 的其它不可约分支上. 记 P, Q 分别为 x, y 对应的极大理想, 则 $A_P \longrightarrow B_Q$ 为平坦同态, 从而由命题 7.3.7 知 $\dim (B/PB)_Q = \dim B_Q - \dim A_P$. 再由 $\dim (B/PB)_Q = \dim F$, $\dim B_Q = \dim B$ 以及 $\dim A_P = \dim A$ 即得

$$\dim F = \dim B - \dim A.$$

□

7.4 忠实平坦下降

设 $U \xrightarrow{\pi} X$, $Y \xrightarrow{f} X$ 为拓扑空间的连续映射. 我们定义纤维积为

$$U \times_X Y \coloneqq \{(u,y) \in U \times Y \mid \pi(u) = f(y)\},$$

并赋予 $U \times_X Y$ 作为 $U \times Y$ 子集的子空间拓扑. 设 $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ 为 X 的开覆盖, 令 U 为无交并空间 $\coprod\limits_{i\in I} U_i$, π 为自然映射, 容易看到 $U \times_X Y$ 同胚于无交并空间 $\coprod\limits_{i\in I} f^{-1}(U_i)$, 故此时纤维积 $U \times_X Y$ 可以看作 f 在开覆盖 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i \mid i \in I\}$ 下的局部化. 特别地, 如果 $U = Y$, $f = \pi$, 则 $U^2 \coloneqq U \times_X U \simeq \coprod\limits_{(i_0,i_1)\in I^2} U_{i_0} \bigcap U_{i_1}$, $U^3 \coloneqq (U \times_X U) \times_X U \simeq \coprod\limits_{(i_0,i_1,i_2)\in I^3} U_{i_0} \bigcap U_{i_1} \bigcap U_{i_2}$, $U^n \coloneqq U^{n-1} \times_X U \simeq \coprod\limits_{(i_0,\dots,i_{n-1})\in I^n} U_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap U_{i_{n-1}}$. 由此看到对 X 上的一个预层 $\mathcal{F}$, 其 Čech 复形 $C^\cdot(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 可以用纤维积表示为

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U^2) \longrightarrow \cdots.$$

这说明可以将更一般的连续映射 $U \longrightarrow X$ 看作开覆盖, 对预层的某种合适推广定义 Čech 复形. 同时也可以将 “粘合” 的观点在这种 “开覆盖”$U \longrightarrow X$ 下进行推广. 本节主要目标是说明对于环的忠实平坦同态 $A \longrightarrow B$, 其素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 就是 $\operatorname{Spec} A$ 的 “开覆盖” 的一种推广.

7.4.1 Amitsur 复形

设 M 为环 A 上的模. 我们定义 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M}$ 的类比. 对任意 A-代数 B, 令 $\mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B) \coloneqq M \otimes_A B$, 对任意 A-代数同态 $B \xrightarrow{\varphi} C$, 定义 A-模同态 $\rho_\varphi = \mathrm{id} \otimes \varphi \colon \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B) = M \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A C = \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} C)$, $x \otimes b \longmapsto x \otimes \varphi(b)$. 显然这样的一组数据满足如下与预层类似的性质:

(i) 对任意 A-代数 B, 有 $\rho_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$.
(ii) 对任意 A-代数同态 $B \xrightarrow{\varphi} C$ 以及 $C \xrightarrow{\psi} D$, 有 $\rho_\psi \circ \rho_\varphi = \rho_{\psi\circ\varphi}$.

我们将 A-代数同态 $B \xrightarrow{\varphi} C$ 诱导的素谱空间映射 $\operatorname{Spec} C \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Spec} B$ 类比到开子集的包含, 而同态 $\rho_\varphi \colon \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B) \longrightarrow \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} C)$ 类比到预层中的限制同态. 称 $s \in \mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} B)$ 为 $\mathcal{F}_M$ 在 $\operatorname{Spec} B$ 上的截面, 将 $\rho_\varphi(s)$ 记为 $s\,|_{\operatorname{Spec} C}$, 称为 s 在 $\operatorname{Spec} C$ 上的限制. 同样地, 可以定义 Čech 复形的类比如下.

设 I 为非空集合, 对每个 $i \in I$, 给定一个 A-代数同态 $A \xrightarrow{\varphi_i} B_i$. 对 $i \in I$, 记 U_i 为 $\operatorname{Spec} B_i$, 对 $i_0,\dots,i_n \in I$, 记 $U_{i_0\dots i_n} = \operatorname{Spec} B_{i_0} \otimes_A B_{i_1} \otimes_A \cdots \otimes_A B_{i_n}$, 由命题 2.2.11, $B_{i_0} \otimes_A B_{i_1} \otimes_A \cdots \otimes_A B_{i_n}$ 可以看作交集 $U_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap U_{i_n}$ 的代数类比. 记这一族 A-代数 B_i 为 $\mathcal{U}$. 对 $n \geq 0$, 令 $C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) \coloneqq \prod\limits_{(i_0,\dots,i_n)\in I^{n+1}} \mathcal{F}_M(U_{i_0\dots i_n}) =$

$\prod_{(i_0,\dots,i_n)\in I^{n+1}} M\otimes_A B_{i_0}\otimes_A B_{i_1}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n}$. 定义如下 A-模同态

$$\begin{aligned}\delta^n\colon C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)&\longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)\\ s=(s_{i_0\dots i_n})&\longmapsto \delta^n(s)\end{aligned}$$

其中 $\delta^n(s)$ 的 $(i_0\dots i_{n+1})$ 分量为

$$\delta^n(s)_{i_0\dots i_{n+1}}\coloneqq\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j s_{i_0\dots\widehat{i_j}\dots i_{n+1}}\mid_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}},$$

这里 $\widehat{i_j}$ 是指将指标 i_j 删除, $s_{i_0\dots\widehat{i_j}\dots i_{n+1}}\mid_{U_{i_0\cdots i_{n+1}}}$ 是指 $s_{i_0\dots\widehat{i_j}\dots i_{n+1}}\in\mathcal{F}_M(U_{i_0\dots\widehat{i_j}\dots i_{n+1}})$ 在 A-代数同态

$$\begin{aligned}\pi_j\colon B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_{j-1}}\otimes_A B_{i_{j+1}}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_{n+1}}&\longrightarrow B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_{n+1}}\\ b_{i_0}\otimes\cdots\otimes b_{i_{j-1}}\otimes b_{i_{j+1}}\otimes\cdots\otimes b_{i_{n+1}}&\longmapsto b_{i_0}\otimes\cdots\otimes b_{i_{j-1}}\otimes 1\otimes b_{i_{j+1}}\otimes\cdots\otimes b_{i_{n+1}}\end{aligned}$$

诱导的同态 $\rho_{\pi_j}\colon\mathcal{F}_M(U_{i_0\dots\widehat{i_j}\dots i_{n+1}})\longrightarrow\mathcal{F}_M(U_{i_0\dots i_{n+1}})$ 下的像. 再定义 $C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)\coloneqq\mathcal{F}_M(\operatorname{Spec}A)=M$, 以及 A-模同态 $\delta^{-1}\colon C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)\longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$, $s\longmapsto(s\mid_{U_i})_{i\in I}$. 其中 $s\mid_{U_i}$ 是指 $s\in M$ 在 A-模同态 $M\longrightarrow M\otimes_A B_i$, $x\longmapsto x\otimes 1$ 下的像. 不难验证, 对 $n\geq -1$, 有 $\delta^{n+1}\circ\delta^n=0$. 从而 $(C^\cdot(\mathcal{U},\mathcal{F}_M),\delta^\cdot)$ 形成一个复形. 这是拓扑空间上 Čech 复形的类比. 类比于命题 6.2.2, 我们有下面的

命题 7.4.1 在上面的设定及符号下, 如果存在 $i\in I$, 使得 $A\xrightarrow{\varphi_i}B_i$ 存在截面 (即满足 $\psi_i\circ\varphi_i=\mathrm{id}$ 的环同态 $\psi_i\colon B_i\longrightarrow A$), 那么 $(C^\cdot(\mathcal{U},\mathcal{F}_M),\delta^\cdot)$ 处处正合, 即对任意 $n\in\mathbb{Z}$, 有 $H^n(C^\cdot(\mathcal{U},\mathcal{F}))\coloneqq\operatorname{Ker}\delta^n/\operatorname{Im}\delta^{n-1}=0$.

证明 与命题 6.2.2 的证明类似, 我们将标准单形上的锥构造转移到 Čech 复形上来. 对 $n\geq 0$, 我们定义如下同态:

$$\begin{aligned}h^{n+1}\colon C^{n+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)&\longrightarrow C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}_M) &(7.4\text{–}1)\\ s=(s_{i_0\dots i_{n+1}})&\longmapsto h^{n+1}(s) &(7.4\text{–}2)\end{aligned}$$

其中 $h^{n+1}(s)$ 的 $(i_0\dots i_n)$ 分量为 $h^{n+1}(s)_{i_0\dots i_n}\coloneqq\tilde{\psi}_i(s_{ii_0\dots i_{n+1}})\in\mathcal{F}_M(U_{i_0\dots i_n})$. 这里 $\tilde{\psi}_i$ 为如下两个同态的复合:

$$\begin{aligned}M\otimes_A B_i\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n}&\xrightarrow{1\otimes\psi_i\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1}M\otimes_A A\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n},\\ M\otimes_A A\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n}&\xrightarrow{\sim}M\otimes_A B_{i_0}\otimes_A\cdots\otimes_A B_{i_n}.\end{aligned}$$

再定义同态 $h^0\colon C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)\longrightarrow C^{-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_M)$, $s=(s_{i_0})\longmapsto(1\otimes\psi_i)(s_i)\in M\otimes_A$

$A = M$. 通过直接验证可以看到 $h^\cdot$ 给出了 Čech 复形 $C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}_M)$ 上恒等同态与零同态的一个同伦. 从而得到 Čech 复形的零调性. □

命题 7.4.2 设 I 为有限集, 并且存在 $i \in I$, 使得 $A \xrightarrow{\varphi_i} B_i$ 为忠实平坦的, 那么 $(C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}_M), \delta^\cdot)$ 处处正合, 即对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有 $H^n(C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \coloneqq \operatorname{Ker} \delta^n / \operatorname{Im} \delta^{n-1} = 0$.

证明 我们将所有的 A-代数基变换为 B_i-代数. 即对任意 $j \in I$, 令 $B'_j \coloneqq B_j \otimes_A B_i$, 并通过 $\varphi'_j \colon B_i \longrightarrow B'_j$, $b_i \longmapsto 1 \otimes b_i$ 将 B'_j 看作 B_i-代数. 这族 B_i-代数 $B'_j (j \in I)$ 记为 $\mathcal{U}'$. 考虑 B_i-模 $M' \coloneqq M \otimes_A B_i$. 不难验证有复形的同构

$$C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}_M) \otimes_A B_i \simeq C^\cdot(\mathcal{U}', \mathcal{F}_{M'}).$$

由于同态 $B_i \xrightarrow{\varphi'_i} B'_i = B_i \otimes_A B_i$ 存在截面 $B_i \otimes_A B_i \xrightarrow{x \otimes y \mapsto xy} B_i$, 应用命题 7.4.1 知 Čech 复形 $C^\cdot(\mathcal{U}', \mathcal{F}_{M'})$ 处处正合. 又由于 B_i 为忠实平坦的 A-代数, 从而 $C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}_M)$ 也处处正合. □

作为推论, 我们有如下 Amitsur 复形的正合性.

推论 7.4.1 设 $A \longrightarrow B$ 为忠实平坦环同态, M 为 A-模, 则以下 **Amitsur 复形** 处处正合:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \otimes_A B \xrightarrow{d_0} M \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d_1} M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d_2} \cdots.$$

其中 d_n 定义为

$$d_n(m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \otimes \cdots \otimes b_n.$$

证明 将 A-代数 B 看作一族 A-代数 (只有一个, 从而指标集 I 为单点集), 其给出的 Čech 复形 $C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}_M)$ 即为 Amitsur 复形. 从而由命题 7.4.2 即得正合性. □

设 $\mathcal{U} = \{D(f_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 的有限个主开集形成的开覆盖. 令 $B = A_{f_1} \times \cdots \times A_{f_n}$. 则 $\operatorname{Spec} B$ 为 $D(f_i)$ 的无交并, 并且 B 为忠实平坦的 A-代数. 对 A-模 M, 不难看到此时 Amitsur 复形即为 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M}$ 在这个开覆盖 $\mathcal{U}$ 下的 Čech 复形 $C^\cdot(\mathcal{U}, \widetilde{M})$. 从而命题 6.2.3 为推论 7.4.1 的推论.

7.4.2 模的下降 (粘合)

设 A 为环, $X = \operatorname{Spec} A$. 设 $\mathcal{U} = \{D(f_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ 为 X 的一个主开集形成的有限开覆盖. 对每个 i, 给定 A_{f_i}-模 M_i. 我们希望找到 A-模 M, 使得 $M_{f_i} \simeq M_i$, 这样的 M 可以称为由 M_i "粘合" 得到. 显然, 如果 M 存在, 这些模 M_i 应该满足如下相容性条件:

条件 7.4.1 对任意 i, j, 存在 $A_{f_i f_j}$-模同构 $\varphi_{ij} \colon (M_i)_{f_i f_j} \xrightarrow{\sim} (M_j)_{f_i f_j}$, 使得对任意 i, j, k, 有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} (M_i)_{f_i f_j f_k} & \xrightarrow{\varphi_{ik}} & (M_k)_{f_i f_j f_k} \\ & {\scriptstyle \varphi_{ij}} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \varphi_{jk}} & \\ & (M_j)_{f_i f_j f_k} & \end{array}$$

与拓扑空间或微分流形的粘合一样, 如果满足相容性条件, 那么我们可以将这些模 M_i 粘合得到 M. 即有下面的定理成立.

定理 7.4.1 设 A 为环, $X = \operatorname{Spec} A$. 设 $\mathcal{U} = \{D(f_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ 为 X 的一个主开集形成的有限开覆盖. 对每个 i, 给定 A_{f_i}-模 M_i, 满足相容性条件7.4.1. 则存在 A-模 M, 使得 $\forall\, i$, 有 A_i-模同构 $\varphi_i \colon M_{f_i} \xrightarrow{\sim} M_i$, 并且 $\forall\, i, j$, 如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & M_{f_i f_j} & \\ & {\scriptstyle \varphi_i} \swarrow \quad \searrow {\scriptstyle \varphi_j} & \\ (M_i)_{f_j} & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & (M_j)_{f_i} \end{array}$$

满足上面性质的 M 在同构意义下是唯一的.

证明 对任意 i, j, 我们固定一个 $A_{f_i f_j}$-模 M_{ij}, 以及使得下图交换的 $A_{f_i f_j}$-模同构 ψ_i, ψ_j:

$$\begin{array}{ccc} & (M_i)_{f_i f_j} & \\ & {\scriptstyle \psi_i} \swarrow \quad \downarrow {\scriptstyle \varphi_{ij}} & \\ M_{ij} & & \\ & {\scriptstyle \psi_j} \nwarrow \quad \swarrow & \\ & (M_j)_{f_i f_j} & \end{array}$$

定义 A-模 $C^0 \coloneqq \prod\limits_{i \in I} M_i$, $C^1 \coloneqq \prod\limits_{(i,j) \in I^2} M_{ij}$, 其中 $I = \{1, \dots, n\}$. 定义模同态

$$\begin{aligned} d^0 \colon C^0 &\longrightarrow C^1 \\ (x_i) &\longmapsto (x_{ij}) \end{aligned}$$

其中 $x_{ij}=\psi_j(x_j)-\psi_i(x_i)\in M_{ij}$. 令 $M\coloneqq\operatorname{Ker}d^0$, 则有 A-模的左正合列

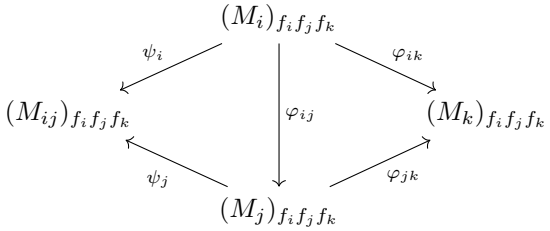
$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\psi}C^0\xrightarrow{d^0}C^1.$$

其中 ψ 为自然的包含同态. 令 $\varphi_i\colon M\longrightarrow M_i$ 为复合同态 $M\xrightarrow{\psi}C^0\xrightarrow{\pi_i}M_i$, 其中 π_i 为投影同态. 下面证明 φ_i 诱导的 A_{f_i}-模同态 $M_{f_i}\longrightarrow M_i$ 为满足要求的同构.

对任意 $k\in I$, $\mathcal{U}^k\coloneqq\{D(f_if_k)\mid i\in I\}$ 为 $D(f_k)\simeq\operatorname{Spec}A_{f_k}$ 的一个主开集形成的开覆盖. 考虑在这个开覆盖下 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M_k}$ 的 Čech 复形的前几项:

$$0\longrightarrow M_k\xrightarrow{\delta^{-1}}\prod_{i\in I}(M_k)_{f_kf_i}\xrightarrow{\delta^0}\prod_{(i,j)\in I^2}(M_k)_{f_kf_if_j}.$$

$\forall\, i\in I$, 我们有同构 $\varphi_{ik}\colon(M_i)_{f_if_k}\xrightarrow{\sim}(M_k)_{f_kf_i}$. 对任意 $i,j\in I$, 交换图表



给出了同构 $\varphi_{ik}\circ\psi_i^{-1}=\varphi_{jk}\circ\psi_j^{-1}\colon(M_{ij})_{f_if_jf_k}\xrightarrow{\sim}(M_k)_{f_if_jf_k}$. 由此可以验证有交换图表

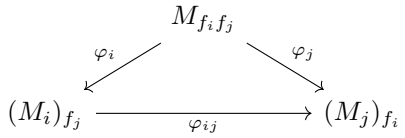
$$\begin{array}{ccc}(C^0)_{f_k} & \xrightarrow{\quad d^0\quad} & (C^1)_{f_k}\\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr\\ \displaystyle\prod_{i\in I}(M_k)_{f_kf_i} & \xrightarrow{\delta^0} & \displaystyle\prod_{(i,j)\in I^2}(M_k)_{f_kf_if_j}\end{array}$$

进而得到交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}0 & \longrightarrow & M_{f_k} & \longrightarrow & (C^0)_{f_k} & \xrightarrow{\quad d^0\quad} & (C^1)_{f_k}\\ & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow\wr\\ 0 & \longrightarrow & M_k & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i\in I}(M_k)_{f_kf_i} & \xrightarrow{\delta^0} & \displaystyle\prod_{(i,j)\in I^2}(M_k)_{f_kf_if_j}\end{array}$$

由这个图表的交换性可以验证同构 $M_{f_k}\xrightarrow{\sim}M_k$ 由 $\varphi_k\colon M\longrightarrow M_k$ 在 f_k 处作局部化

得到. 再由 $d^0(\psi(M))=0$ 以及 d^0 的定义, 对任意 $i,j\in I$ 有交换图表



最后, 容易看到满足命题中条件的 A-模 M 均同构于 $C^0\xrightarrow{d^0}C^1$ 的核, 由此得到 M 在同构意义下是唯一的. □

注意到如果 $\mathcal{U}=\{D(f_i)\mid i=1,\dots,n\}$ 为 $\operatorname{Spec}A$ 的一个主开集形成的有限开覆盖, 令 $B=A_{f_1}\times\cdots\times A_{f_n}$, 则 $A\longrightarrow B$ 为忠实平坦同态. 并且对任意 A-模 M, $M\otimes_A B\simeq\prod_{i=1}^n M_{f_i}$. 这提示我们可以将主开集形成的开覆盖 $\mathcal{U}$ 推广为忠实平坦的同态 $A\longrightarrow B$, 将局部化诱导的同态 $M\longrightarrow\prod_{i=1}^n M_{f_i}$ 推广为同态 $M\longrightarrow M\otimes_A B$, $x\longmapsto x\otimes 1$. 相应的也可以研究模的粘合问题. 为了处理更多的情形, 我们从层的扩张的角度来看这个问题. 先引入一些概念.

定义 7.4.1 设 A 为环. 我们指定一族 A-代数 $\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, 并且对任意 $B,C\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, 指定一个满足如下条件的 A-代数同态集合 $\operatorname{Mor}(B,C)$:

(i) $\forall\ B\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, 恒等同态 $\mathrm{id}\in\operatorname{Mor}(B,C)$.

(ii) $\forall\ B,C,D\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, $\forall\ \varphi\in\operatorname{Mor}(B,C)$, $\forall\ \psi\in\operatorname{Mor}(C,D)$, 有 $\psi\circ\varphi\in\operatorname{Mor}(B,D)$.

这样给出的一组数据称为 A-代数范畴的一个子范畴, 记为 $\mathcal{I}$. 有时我们也将 $\operatorname{Mor}(B,C)$ 记作 $\operatorname{Mor}_{\mathcal{I}}(B,C)$.

定义 7.4.2 设 A 为环, $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴的一个子范畴. 一个 $\mathcal{I}$-模层 $\mathcal{F}$ 是指对每个 $B\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, 指定一个 B-模 $\mathcal{F}(B)$, 对每个 $\varphi\in\operatorname{Mor}(B,C)$, 指定一个 Abel 群同态 $\mathcal{F}(B)\xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)}\mathcal{F}(C)$, 并且满足如下条件的一组数据:

(i) $\forall\ B\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, $\mathcal{F}(\mathrm{id})=\mathrm{id}$.

(ii) $\forall\ B,C,D\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, $\forall\ \varphi\in\operatorname{Mor}(B,C)$, $\forall\ \psi\in\operatorname{Mor}(C,D)$, $\mathcal{F}(\psi\circ\varphi)=\mathcal{F}(\psi)\circ\mathcal{F}(\varphi)$.

(iii) $\forall\ B,C\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, $\forall\ \varphi\in\operatorname{Mor}(B,C)$, $\mathcal{F}(\varphi)$ 满足 $\mathcal{F}(\varphi)(bx)=\varphi(b)\mathcal{F}(\varphi)(x)$, $\forall\ b\in B,x\in\mathcal{F}(B)$. 即通过 φ 将 C 看作 B-代数之后, $\mathcal{F}(\varphi)$ 为 B-模同态. 并且 $\mathcal{F}(\varphi)$ 诱导的 C-模同态 $\mathcal{F}(B)\otimes_B C\longrightarrow\mathcal{F}(C)$, $x\otimes c\longmapsto c\mathcal{F}(\varphi)(x)$ 为 C-模同构. 该同构仍记为 $\mathcal{F}(\varphi)$.

直观上, 我们可以将 $\mathcal{I}$ 看作一些 A-代数组成的节点, 以及这些节点之间由 A-代数同态给出的一些箭头. 而一个 $\mathcal{I}$-模层 $\mathcal{F}$ 可以看作在每个节点 B 处放一个 B-模 $\mathcal{F}(B)$, 并且对每个箭头 $\varphi\in\operatorname{Mor}(B,C)$, 相应的放一个箭头 $\mathcal{F}(\varphi)\colon\mathcal{F}(B)\longrightarrow\mathcal{F}(C)$, 满足一定的相容性条件和刚性条件 ($\mathcal{F}(\varphi)$ 诱导模同构).

定义 7.4.3 设 A 为环, $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴的一个子范畴. 设 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 均为 $\mathcal{I}$-模层. 一个同态 $f\colon\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 是指对每个 $B\in\operatorname{Ob}(\mathcal{I})$, 指定一个 B-模同态 $f_B\colon\mathcal{F}(B)\longrightarrow\mathcal{G}(B)$, 使得

对任意 $B,C\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 以及任意 $\varphi\in \mathrm{Mor}(B,C)$, 均有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{f_B} & \mathcal{G}(B) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(\varphi)} \\ \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{f_C} & \mathcal{G}(C) \end{array}$$

如果对每个 $B\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, f_B 均为 B-模同构, 则称 f 为同构.

设 A 为环, $\mathcal{I},\mathcal{J}$ 均为 A-代数的子范畴. 我们称 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{I}$ 的子范畴, 记作 $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}$, 如果每个 $B\in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ 均在 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 中, 并且对任意 $B,C\in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, 有 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{J}}(B,C)\subset \mathrm{Mor}_{\mathcal{I}}(B,C)$. 如果 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{I}$ 的子范畴, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{I}$-模层, 我们记 $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{J}}$ 为 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{J}$ 上的限制, 即对于 $B\in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{J}}(B)=\mathcal{F}(B)$, 对于 $\varphi\in \mathrm{Mor}_{\mathcal{J}}(B,C)$, $\mathcal{F}\mid_{\mathcal{J}}(\varphi)=\mathcal{F}(\varphi)$.

例 7.4.1

- 设 A 为环, 取 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 为所有的 A-代数, 对 $B,C\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 取 $\mathrm{Mor}(B,C)$ 为所有 B 到 C 的 A-代数同态形成的集合. 这样得到的 $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴, 我们将其记为 $\mathcal{I}_A$. 设 M 为 A-模. 对每个 $B\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_A)$, 令 $\mathcal{F}(B):=M\otimes_A B$. 对任意 $B,C\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_A)$, 以及每个 $\varphi\in \mathrm{Mor}(B,C)$, 令

  $$\mathcal{F}(\varphi)=1\otimes\varphi\colon M\otimes_A B\longrightarrow M\otimes_A C.$$

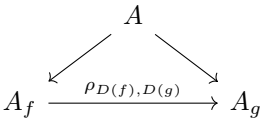
  这样得到一个 $\mathcal{I}_A$-模层, 我们将其记为 $\mathcal{F}_M$. 不难看到对任意 $\mathcal{I}_A$-模层 $\mathcal{F}$, 令 $M=\mathcal{F}(A)$, 则 $\mathcal{F}$ 同构于 $\mathcal{F}_M$.

- 设 $A\longrightarrow B$ 为环同态. 取 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 为所有满足如下条件的 A-代数 C 形成的族: 存在 A-代数同态 $B\longrightarrow C$. 对 $C,D\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 令 $\mathrm{Mor}(C,D)$ 为 C 到 D 的所有 A-代数同态形成的集合. 这样得到的 $\mathcal{I}$ 为 A-代数范畴 $\mathcal{I}_A$ 的一个子范畴, 我们将其记为 $\mathcal{I}_{B/A}$. 对于 $C\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 由于可能存在不止一个从 B 到 C 的 A-代数同态, 从而没有一个典范的办法将 C 看作 B-代数, 这说明 $\mathcal{I}_B$ 一般不能看作 $\mathcal{I}_A$ 的子范畴.

- 设 A 为环, 取 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ 为所有的局部化 A_f, $f\in A$. 对 $A_f,A_g\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 取 $\mathrm{Mor}(A_f,A_g)$ 为如下集合:

  $$\mathrm{Mor}(A_f,A_g)=\begin{cases}\varnothing, & \text{如果} D(g)\not\subseteq D(f);\\ \{\rho_{D(f),D(g)}\}, & \text{如果} D(g)\subseteq D(f).\end{cases}$$

其中 $\rho_{D(f),D(g)}$ 为使下面图表交换的唯一环同态:



这样得到一个 A-代数的子范畴 $\mathcal{I}$. 如果 M 为 A-模, 对每个 $A_f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, 令 $\mathcal{F}(A_f) = M_f$. 对 $\rho_{D(f),D(g)} \in \mathrm{Mor}(A_f, A_g)$, 令

$$\mathcal{F}(\rho_{D(f),D(g)}) = 1 \otimes \rho_{D(f),D(g)} \colon M \otimes A_f = M_f \longrightarrow M \otimes_A A_g = M_g.$$

容易看到, 这样得到的 $\mathcal{I}$-模层 $\mathcal{F}$ 本质上就是2.5 节中定义的 $\mathcal{B}$-层 $\widetilde{M}$.

现在我们可以将模的粘合问题重新叙述为如下的将一个节点 B 处的模扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层的问题.

问题 7.4.1 *设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模. 那么 M 是否可以扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层? 即是否存在 $\mathcal{I}_A$-模层 $\mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{F}(B)$ 与 M 作为 B-模同构?*

我们将分两步处理这个问题. 第一步考察 M 怎样扩张为 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层, 第二步考察 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层怎样扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层. 为叙述方便, 先引入一些记号和约定.

约定 7.4.1 设 $f\colon A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 A-模. 我们将 B-模 $M \otimes_A B$ 记为 f_*M. 对 A-模同态 $\varphi\colon M \longrightarrow N$, 将 B-模同态 $M \otimes_A B \xrightarrow{\varphi\otimes 1} N \otimes_A B$ 记为 $f_*\varphi$. 设 $g\colon B \longrightarrow C$ 为另一个环同态, 我们通过同构 $(M \otimes_A B) \otimes_B C \xrightarrow{\sim} M \otimes_A C$, $(x \otimes b) \otimes c \longmapsto x \otimes (g(b)c)$ 将 $(M \otimes_A B) \otimes_B C$ 等同于 $M \otimes_A C$. 这样得到等式 $g_*f_*M = (g \circ f)_*M$, $g_*f_*\varphi = (g \circ f)_*\varphi$.

设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, 定义如下一系列 A-代数同态.

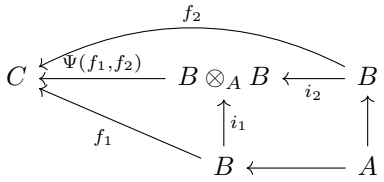
$$\begin{aligned}
i_1&\colon\ B \longrightarrow B \otimes_A B,\ b \longmapsto b \otimes 1\\
i_2&\colon\ B \longrightarrow B \otimes_A B,\ b \longmapsto 1 \otimes b\\
i_{12}&\colon\ B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 \otimes b_2 \otimes 1\\
i_{23}&\colon\ B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto 1 \otimes b_1 \otimes b_2\\
i_{13}&\colon\ B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 \otimes 1 \otimes b_2\\
j_1&\colon\ B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b \longmapsto b \otimes 1 \otimes 1\\
j_2&\colon\ B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b \longmapsto 1 \otimes b \otimes 1\\
j_3&\colon\ B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B,\ b \longmapsto 1 \otimes 1 \otimes b.
\end{aligned}$$

回到层的扩张, 我们先处理将节点 B 处的模扩张为 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层的问题.

命题 7.4.3 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模. 设 $\varphi\colon i_{1*}M \xrightarrow{\sim} i_{2*}M$ 为 $B \otimes_A B$-模同构, 使得 $i_{13*}\varphi = (i_{23*}\varphi) \circ (i_{12*}\varphi)$. 则存在 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层 $\mathcal{F}$, 以及 B-模同构 $\psi\colon M \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(B)$, 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} i_{1*}M & & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & & i_{2*}M \\ {\scriptstyle i_{1*}\psi}\downarrow\wr & & & & \wr\downarrow{\scriptstyle i_{2*}\psi} \\ i_{1*}\mathcal{F}(B) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{F}(i_1)} & \mathcal{F}(B \otimes_A B) & \xleftarrow[\sim]{\mathcal{F}(i_2)} & i_{2*}\mathcal{F}(B) \end{array}$$

证明 对每个 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, 对任意 f_1, f_2 为 B 到 C 的 A-代数同态, 张量积的万有性质给出了唯一的 A-代数同态 $\Psi(f_1, f_2)\colon B \otimes_A B \longrightarrow C$ 使得下图交换:



由此得到同构 $\Psi(f_1, f_2)_*\varphi\colon f_{1*}M = \Psi(f_1, f_2)_* i_{1*}M \xrightarrow{\sim} \Psi(f_1, f_2)_* i_{2*}M = f_{2*}M$. 由 φ 所满足的条件, 可知对任意三个 B 到 C 的 A-代数同态 f_1, f_2, f_3, 有交换图表:

$$\begin{array}{ccc} & f_{1*}M & \\ {\scriptstyle \Psi(f_1,f_2)_*\varphi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \Psi(f_1,f_3)_*\varphi} \\ f_{2*}M & \xrightarrow{\Psi(f_2,f_3)_*\varphi} & f_{3*}M \end{array}$$

对每个 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, 我们选取一个 A-代数同态 $f_C\colon B \longrightarrow C$, 并定义 $\mathcal{F}(C) \coloneqq f_{C*}M$. 对任意 $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{I}_{B/A}}(C, D)$, D-模同构

$$\Psi(g \circ f_C, f_D)_*\varphi\colon g_*\mathcal{F}(C) = g_* f_{C*}M \xrightarrow{\sim} f_{D*}M = \mathcal{F}(D)$$

和自然同态 $\mathcal{F}(C) \longrightarrow g_*\mathcal{F}(C) = \mathcal{F}(C) \otimes_C D$, $x \longmapsto x \otimes 1$ 的复合诱导了同态 $\mathcal{F}(g)\colon \mathcal{F}(C) \longrightarrow \mathcal{F}(D)$. 直接验证可知 $\mathcal{F}$ 为一个 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层. 令

$$\psi \coloneqq \Psi(\mathrm{id}, f_B)_*\varphi\colon M = \mathrm{id}_*\, M \xrightarrow{\sim} f_{B*}M = \mathcal{F}(B),$$

可以验证 ψ 满足命题中要求的交换图表. □

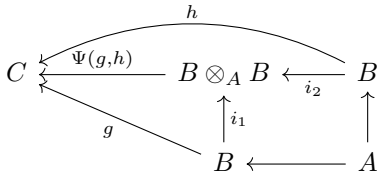
再处理 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层扩张为 $\mathcal{I}_A$-模层的问题.

命题 7.4.4 设 $A \longrightarrow B$ 为忠实平坦的环同态, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层, 则存在 A-模 N, 使得 $\mathcal{I}_A$-模层 $\mathcal{F}_N$ 满足 $\mathcal{F}_N\,|_{\mathcal{I}_{B/A}}$ 同构于 $\mathcal{F}$. 这样的 A-模 N 在同构意义下是唯一的.

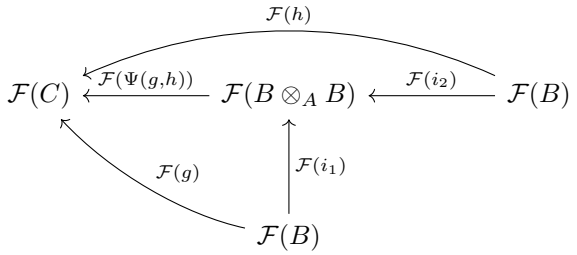
证明 先证 N 的存在性. 令 N 为如下 A-模:

$$N \coloneqq \{x \in \mathcal{F}(B) \mid \mathcal{F}(i_1)(x) = \mathcal{F}(i_2)(x) \in \mathcal{F}(B \otimes_A B)\}.$$

记 $i\colon N \hookrightarrow \mathcal{F}(B)$ 为相应的包含映射. 下面构造 $\mathcal{F}_N \mid_{\mathcal{I}_{B/A}}$ 到 $\mathcal{F}$ 的同态. 对任意 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, 任取 $g\colon B \longrightarrow C$ 为 A-代数同态, 则 A-模同态 $N \xrightarrow{i} \mathcal{F}(B)$ 和同态 $\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(C)$ 的复合给出了 A-模同态 $N \longrightarrow \mathcal{F}(C)$, 从而诱导了 C-模同态 $f_C\colon \mathcal{F}_N(C) = N \otimes_A C \longrightarrow \mathcal{F}(C)$. 现在验证 f_C 不依赖 A-代数同态 g 的选取. 设 $h\colon B \longrightarrow C$ 为另一个 A-代数同态, 则由张量积的万有性质, 可已找到环同态 $\Psi(g,h)\colon B \otimes_A B \longrightarrow C$, 使得下图表交换:



由此得到交换图表



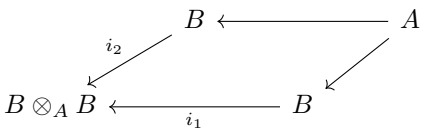
由 N 的定义即知 f_C 不依赖于 A-代数同态 $B \longrightarrow C$ 的选取. 直接验证可得这些同态 f_C 给出了一个 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层同态 $f\colon \mathcal{F}_N \mid_{\mathcal{I}_{B/A}} \longrightarrow \mathcal{F}$. 只需再验证对每个 $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_{B/A})$, f_C 为 C-模同构. 而由于 $\mathcal{F}(C) \simeq \mathcal{F}(B) \otimes_B C$, 又只需验证包含同态 $i\colon N \hookrightarrow \mathcal{F}(B)$ 诱导了 B-模同构 $N \otimes_A B \simeq \mathcal{F}(B)$. 为此, 考虑如下 A-模复形:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(i_2) - \mathcal{F}(i_1)} \mathcal{F}(B \otimes_A B).$$

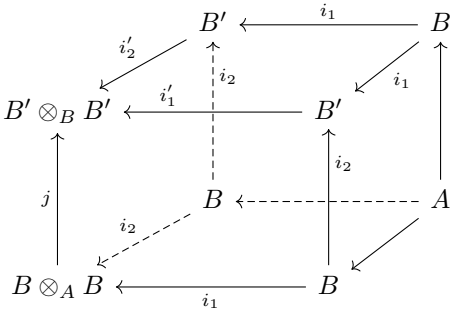
由 N 的定义, 该复形是左正合的. 作用 $\cdot \otimes_A B$, 由 B 为平坦 A-代数得到左正合列

$$0 \longrightarrow N \otimes_A B \xrightarrow{i \otimes 1} \mathcal{F}(B) \otimes_A B \xrightarrow{(\mathcal{F}(i_2) - \mathcal{F}(i_1)) \otimes 1} \mathcal{F}(B \otimes_A B) \otimes_A B. \tag{7.4–3}$$

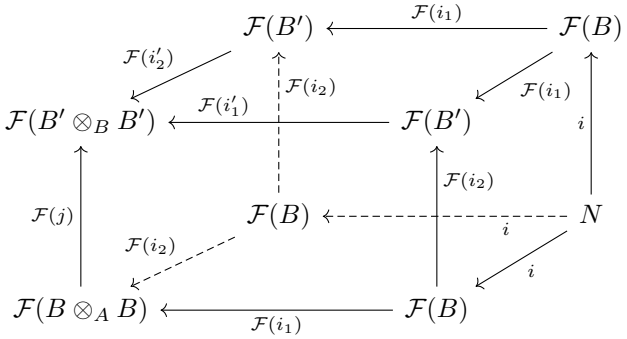
令 $B' = B \otimes_A B$, 将交换图表



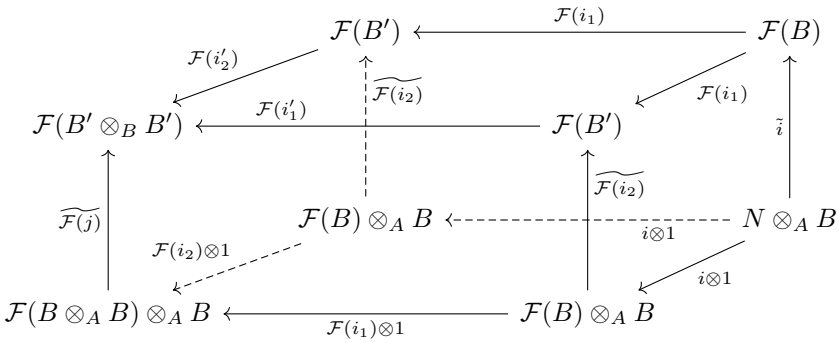
基变换到 B 上 (即作用 $\cdot \otimes_A B$), 则有如下交换图表:



其中 $B' \otimes_B B'$ 的定义中, B 到左边和右边的 B' 的同态均为 i_1, 并且 i_1' 为同态 $b' \mapsto b' \otimes 1$, i_2' 为同态 $b' \mapsto 1 \otimes b'$, j 为同态 $b_1 \otimes b_2 \mapsto (1 \otimes b_1) \otimes (1 \otimes b_2)$. 该交换图表给出了如下 A-模的交换图表:



这又诱导了如下交换图表:



其中竖直方向的同态含义为:

$\tilde{i}\colon N\otimes_A B\longrightarrow \mathcal{F}(B), x\otimes b\longmapsto bi(x)$.

$\widetilde{\mathcal{F}(i_2)}\colon \mathcal{F}(B)\otimes_A B\longrightarrow \mathcal{F}(B'), x\otimes b\longmapsto b\mathcal{F}(i_2)(x)$, 其中 B'-模 $\mathcal{F}(B')$ 通过 i_1 看作 B-模.

$\widetilde{\mathcal{F}(j)}\colon \mathcal{F}(B\otimes_A B)\otimes_A B\longrightarrow \mathcal{F}(B'\otimes_B B'), x\otimes b\longmapsto b\mathcal{F}(j)(x)$, 其中 $B'\otimes_B B'$-模 $\mathcal{F}(B'\otimes_B B')$ 通过 $i_2'\circ i_1=i_1'\circ i_1$ 看作 B-模.

由 $\mathcal{I}_{B/A}$-模层的定义可以验证 $\widetilde{\mathcal{F}(i_2)}$ 和 $\widetilde{\mathcal{F}(j)}$ 均为同构. 由 Amitsur 复形的正合性 (推论 7.4.1) 可知以下为左正合列:

$$0\longrightarrow \mathcal{F}(B)\xrightarrow{\mathcal{F}(i_1)}\mathcal{F}(B')\xrightarrow{\mathcal{F}(i_2')-\mathcal{F}(i_1')}\mathcal{F}(B'\otimes_B B')$$

再结合左正合列 (7.4–3) 即得到 $\tilde{i}\colon N\otimes_A B\longrightarrow \mathcal{F}(B)$ 为 B-模同构. 这就验证了 N 的存在性.

设 N' 为另一个满足要求的 A-模. 不难看到存在 A-模同态 $f\colon N'\longrightarrow N$ 使得 $f\otimes 1\colon N'\otimes_A B\longrightarrow N\otimes_A B$ 为 B-模同构. 从而由 $A\longrightarrow B$ 忠实平坦可知 f 为 A-模同构. 这样证明了 N 在同构意义下的唯一性. □

综合命题 7.4.3 和 命题 7.4.4 及其证明, 我们最终得到如下定理.

定理 7.4.2 (模的忠实平坦下降) 设 $A\longrightarrow B$ 为忠实平坦的环同态, M 为 B-模. 设 $\varphi\colon i_{1*}M\xrightarrow{\sim} i_{2*}M$ 为 $B\otimes_A B$-模同构, 使得 $i_{13*}\varphi=(i_{23*}\varphi)\circ(i_{12*}\varphi)$. 则存在同构意义下唯一的 A-模 N, 使得存在 B-模同构 $\psi\colon N\otimes_A B\xrightarrow{\sim} M$ 满足如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} i_{1*}M & & \xrightarrow{\quad\varphi\quad}_{\sim} & & i_{2*}M \\ \wr\uparrow{\scriptstyle i_{1*}\psi} & & & & {\scriptstyle i_{2*}\psi}\uparrow\wr \\ i_{1*}(N\otimes_A B) & = & N\otimes_A B\otimes_A B & = & i_{2*}(N\otimes_A B) \end{array}$$

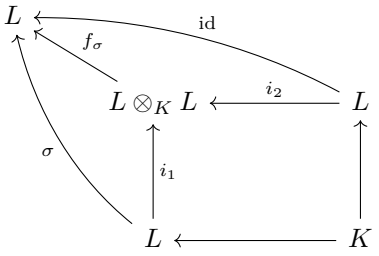
事实上, 满足上述条件的 N 可取为 M 的 A-子模 $\{x\in M\mid \varphi(x\otimes 1)=x\otimes 1\in i_{2*}M\}$,

此时同构 ψ 可由自然的包含同态 $N \hookrightarrow M$ 所诱导.

该定理中满足 $i_{13*}\varphi = (i_{23*}\varphi) \circ (i_{12*}\varphi)$ 的 $B \otimes_A B$-模同构 $\varphi\colon i_{1*}M \xrightarrow{\sim} i_{2*}M$ 称为 M 关于 $A \longrightarrow B$ 的**下降资料**. 如果满足该定理条件的 A-模 N 存在, 则称这个下降资料是有效的.

7.4.3 Galois 下降 本小节中我们固定域的有限 Galois 扩张 L/K, 其 Galois 群记为 $\mathrm{Gal}(L/K)$. 设 V 为 L-线性空间, 我们分析 V 关于 $K \longrightarrow L$ 的下降资料.

对 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 张量积的万有性质给出满足如下交换图表的唯一环同态 f_σ:



其中 $i_1\colon L \longrightarrow L \otimes_K L$ 为环同态 $x \mapsto x \otimes 1$, 而 $i_2\colon L \longrightarrow L \otimes_K L$ 为环同态 $x \mapsto 1 \otimes x$. 我们用 $\prod\limits_\sigma L$ 表示 L 的乘积环, 其中 σ 取遍 $\mathrm{Gal}(L/K)$. 如果 $a \in \prod\limits_\sigma L$ 在每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ 处的分量为 $a_\sigma \in L$, 则我们将 a 记为 (a_σ).

命题 7.4.5 映射 $(f_\sigma)\colon L \otimes_K L \longrightarrow \prod\limits_\sigma L,\ x \longmapsto (f_\sigma(x))$ 为环同构.

证明 设 $L = K(\alpha)$, 并且 α 在 K 上的极小多项式为 $g(x) \in K[x]$. 则在 $L[x]$ 中有分解 $g(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$. 设 $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, 并且 $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i,\ \forall\ 1 \leq i \leq n$. 我们有 K-代数同构 $L \xrightarrow{\sim} K[x]/(g(x))$, $\alpha \longmapsto x$. 利用 i_2 将 $L \otimes_K L$ 看作 L-代数, 则有 L-代数同构 $L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L[x]/(g(x))$, $\alpha \otimes \lambda \longmapsto \lambda x$. 另一方面, 中国剩余定理给出 L-代数同构

$$L[x]/(g(x)) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} L[x]/(x - \alpha_i) \simeq \prod_{i=1}^{n} L.$$

综合以上同构得到 L-代数同构 $L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{i=1}^{n} L$, $\alpha \otimes \lambda \longmapsto (\alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda, \ldots, \alpha_n\lambda)$. 不难看到这就是映射 (f_σ). □

定义 7.4.4 对 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 一个映射 $\varphi_\sigma\colon V \longrightarrow V$ 称为 σ-线性同构, 如果 φ_σ 为 Abel 群同构, 并且 $\forall\ a \in L, \forall\ x \in V$, 有 $\varphi_\sigma(ax) = \sigma(a)\varphi_\sigma(x)$.

设 $\varphi\colon i_{1*}V \xrightarrow{\sim} i_{2*}V$ 为 $L \otimes_K L$-模同构, 则对每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 有 L-线性空间同构 $f_{\sigma*}\varphi\colon \sigma_*V \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_*\, V = V$. 注意到 $V \xrightarrow{x \mapsto x \otimes 1} \sigma_*V = V \otimes_L L$ 为 σ-线性同构. 令

φ_σ 为如下复合映射:

$$V \xrightarrow{x\mapsto x\otimes 1} \sigma_* V = V \otimes_L L \xrightarrow{f_{\sigma *}\varphi} V.$$

则 φ_σ 为 σ-线性同构. 不断利用命题 7.4.5, 可以看到 $L \otimes_K L \otimes_K L \simeq \prod_{(\sigma,\tau)} L$, 其中 (σ,τ) 遍历 $\mathrm{Gal}(L/K) \times \mathrm{Gal}(L/K)$. 由此即可验证: φ 为一个下降资料等价于对任意 $\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 有 $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma$. 这样在域的有限 Galois 扩张情形, 定理 7.4.2 可以重新表述为如下形式.

定理 7.4.3 (线性空间的 Galois 下降) 设 V 为 L-线性空间. 对每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 均指定一个 σ-线性同构 $\varphi_\sigma \colon V \longrightarrow V$, 满足: $\forall\, \sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma$. 则存在同构意义下唯一的 K-线性空间 W, 使得有 L-线性空间同构 $\psi \colon W \otimes_K L \xrightarrow{\sim} V$, 满足对任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\varphi_\sigma\quad} & V \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow\wr & & \wr\uparrow{\scriptstyle\psi} \\ W \otimes_K L & \xrightarrow{x\otimes a\mapsto x\otimes\sigma(a)} & W \otimes_K L \end{array} \tag{7.4–4}$$

事实上, W 可取为 $V^{\mathrm{Gal}(L/K)} := \{v \in V \mid \forall\, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K),\ \varphi_\sigma(v) = v\}$, 此时同构 ψ 可由自然的包含同态 $W \hookrightarrow V$ 诱导: $W \otimes_K L \xrightarrow{\psi} V$, $x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$.

取 $V = L$ 为一维线性空间, 可以得到如下推论.

推论 7.4.2 (Hilbert 定理 90) 设对每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 指定 $a_\sigma \in L^*$, 满足:

$$\forall\, \sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(L/K), \quad a_{\tau\sigma} = a_\tau \cdot \tau(a_\sigma).$$

则存在 $t \in L^*$, 使得对每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 有 $a_\sigma = \frac{\sigma(t)}{t}$.

证明 取 $V = L$, 并且对每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 令 $\varphi_\sigma \colon V \longrightarrow V$ 为 σ-线性同构 $x \longmapsto a_\sigma \cdot \sigma(x)$. 则由条件可知对任意 $\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 有 $\varphi_{\tau\sigma} = \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma$. 从而由定理 7.4.3, 可找到 K-线性空间 W 以及 L-线性空间同构 $\psi \colon W \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L$ 满足该定理中的交换图表. 显然 $\dim_K W = 1$, 故我们不妨设 $W = K$. 设 $1 \otimes t \in K \otimes_K L$ 满足 $\psi(1 \otimes t) = 1$. 对每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, 定理 7.4.3 中的交换图表为:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\quad x\longmapsto a_\sigma\cdot\sigma(x)\quad} & L \\ \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ K \otimes_K L & \xrightarrow{x\otimes a\mapsto x\otimes\sigma(a)} & K \otimes_K L \end{array}$$

由该交换图表以及 $\psi(1 \otimes t) = 1$ 不难看到 $a_\sigma = \frac{\sigma(t)}{t}$. □

作为 Galois 下降的另一个应用, 下面讨论 Weil 限制. 设 A 为 L-代数, B 为 K-代数. 我们希望找一个 K-代数 A', 使得 L-代数同态的集合 $\mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B\otimes_K L)$ 与 K-代数同态的集合 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(A', B)$ 之间存在自然的双射. 这样的 A' 可以看作 A 在 Galois 扩张 L/K 下的某种下降.

设 $i\colon L\longrightarrow A$ 为 L-代数 A 的结构同态. 对 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 将复合同态 $L\xrightarrow{\sigma^{-1}}L\xrightarrow{i}A$ 作为新的结构同态, 得到的 L-代数记为 $A^{(\sigma)}$. 注意到 $A^{(\sigma)}$ 和 A 作为环是相同的, 只是结构同态不同, 因此 L 的作用也不同. 另一方面, 根据我们的记号, $\sigma_*A=A\otimes_L L$, 其中张量积中的环同态 $L\longrightarrow L$ 为 σ, 并且通过结构同态 $L\longrightarrow\sigma_*A$, $\lambda\mapsto 1\otimes\lambda$ 将 σ_*A 看作 L-代数. 由此不难验证, $\sigma_*A\longrightarrow A^{(\sigma)}$, $x\otimes\lambda\mapsto\lambda x$ 给出了一个 L-代数同构.

设 $f\colon A\longrightarrow B\otimes_K L$ 为 L-代数同态. 不难看到 $f^{(\sigma)}\colon A^{(\sigma)}\longrightarrow B\otimes_K L$, $x\mapsto(1\otimes\sigma)(f(x))$ 是 L-代数同态, 并且有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f\quad} & B\otimes_K L \\ {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\sigma} \\ A^{(\sigma)} & \xrightarrow{\quad f^{(\sigma)}\quad} & B\otimes_K L \end{array}$$

其中 $A\xrightarrow{\mathrm{id}}A^{(\sigma)}$ 为集合上的恒等映射.

为了将全部 $f^{(\sigma)}$ 的信息整合到一个 L-代数同态中, 我们考虑所有 $A^{(\sigma)}$ 作为 L-代数的张量积. 设 $\mathrm{Gal}(L/K)=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$. 将张量积代数 $A^{(\sigma_1)}\otimes_L A^{(\sigma_2)}\otimes_L\cdots\otimes_L A^{(\sigma_n)}$ 记为 $\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}$. 对每个 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 将典范同态 $A^{(\sigma)}\longrightarrow\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}$ 记为 i_σ. 由代数张量积的万有性质 (命题 2.2.8), 存在唯一的 L-代数同态 $\tilde{f}\colon\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}\longrightarrow B\otimes_K L$, 使得 $\forall\,\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 均有 $f^{(\sigma)}=\tilde{f}\circ i_\sigma$.

对 $\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 由定义可以看到, 集合上的恒等映射 $A^{(\sigma)}\xrightarrow{\mathrm{id}}A^{(\tau\sigma)}$ 是一个 τ-线性同构. 再由张量积的万有性质, 存在唯一的 τ-线性映射 $\varphi_\tau\colon\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}\longrightarrow\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}$, 使得对任意 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 下图为交换图表:

$$\begin{array}{ccc} A^{(\sigma)} & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & A^{(\tau\sigma)} \\ {\scriptstyle i_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{\tau\sigma}} \\ \bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)} & \xrightarrow{\quad\varphi_\tau\quad} & \bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)} \end{array}$$

由唯一性, $\varphi_{\mathrm{id}}=\mathrm{id}$, 并且对任意 τ_1, $\tau_2\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 有 $\varphi_{\tau_1\tau_2}=\varphi_{\tau_1}\circ\varphi_{\tau_2}$. 因此每个 φ_τ 均为 τ-线性同构. $\mathrm{Gal}(L/K)$ 通过这些 φ_τ 作用到 $\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}$ 上. 将 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 作用下的不动点集合 $(\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)})^{\mathrm{Gal}(L/K)}:=\left\{x\in\bigotimes\limits_{\sigma}A^{(\sigma)}\mid\varphi_\tau(x)=x,\ \forall\,\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)\right\}$ 记为

$\mathrm{Res}_{L/K} A$. 易知 $\mathrm{Res}_{L/K} A$ 是 $\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}$ 的 K-子代数. 下面的定理说明 $\mathrm{Res}_{L/K} A$ 就是上面要找的 A 的某种下降.

定理 7.4.4 设 A 为 L-代数, 则 K-代数 $\mathrm{Res}_{L/K} A$ 满足如下万有性质:

(i) 对任意 K-代数 B, 存在集合的双射 $\Psi_B\colon \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B\otimes_K L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathrm{Res}_{L/K} A, B)$.

(ii) 对任意 K-代数同态 $\psi\colon B \longrightarrow C$, 以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B\otimes_K L) & \xrightarrow{g\mapsto(\psi\otimes 1)\circ g} & \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, C\otimes_K L) \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_C} \\ \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathrm{Res}_{L/K} A, B) & \xrightarrow{f\mapsto\psi\circ f} & \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathrm{Res}_{L/K} A, C) \end{array}$$

证明 设 B 为 K-代数. 将 $\mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L)$ 的如下子集

$$\left\{ g \in \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L) \mid \forall\, \tau\in \mathrm{Gal}(L/K),\ g\circ\varphi_\tau = (1\otimes\tau)\circ g \right\}$$

记为 $\mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$. 由前面的讨论, $\forall\, f\in \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B\otimes_K L)$, 存在唯一的 L-代数同态 $\tilde{f}\colon \bigotimes_\sigma A^{(\sigma)} \longrightarrow B\otimes_K L$, 使得 $\forall\,\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 均有 $f^{(\sigma)} = \tilde{f}\circ i_\sigma$. 不难看到 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$. 从而 $f\mapsto\tilde{f}$ 给出了集合间的如下映射

$$\begin{aligned} \Psi_1\colon \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B\otimes_K L) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L)^{\mathrm{Gal}(L/K)} \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

由张量积的万有性质可以看到 Ψ_1 为双射. 另一方面, 通过单同态 $B\hookrightarrow B\otimes_K L$, $b\mapsto b\otimes 1$ 将 B 看作 $B\otimes_K L$ 的 K-子代数, 则任意 $g\in \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ 满足 $g(\mathrm{Res}_{L/K} A)\subset B$. 从而将 g 对应到其在 $\mathrm{Res}_{L/K} A$ 上的限制给出了映射:

$$\begin{aligned} \Psi_2\colon \mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(\bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}, B\otimes_K L)^{\mathrm{Gal}(L/K)} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathrm{Res}_{L/K} A, B) \\ g &\longmapsto g\,|_{\mathrm{Res}_{L/K} A} \end{aligned}$$

由 Galois 下降 (定理 7.4.3) 可知 $(\mathrm{Res}_{L/K} A)\otimes_K L \xrightarrow{x\otimes\lambda\mapsto\lambda x} \bigotimes_\sigma A^{(\sigma)}$ 为 L-代数同构, 并且对任意 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 有交换图表 (7.4–4) 成立. 由此容易得到 Ψ_2 为集合间的双

射. 令 $\Psi_B \coloneqq \Psi_2 \circ \Psi_1$ 即得到 (i) 中的双射. 由该双射的构造, 通过直接验证即得 (ii).□

$\mathrm{Res}_{L/K} A$ 称为 L-代数 A 在 Galois 扩张 L/K 下的 **Weil 限制**. 对于具体的 A, 为了确定 $\mathrm{Res}_{L/K} A$, 一般并不利用定义直接计算, 而是寻找满足相同万有性质的 K-代数 A', 然后利用满足同样万有性质的对象在同构意义下唯一这个一般原理来得到 $A' \simeq \mathrm{Res}_{L/K} A$. 下面的命题就展示了这样的计算过程.

命题 7.4.6 设 $A = L[x_1, \dots, x_s]/I$ 为有限生成 L-代数, 并且理想 I 的一组生成元为 $f_1, \dots, f_m$. 设 L 的一组 K-线性空间基为 $e_1, \dots, e_n$. 则有 K-代数同构

$$\mathrm{Res}_{L/K} A \simeq K[x_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq n]/J,$$

其中理想 J 由 $f_i^{(j)}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ 生成, 而这些 $f_i^{(j)}$ 由以下在 L-代数 $L[x_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq n]$ 中成立的等式确定:

$$\begin{cases} y_i \coloneqq \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^{(j)} e_j,\ \forall\ i = 1, \dots, s. \\ f_i(y_1, \dots, y_s) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_i^{(j)}(x_1^{(1)}, \dots, x_s^{(n)}) e_j,\ \forall\ i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

证明 设 B 为 K-代数. 由多项式环的万有性质和商环的万有性质, 有集合的双射

$$\mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B \otimes_K L) \simeq \{(b_1, \dots, b_s) \in (B \otimes_K L)^s \mid f_i(b_1, \dots, b_s) = 0,\ \forall\ 1 \leq i \leq m\}.$$

注意到 $B \otimes_K L = Be_1 + \cdots + Be_n$ 为自由 B-模, 一组基为 $e_1, \dots, e_n$. 对 $(b_1, \dots, b_s) \in (B \otimes_K L)^s$, 设 $b_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_i^{(j)} e_j$, 其中 $b_i^{(j)} \in B$. 则 $f_i(b_1, \dots, b_s) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_i^{(j)}(b_1^{(1)}, \dots, b_s^{(n)}) e_j$. 从而 $f_i(b_1, \dots, b_s) = 0 \iff f_i^{(1)}(b_1^{(1)}, \dots, b_s^{(n)}) = \cdots = f_i^{(n)}(b_1^{(1)}, \dots, b_s^{(n)}) = 0$. 由此得到集合 $\{(b_1, \dots, b_s) \in (B \otimes_K L)^s \mid f_i(b_1, \dots, b_s) = 0,\ \forall\ 1 \leq i \leq m\}$ 与 $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[x_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq n]/J, B)$ 之间的双射. 从而得到双射:

$$\mathrm{Hom}_{L\text{-alg}}(A, B \otimes_K L) \simeq \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(K[x_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq n]/J, B).$$

由这个双射的构造可知其满足定理 7.4.4 中的万有性质. 由于满足同一个万有性质的代数对象在同构意义下总是唯一的, 从而有 K-代数同构

$$\mathrm{Res}_{L/K} A \simeq K[x_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq n]/J.$$

□

例 7.4.2 对以下 $\mathbb{C}$-代数 A, 我们计算 $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} A$.

(i) $A = \mathbb{C}$. 由命题 7.4.6 或直接由万有性质可知 $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} A \simeq \mathbb{R}$.

(ii) $A = \mathbb{C}[x]$. 由命题 7.4.6 可知 $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} A \simeq \mathbb{R}[x_1, x_2]$.

(iii) $A=\mathbb{C}[x]_x=\mathbb{C}[x,x^{-1}]$ 为 $\mathbb{C}[x]$ 在 x 处的局部化. 注意到 $A\simeq\mathbb{C}[x_1,x_2]/(x_1x_2-1)$, 由命题 7.4.6 可知 $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}A\simeq\mathbb{R}[x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}]/J$, 其中 $J=(f_1,f_2)$, 而 f_j 由下式确定:

$$\begin{cases} x_1=x_{11}+x_{12}i,\\ x_2=x_{21}+x_{22}i,\\ x_1x_2-1=f_1+f_2i. \end{cases}$$

由此知 $f_1=x_{11}x_{21}-x_{12}x_{22}-1$, $f_2=x_{11}x_{22}+x_{12}x_{21}$. 通过类比复数运算可以看到, $f_1=f_2=0$ 蕴含以下等式

$$\begin{cases} (x_{11}^2+x_{12}^2)(x_{21}^2+x_{22}^2)=1,\\ x_{21}=\frac{x_{11}}{x_{11}^2+x_{12}^2},\\ x_{22}=\frac{-x_{12}}{x_{11}^2+x_{12}^2}. \end{cases}$$

由此即知 $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}A\simeq\mathbb{R}[x_{11},x_{12},\frac{1}{x_{11}^2+x_{12}^2}]$. 其中后者为多项式环 $\mathbb{R}[x_{11},x_{12}]$ 在元素 $x_{11}^2+x_{12}^2$ 处的局部化.

习题

1. 设 $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ 为 A-模短正合列. 试讨论 M_1,M_2,M_3 中已知两个为平坦 A-模时能否推出第三个也为平坦 A-模.

2. 设 A 为 Noether 环, I 为理想, M 为 A-模. 设 M/IM 为平坦 A/I-模, 且 $\mathrm{Tor}_1^A(A/I,M)=0$.

(i) 证明: 对任意的有限 A/I-模 N, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(N,M)=0$.

(ii) 证明: 对任意正整数 $s\geq 1$, 对任意的有限 A/I^s- 模 N, 有 $\mathrm{Tor}_1^A(N,M)=0$.

(iii) 进一步假设对任意的有限 A-模 N, 有 $N\otimes_A M$ 为 I-进可分的 (即 $\bigcap_{s\geq 1}I^s(N\otimes_A M)=0$). 证明 M 为平坦 A-模.

3. 设 A 为环, M 为平坦 A-模. 设 N_1, N_2 均为 A-模 N 的子模. 证明: 作为 $N\otimes_A M$ 的子模, 有 $(N_1\otimes_A M)\bigcap(N_2\otimes_A M)=(N_1\bigcap N_2)\otimes_A M$.

4. 设 A 为环, M 为平坦 A-模. 设 P 为系数在 A 中的 $m\times n$ 矩阵, x 为系数在 M 中的 n 维列向量, 并且 $Px=0$. 证明: 存在系数在 A 中的 n 维列向量 $x_1,\ldots,x_s$ 以及 M 中的元 $y_1,\ldots,y_s$, 使得 $x=\sum_{i=1}^s x_iy_i$, 并且 $Px_i=0$, $\forall\, i=1,\ldots,s$.

5. 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 并且结构同态 $\varphi\colon A\longrightarrow B$ 为平坦同态. 证明 $\varphi^*\colon\mathrm{Spec}\,B\longrightarrow\mathrm{Spec}\,A$ 为开映射.

6. 设 (A,m) 为 Noether 局部环, 证明 $\dim\widehat{A}=\dim A$.

7. 设 A 为 Noether 环, 证明 $\dim A[X]=\dim A+1$.

8. 设 $(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的平坦同态, 并且 $mB=n$. 证明: A 为 DVR $\iff$ B 为 DVR.

9. 设 k 为域, $\bar{k}$ 为其代数闭包. 设 A 为 k-代数, (A,m) 为 Noether 局部环, 并且 $k(m)\coloneqq A/m$ 为 k 的有限可分扩张. 设 $A\otimes_k\bar{k}$ 为 Dedekind 整环. 证明 A 为 DVR.

注记 7.4.1 $k(m)/k$ 为有限可分扩张这个条件可以去掉 (命题 9.2.1).

10. 设 k 为域, $\bar{k}$ 为其代数闭包. 设 $f(x,y)\in k[x,y]$ 为不可约多项式, 并且 $f=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 在 $\bar{k}^2$ 中无解. 证明 $k[x,y]/(f)$ 为 Dedekind 整环.

11. 设 L/K 为域的有限 Galois 扩张, $G=\mathrm{Gal}(L/K)$. 设 V 为 L-线性空间, 并且对每个 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$, 均指定一个 σ-线性同构 $\varphi_\sigma\colon V\longrightarrow V$, 满足: $\forall\,\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)$, $\varphi_{\tau\sigma}=\varphi_\tau\circ\varphi_\sigma$.

(i) 令 $V^G\coloneqq\{v\in V\mid\varphi_\sigma(v)=v,\forall\,\sigma\in G\}$. 证明 V 作为 L-线性空间由 V^G 生成.

(ii) 设 $f_1,\dots,f_m\in K[x_1,\dots,x_n]$. 记 $Z\coloneqq\{x\in L^n\mid f_i(x)=0,\forall\,i=1,\dots,m\}$ 为 f_i 在 L^n 中的公共零点集. 令 $I\coloneqq\{f\in L[x_1,\dots,x_n]\mid f(x)=0,\forall\,x\in Z\}$ 为 $L[x_1,\dots,x_n]$ 的理想. 证明: 存在 $g_1,\dots,g_k\in K[x_1,\dots,x_n]$, 使得 $I=(g_1,\dots,g_k)$.

12. 设 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $A=K[x,x^{-1}]$. 计算 Weil 限制 $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}A$.

习题提示

2. (i): 考虑 A/I-模的短正合列 $0 \longrightarrow R \longrightarrow (A/I)^r \longrightarrow N \longrightarrow 0$. 利用 M/IM 为平坦 A/I-模, 得到 $R \otimes_A M \longrightarrow (A/I)^r \otimes_A M$ 为单同态. 再由 $\operatorname{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ 得到 $\operatorname{Tor}_1^A(N, M) = 0$. (ii): 考虑 $0 \subset I^{s-1}N \subset \cdots \subset IN \subset N$. (iii): 利用定理 7.2.1 证明中类似的方法. 关于平坦性局部判别法的一般情形, 可见 [26, §22].

3. 考虑左正合列 $0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \longrightarrow N \longrightarrow N/N_1 \oplus N/N_2$. 见 [26, Theorem 7.4].

4. 考虑左正合列 $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} P \longrightarrow A^m \xrightarrow{P} A^n$. 见 [26, Theorem 7.6].

5. 通过考虑 B_f, 我们只需证明 $\operatorname{Im}\varphi^*$ 为开集. 由第五章习题 5, $\operatorname{Im}\varphi^*$ 为可构造集. 再由命题 7.3.6 知 $(\operatorname{Im}\varphi^*)^c$ 满足第一章习题 15, (vii) 的条件.

6. 利用 $\widehat{A}/\widehat{m}^k = A/m^k$.

8. 由平坦性知 $A \longrightarrow B$ 为单同态. 设 $k = A/m$, $k' = B/n$. 利用平坦性, 有

$$\frac{n}{n^2} = \frac{m \otimes_A B}{m^2 \otimes_A B} = \frac{m}{m^2} \otimes_A B = \frac{m}{m^2} \otimes_A B \otimes_B k' = \frac{m}{m^2} \otimes_k k'.$$

从而 $\dim_{k'} n/n^2 = 1 \iff \dim_k m/m^2 = 1$.

11. (iii): 注意到 $\sigma(Z) \subset Z$, $\forall\, \sigma \in G$. 由此得到 $\sigma(I) \subset I$, $\forall\, \sigma \in G$. 从而 I 作为 L-线性空间由 I^G 生成.

第八章 Cohen–Macaulay 环

Cohen–Macaulay 环对应的代数簇比光滑簇性质更差一些, 但好处是 Cohen–Macaulay 性质在更多操作 (如取超曲面) 下能被保持住. 因此这是一类既广泛出现, 同时又有较好性质的环. 值得注意的是, 本章关于 Cohen–Macaulay 环的论证中, 归纳法 (关于维数或关于深度) 是最常用的一个思路.

8.1 Koszul 复形与正则序列

设 A 为环, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 为 A 中元素形成的一个序列. 通过模仿标准单形的构造, 下面定义一个 A-模复形 $(K_\bullet(\underline{a}), \partial_\bullet)$. 对 $1 \leq m \leq n$, 令 $F_m(\underline{a})$ 为符号集合 $\{e_{i_1 \dots i_m} | 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}$ 作为基生成的自由 A-模, 即

$$F_m(\underline{a}) \coloneqq \bigoplus_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} A e_{i_1 \dots i_m}.$$

令 $R_m(\underline{a})$ 为 $F_m(\underline{a})$ 的由 $\{e_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(m)}} - \operatorname{sgn}(\sigma)\, e_{i_1 \dots i_m} | 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n,\ \sigma \in S_m\}$ 中元素生成的 A-子模. 定义 $K_m(\underline{a})$ 为商模 $F_m(\underline{a})/R_m(\underline{a})$.

令 $K_0(\underline{a})=A$. 定义如下边缘同态 $\partial_\bullet$.

$$\begin{aligned} K_m(\underline{a}) &\xrightarrow{\partial_m} K_{m-1}(\underline{a}) \\ e_{i_1\dots i_m} &\longmapsto \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}a_{i_j}e_{i_1\dots\hat{i}_j\dots i_m} \\ K_1(\underline{a}) &\xrightarrow{\partial_1} K_0(\underline{a}) \\ e_i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

对 $m<0$ 或 $m>n$, 令 $K_m(\underline{a})=0$. 不难验证 $(K_\bullet(\underline{a}),\partial_\bullet)$ 是复形, 称为序列 $\underline{a}$ 对应的 **Koszul 复形**. 设 M 为 A-模, 令 $K_\bullet(\underline{a},M)=K_\bullet(\underline{a})\otimes_A M$. 复形 $K_\bullet(\underline{a},M)$ 称为 M 关于序列 $\underline{a}$ 的 Koszul 复形. 我们可以将 Koszul 复形看作以 $a_1,\dots,a_n$ 为顶点的标准单形按顶点扭曲边缘同态衍生而来.

对 $1\leq m\leq n$, $K_m(\underline{a})$ 为自由 A-模, 一组基为 $\{e_{i_1\dots i_m}|1\leq i_1<i_2<\cdots<i_m\leq n\}$. 由定义, Koszul 复形在同构意义下不依赖于 $a_1,\dots,a_n$ 的顺序. 即对于 $\sigma\in S_n$, 如果令 $\sigma(\underline{a})=(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$, 那么有 $K_\bullet(\underline{a},M)\simeq K_\bullet(\sigma(\underline{a}),M)$. 事实上, 这个同构可以由 $e_{i_1\dots i_m}\mapsto e_{\sigma^{-1}(i_1)\dots\sigma^{-1}(i_m)}$ 给出.

下面考察 Koszul 复形的同调群. 首先由定义可以直接验证总有 $H_0(K_\bullet(\underline{a},M))=M/(a_1,\dots,a_n)M$.

命题 8.1.1 设 $a_1\in A^*$ 为 A 中可逆元, 则 Koszul 复形 $K_\bullet(\underline{a},M)$ 满足 $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))=0,\ \forall\, m\in\mathbb{Z}$.

证明 我们模仿定理 6.2.1 的证明. 对 $m\geq 0$, 定义同态 $h_m\colon K_m(\underline{a},M)\longrightarrow K_{m+1}(\underline{a},M)$ 为 $e_{i_1\dots i_m}\mapsto a_1^{-1}e_{1i_1\dots i_m}$. 容易验证当 $m\geq 1$ 时, 有 $\mathrm{id}=h_{m-1}\circ\partial_m+\partial_{m+1}\circ h_m$. 由此得到 $\forall\ m\geq 1$, $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))=0$. 而由 a_1 可逆知 $(a_1,\dots,a_n)M=M$, 故 $H_0(K_\bullet(\underline{a},M))=0$. □

推论 8.1.1 对任意 A-模 M, 对 $1\leq i\leq n$, 以及 $m\in\mathbb{Z}$, 有局部化 $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))_{a_i}=0$.

证明 注意到 A_{a_i}-模 M_{a_i} 关于 $\underline{a}$ 的 Koszul 复形 $K_\bullet(\underline{a},M_{a_i})$ 同构于 $K_\bullet(\underline{a},M)$ 在 a_i 处的局部化 $K_\bullet(\underline{a},M)_{a_i}$. 再利用局部化为正合函子以及命题 8.1.1 即得

$$H_m(K_\bullet(\underline{a},M))_{a_i}=H_m(K_\bullet(\underline{a},M)_{a_i})=H_m(K_\bullet(\underline{a},M_{a_i}))=0.$$ □

一般而言, Koszul 复形的正合性与正则序列密切相关. 设 M 为非零 A-模. 回忆 $a\in A$ 称为 M-正则元, 如果乘 a 映射 $M\xrightarrow{a\cdot}M$ 为单射. A 中元素的序列 $(a_1,\dots,a_n)$ 称为 M-正则序列, 如果其同时满足如下两个条件:

(i) a_1 为 M-正则元, a_2 为 M/a_1M-正则元, …, a_n 为 $M/(a_1,\dots,a_{n-1})M$-正则元.

(ii) $M/(a_1,\dots,a_n)M \neq 0$.

定理 8.1.1 设 $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$ 为 A 中序列, 设 M 为 A-模.

(i) 如果 $\underline{a}$ 为 M-正则序列, 则 $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))=0,\ \forall\, m\geq 1$.

(ii) 设 (A,m) 为 Noether 局部环, $a_1,\dots,a_n\in m$, 并且 M 为有限 A-模. 如果 $H_1(K_\bullet(\underline{a},M))=0$, 则 $\underline{a}$ 为 M-正则序列.

证明 (i): 对 n 归纳. 当 $n=1$ 时由 Koszul 复形的定义即得. 当 $n>1$ 时, 考察乘 a_1 诱导的复形同态 $K_\bullet(\underline{a},M)\xrightarrow{a_1\cdot}K_\bullet(\underline{a},M)$. 由 a_1 为 M-正则元知该同态为单同态. 直接计算其余核可得如下复形的短正合列

$$0\longrightarrow K_\bullet(\underline{a},M)\xrightarrow{a_1\cdot}K_\bullet(\underline{a},M)\longrightarrow K_\bullet(\underline{a}',M_1)\oplus K_\bullet(\underline{a}',M_1)[-1]\longrightarrow 0,$$

其中 $K_\bullet(\underline{a}',M_1)$ 代表 $M_1=M/a_1M$ 作为 $A_1:=A/(a_1)$-模, 关于序列 $\underline{a}':=(\overline{a_2},\dots,\overline{a_n})$ 的 Koszul 复形. 而 $K_\bullet(\underline{a}',M_1)[-1]$ 是指 $K_\bullet(\underline{a}',M_1)$ 左平移一个单位距离得到的复形, 即 $K_m(\underline{a}',M_1)[-1]=K_{m-1}(\underline{a}',M_1)$. 上述复形的短正合列诱导同调群的如下正合列

$$H_{m+1}(K_\bullet(\underline{a}',M_1)\oplus K_\bullet(\underline{a}',M_1)[-1])\longrightarrow H_m(K_\bullet(\underline{a},M))\xrightarrow{a_1\cdot}H_m(K_\bullet(\underline{a},M)).$$

对 M_1-正则序列 $\underline{a}'$ 应用归纳假设, 可得当 $m\geq 1$ 时,

$$H_{m+1}(K_\bullet(\underline{a}',M_1)\oplus K_\bullet(\underline{a}',M_1)[-1])=H_{m+1}(K_\bullet(\underline{a}',M_1))\oplus H_m(K_\bullet(\underline{a}',M_1))=0,$$

从而乘 a_1 同态 $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))\xrightarrow{a_1\cdot}H_m(K_\bullet(\underline{a},M))$ 为单同态. 又由推论 8.1.1 知 $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))_{a_1}=0$. 两者结合即可得到 $H_m(K_\bullet(\underline{a},M))=0$.

(ii): 由 $H_1(K_\bullet(\underline{a},M))=0$ 的定义, 得到: 如果 $x_1,\dots,x_n\in M$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_ix_i=0$, 那么存在 $y_{ij}\in M,\ 1\leq i<j\leq n$, 使得对每个 $1\leq p\leq n$, 有

$$x_p=\sum_{i<p}a_iy_{ip}-\sum_{j>p}a_jy_{pj}. \tag{8.1–1}$$

下面对 n 进行归纳来证明 $(a_1,\dots,a_n)$ 为 M-正合列. 当 $n=1$ 时显然. 当 $n>1$ 时, 由 (8.1–1) 可以看到 a_n 为 $M/(a_1,\dots,a_{n-1})M$-正则元. 故只需再证明 $\underline{a}':=(a_1,\dots,a_{n-1})$ 为 M-正则元. 利用 H_1 的定义以及 (8.1–1), 直接计算可以得到

$$H_1(K_\bullet(\underline{a}',M))\equiv 0\mod a_n\,H_1(K_\bullet(\underline{a}',M)),$$

即 $H_1(K_\bullet(\underline{a}',M))=a_n\,H_1(K_\bullet(\underline{a}',M))$. 再由 Nakayama 引理即得 $H_1(K_\bullet(\underline{a}',M))=0$, 从而由归纳假设得到 $\underline{a}'=(a_1,\dots,a_{n-1})$ 为 M-正则元. □

作为推论, 在 Noether 局部环上有限模的情形, 我们得到如下结论.

推论 8.1.2 设 (A,m) 为 Noether 局部环, $a_1,\dots,a_n\in m$. 设 M 为有限 A-模. 则:

(i) 序列 $\underline{a}\coloneqq(a_1,\dots,a_n)$ 为 M-正则序列 $\iff H_1(K_\cdot(\underline{a},M))=0$.

(ii) 若 $(a_1,\dots,a_n)$ 为 M-正则序列, 则 $\forall\,\sigma\in S_n$, 序列 $(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$ 也为 M-正则序列. 即正则序列与顺序无关.

8.2 深度

以下设 A 为 Noether 环, M 为有限生成 A-模. 设 I 为 A 的理想, 且 $IM\neq M$. 我们称 M-正则序列 $(a_1,\dots,a_n)$ 为 I-极大的, 如果 $a_1,\dots,a_n\in I$, 并且对任意 $a\in I$, 加长的序列 $(a_1,\dots,a_n,a)$ 均不是 M-正则序列. 如果有序列 $(a_1,a_2,\cdots)$, 使得对每个 n, $(a_1,\dots,a_n)$ 均为 M-正则序列, 则有严格上升的子模链 $a_1M\subsetneq(a_1,a_2)M\subsetneq\cdots$. 由 M 的 Noether 性知这个子模链必在有限步终止. 这说明或者 I 的每个元素都是 M 的零因子, 或者 I-极大正则序列存在. 总之不会出现无限长的 I-正则序列.

本节主要目标是证明任意两个 I-极大正则序列的长度都相同. 为此, 我们需要 Ext^i 函子. 切入点是下面的观察.

引理 8.2.1 I 的每个元素都是 M 的零因子 $\iff\mathrm{Hom}_A(A/I,M)\neq0$.

证明 $\Longrightarrow$: 此时 $I\subset\bigcup_{P\in\mathrm{Ass}(M)}P$. 由素避引理 3.2.1, 存在 $P\in\mathrm{Ass}(M)$, 使得 $I\subset P$. 这样, 复合同态 $A/I\longrightarrow A/P\hookrightarrow M$ 即为 $\mathrm{Hom}_A(A/I,M)$ 中的一个非零元素.

$\Longleftarrow$: 设 $\varphi\colon A/I\longrightarrow M$ 非零. 令 $x=\varphi(1)$, 则 x 为 M 中非零元, 并且 $Ix=0$. 从而 I 中任意元素均为 M 的零因子. □

由该引理, 我们得到下面 I-极大正则序列长度的一个刻画.

定理 8.2.1 设 $(a_1,\dots,a_n)$ 为 I-极大的 M-正则序列, 则

$$\mathrm{Ext}^0_A(A/I,M)=\cdots=\mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I,M)=0,\quad \mathrm{Ext}^n_A(A/I,M)\neq0.$$

证明 记 $M_0=M$. 对 $i=1,\dots,n$, 记 $M_i=M/(a_1,\dots,a_i)M$. 由极大性, 知 I 中元素均为 M_n 的零因子, 从而由上述引理, $\mathrm{Ext}^0_A(A/I,M_n)=\mathrm{Hom}_A(A/I,M_n)\neq0$. 对如下短正合列

$$0\longrightarrow M_{n-1}\xrightarrow{a_n\cdot}M_{n-1}\longrightarrow M_n\longrightarrow0$$

应用 $\mathrm{Ext}^i_A(A/I,\cdot)$ 函子的长正合列, 得到如下正合列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow\mathrm{Ext}^0_A(A/I,M_{n-1})&\xrightarrow{a_n\cdot}\mathrm{Ext}^0_A(A/I,M_{n-1})\longrightarrow\mathrm{Ext}^0_A(A/I,M_n)\\&\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_A(A/I,M_{n-1})\xrightarrow{a_n\cdot}\mathrm{Ext}^1_A(A/I,M_{n-1}).\end{aligned}$$

对任意 i, 对任意 $a\in A$ 以及任意 A-模 N_1,N_2, 注意到 $\mathrm{Ext}^i_A(N_1,N_2)\xrightarrow{a\cdot}\mathrm{Ext}^i_A(N_1,N_2)$

和应用函子 $\operatorname{Ext}^i_A(\cdot, N_2)$ 于 $N_1 \xrightarrow{a\cdot} N_1$ 得到的同态一致 (命题 6.4.3). 如果 $a \in I$, 则 $A/I \xrightarrow{a\cdot} A/I$ 为零同态, 故 $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, N_2) \xrightarrow{a\cdot} \operatorname{Ext}^i_A(A/I, N_2)$ 为零同态. 将这个结论应用到上述正合列, 得到单同态 $\operatorname{Ext}^0_A(A/I, M_{n-1}) \xrightarrow{a_n\cdot} \operatorname{Ext}^0_A(A/I, M_{n-1})$ 为零同态, 从而 $\operatorname{Ext}^0_A(A/I, M_{n-1}) = 0$. 进而有单同态 $\operatorname{Ext}^0_A(A/I, M_n) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(A/I, M_{n-1})$, 故 $\operatorname{Ext}^1_A(A/I, M_{n-1}) \neq 0$.

继续上述讨论, 通过对 j 归纳, 不难得到对任意 $0 \leq j \leq n$, 有

$$\operatorname{Ext}^0_A(A/I, M_{n-j}) = \cdots = \operatorname{Ext}^{j-1}_A(A/I, M_{n-j}) = 0,\ \operatorname{Ext}^j_A(A/I, M_{n-j}) \neq 0. \qquad \square$$

注记 8.2.1 当 $M = A$ 时, Koszul 复形 $K_\cdot(\underline{a})$ 提供了 $A_1 \coloneqq A/(a_1, \ldots, a_n)A$ 的一个自由消解. 利用这个消解直接计算 $\operatorname{Ext}^i_A(A_1, A)$, 即可得到上述定理在 $M = A$ 时的另一证明.

由定理 8.2.1, 记 $\operatorname{depth}(I, M) \coloneqq \min\left\{i \mid \operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\right\}$, 则任意 I-极大的 M-正则序列的长度都等于 $\operatorname{depth}(I, M)$. 我们称 $\operatorname{depth}(I, M)$ 为 M 的 **I-深度**. 如果 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 则 $\operatorname{depth}(m, M)$ 直接称为 M 的**深度**, 记为 $\operatorname{depth} M$ 或 $\operatorname{depth}_A M$, 此时

$$\operatorname{depth} M = \min\left\{i \mid \operatorname{Ext}^i_A(k, M) \neq 0\right\}.$$

8.3 Cohen–Macaulay 环

回忆对于 Noether 环 A 上的有限模 M, 有 $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$, 并且 $V(\operatorname{ann}(M))$ 的极小元集合等于 $\operatorname{Ass}(M)$ 的极小元集合 (定理 3.4.1). 从而

$$\dim \operatorname{Supp}(M) = \dim V(\operatorname{ann}(M)) = \sup\left\{\dim A/P \mid P \in \operatorname{Ass}(M)\right\}.$$

在讨论深度和维数时, 经常需要做归纳, 下面的命题虽然简单, 却在归纳时频繁被用到.

命题 8.3.1 *设 (A, m) 为 Noether 局部环, $I \subset m$ 为 A 的理想. 设 M 为有限 A-模, 那么对任意 M-正则元 $a \in I$, 有*

$$\operatorname{depth}(I, M/aM) = \operatorname{depth}(I, M) - 1,\ \dim \operatorname{Supp}(M/aM) = \dim \operatorname{Supp}(M) - 1.$$

证明 前一个等式由定义即得. 对后一个等式, 首先不难由行列式技巧证明

$$\sqrt{\operatorname{ann}(M/aM)} = \sqrt{\operatorname{ann}(M) + (a)}. \qquad \square$$

再由 a 为 M-正则元以及定理 5.1.5得到 $\dim \dfrac{A}{\operatorname{ann}(M)+(a)} = \dim \dfrac{A}{\operatorname{ann}(M)} - 1$. 最终即得以下等式:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Supp}(M/aM) &= \dim A/\sqrt{\operatorname{ann}(M/aM)} = \dim A/\sqrt{\operatorname{ann}(M)+(a)} \\ &= \dim \frac{A}{\operatorname{ann}(M)+(a)} = \dim \frac{A}{\operatorname{ann}(M)} - 1 \\ &= \dim A/\sqrt{\operatorname{ann}(M)} - 1 = \dim \operatorname{Supp}(M) - 1.\end{aligned}$$

上节我们看到正则序列的长度总是有限的, 下面的命题给出了一个上界.

命题 8.3.2 设 (A,m) 为 Noether 局部环, 以及 M 为有限 A-模. 则对任意 $P \in \operatorname{Ass}(M)$, 有 $\operatorname{depth} M \leq \dim A/P$. 特别地, $\operatorname{depth} M \leq \dim \operatorname{Supp}(M)$.

证明 对 $\operatorname{depth} M$ 进行归纳. $\operatorname{depth} M = 0$ 时显然成立. 设 $\operatorname{depth} M > 0$. 取 $a \in m$ 为 M-正则元, 那么有 $\operatorname{depth} M/aM = \operatorname{depth} M - 1$. 下面只需找到一个 $Q \in \operatorname{Ass}(M/aM)$, 使得 $P \subsetneq Q$ 即可. 这是因为由归纳假设, $\operatorname{depth} M/aM \leq \dim A/Q$, 进而得到

$$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} M/aM + 1 \leq \dim A/Q + 1 \leq \dim A/P.$$

为找到 Q, 设 $P = \operatorname{ann}(x)$, $0 \neq x \in M$. 如果 $0 \neq \bar{x} \in M/aM$, 则 $P \subset \operatorname{ann}(\bar{x})$, 并且由于 $a \notin P$, 知 $P \subsetneq \operatorname{ann}(\bar{x})$. 如果 $0 = \bar{x} \in M/aM$, 则 $x = ax_1$, $x_1 \in M$, 并且由 a 为 M-正则元知 $P = \operatorname{ann}(x_1)$. 将 x 换作 x_1 继续讨论. 由于 $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i M = 0$, 总可以找到 $x_i \in M$, 使得 $x = a^i x_i$, 并且 $0 \neq \bar{x}_i \in M/aM$. 这样 $P \subsetneq \operatorname{ann}(\bar{x}_i)$. 取 $Q \in \operatorname{Ass}(M/aM)$ 满足 $\operatorname{ann}(\bar{x}_i) \subset Q$ 即可. □

定义 8.3.1 设 (A,m) 为 Noether 局部环, 以及 M 为有限 A-模. 如果 $\operatorname{depth} M = \dim \operatorname{Supp}(M)$, 则称 M 为 **Cohen–Macaulay 模**, 或 **CM 模**.

定理 8.3.1 设 A 为 Noether 局部环, 以及 M 为有限 A-模.

(i) 设 M 为 CM 模, 则对任意 $P \in \operatorname{Ass}(M)$, 有 $\dim A/P = \dim \operatorname{Supp}(M) = \operatorname{depth} M$. 特别地, M 的每个伴随素理想均为 $V(\operatorname{ann}(M))$ 的极小元.

(ii) 设 $(a_1,\dots,a_r)$ 为 M-正则序列, 则 M 为 CM 模 $\iff$ $M/(a_1,\dots,a_r)M$ 为 CM 模.

(iii) 设 M 为 CM 模, $P \in \operatorname{Spec} A$. 则 M_P 作为 A_P-模为 CM 模. 如果还有 $M_P \neq 0$, 那么 $\operatorname{depth}(P,M) = \operatorname{depth}_{A_P} M_P$.

证明 (i): 由 $\dim \operatorname{Supp}(M) = \dim V(\operatorname{ann}(M)) = \sup\{\dim A/P \mid P \in \operatorname{Ass}(M)\}$ 以及命题 8.3.2 即得.

(ii): 对 r 归纳, 并应用命题 8.3.1 即可.

(iii): 首先证明 M_P 作为 A_P 模为 CM 的. 不妨设 $M_P \neq 0$. 从而 $P \in \operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{ann}(M))$. 对 $\operatorname{depth}_{A_P} M_P$ 进行归纳. 如果 $\operatorname{depth}_{A_P} M_P = 0$, 则 $P \in \operatorname{Ass}(M)$.

由 (i) 知 P 为 $V(\mathrm{ann}(M))$ 的极小元, 从而 PA_P 也为 $V(\mathrm{ann}_{A_P}(M_P))$ 的极小元, 故 $\dim \mathrm{Supp}_{A_P}(M_P) = 0$. 设 $\mathrm{depth}_{A_P} M_P > 0$, 则 PA_P 不是 M_P 的伴随素理想, 从而 P 不是 M 的伴随素理想. 取 $a \in P$ 为 M-正则元, 显然 a 也是 M_P-正则元. 由于 $\mathrm{depth}_{A_P}(M_P/aM_P) = \mathrm{depth}_{A_P} M_P - 1$, 对 M_P/aM_P 应用归纳假设, 得到 M_P/aM_P 为 CM 模. 再由 (ii) 知 M_P 是 CM 的.

如果 $M_P \neq 0$, 要证明等式 $\mathrm{depth}(P, M) = \mathrm{depth}_{A_P} M_P$. 通过对 $\mathrm{depth}(P, M)$ 进行归纳并利用命题 8.3.1, 不难看到我们只需处理 $\mathrm{depth}(P, M) = 0$ 的情形即可. 而此时 P 包含于 M 的零因子集合中, 而该集合又是 M 的所有伴随素理想的并, 故存在 $Q \in \mathrm{Ass}(M)$, 使得 $P \subset Q$. 由 M 为 CM 模知 Q 为 $\mathrm{Supp}(M)$ 的一个极小元, 再由 $M_P \neq 0$ 知 $P \in \mathrm{Supp}(M)$, 从而得到 $P = Q$. 故 $\mathrm{depth}_{A_P} M_P = \mathrm{depth}_{A_Q} M_Q = 0$. □

定义 8.3.2 设 A 为 Noether 环. 如果对 A 的任意极大理想 m, 局部环 A_m 作为自身上的模都是 CM 模, 则称 A 为 **Cohen–Macaulay 环**, 或 **CM 环**.

由定理 8.3.1, (iii), CM 环的局部化仍为 CM 环.

设 (A, m) 为 CM 局部环, 对任意两个极小素理想 P_1, P_2, 由定理 8.3.1 (i) 知 $\dim A/P_1 = \dim A/P_2$. 这等价于说 P_1 和 m 之间饱和素理想链的最大长度等于 P_2 和 m 之间饱和素理想链的最大长度. 一般地, 如果 Noether 环 A 满足: 给定任意两个有包含关系的素理想 $Q_1 \subset Q_2$, 则 Q_1 和 Q_2 之间的任意两个饱和素理想链长度都相等, 则称 A 为**悬链环**.

定理 8.3.2 CM 环均为悬链环.

证明 设 A 为 CM 环, 只需证明: 对任意两个有包含关系的素理想 $P \subset Q$, 如果 P 和 Q 之间无法插入其它素理想, 那么 $\mathrm{ht}\, Q = \mathrm{ht}\, P + 1$. 通过在 Q 处作局部化, 不妨设 A 为局部环, 并且 Q 为其唯一极大理想. 此时 (A, Q) 为 CM 局部环, 而我们需要证明 $\dim A = \mathrm{ht}\, P + 1$. 对 $\mathrm{ht}\, P$ 进行归纳, 与前面的论证手法类似, 可以看到只需证明 $\mathrm{ht}\, P = 0$ 的情形. 此时 P 为 A 的极小素理想. 由于 A 为 CM 环, 对 A 的任意两个极小素理想 P_1, P_2, 均有 $\dim A/P_1 = \dim A/P_2$. 从而 $\dim A = \dim A/P = 1$. □

定理 8.3.3 正则局部环均为 CM 环.

证明 设 (A, m, k) 为正则局部环, 并设 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ 为 k-线性空间 m/m^2 的一组基. 则 $\dim A = r$, 并且由命题 5.5.2 和命题 5.5.3 不难看到 $(x_1, \ldots, x_r)$ 为 A 的极大正则序列. 故 $\mathrm{depth}\, A = \dim A$. 即知 A 为 CM 局部环. □

定理 8.3.4 设 A 为 CM 环, 则多项式环 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 也为 CM 环.

证明 只需证明: A 为 CM 环 $\Longrightarrow$ $A[x]$ 为 CM 环. 任取 $A[x]$ 的极大理想 n, 令 $P = n \cap A$. 记 $B = A[x]_n$, 只需证明 B 为 CM 局部环. 通过考虑 A_P, 不妨设 (A, P) 为局部环. 由于 n/P 为域上一元多项式环 $A/P[x]$ 的极大理想, 故存在首一多项式 $f(x) \in A[x]$, 使得 $n = P + (f(x))$. 取 $a_1, \ldots, a_r$ 为 A 的一个极大

正则序列, 由 $f(x)$ 为首一多项式知其为 $A/(a_1,\dots,a_r)[x]$ 中的正则元. 这样得到 $(a_1,\dots,a_r,f(x))$ 为 $A[x]$ 的正则序列, 也为 B 的正则序列. 由 B 为平坦 A-代数及命题 7.3.7 知 $\dim B=\dim A+1=r+1$, 我们看到 $\operatorname{depth} B\geq\dim B$. 再由命题 8.3.2 知 $\operatorname{depth} B=\dim B$, 即 B 为 CM 局部环. □

一个 Noether 环 A 称为**万有悬链环**, 如果任何有限生成 A-代数都是悬链环. 由于有限生成 A-代数均为多项式环 $A[x_1,\dots,x_n]$ 的商环, 联合定理 8.3.2 和 定理 8.3.4即得如下推论.

推论 8.3.1 *CM 环均为万有悬链环.*

例 8.3.1 设 A 为 CM 环 (例如域或 Dedekind 整环), 设 $(f_1,\dots,f_r)$ 为多项式环 $A[x_1,\dots,x_n]$ 的一个正则序列, 则 $A[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_r)$ 为 CM 环, 从而也是万有悬链环.

8.4 CM 环与平坦性

在本节中, 我们总是保持如下设定:$(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, A 的剩余类域为 $k=A/m$, $F:=B\otimes_A k=B/mB$ 为纤维, M 为有限 B-模. 我们关心 B 的 CM 性质与 A, F 的 CM 性质, 以及 $A\longrightarrow B$ 平坦性的关系.

当 B 为平坦 A 代数时, 命题 7.3.7 说明维数公式 $\dim B=\dim A+\dim F$ 成立. 下面的命题说明在一定条件下, 维数公式也可以反过来蕴含 B 的平坦性.

定理 8.4.1 *设 A 为正则局部环, B 为 CM 局部环, 并且维数公式 $\dim B=\dim A+\dim F$ 成立, 则 B 为平坦 A-代数.*

证明 由于零维正则局部环为域, 不妨假设 $\dim A>0$. 我们首先证明 B 的任意参数系均为极大正则序列. 为此, 对 $\operatorname{depth} B$ 进行归纳. 当 $\operatorname{depth} B=0$ 时, 由于 $\dim B$ 也为 0, 可知 B 的参数系和极大正则序列均为空集. 设 $\operatorname{depth} B=r>0$, 并设 $a_1,\dots,a_r$ 为 B 的一个参数系. 对 B 的任意极小素理想 P, 如果 $a_1\in P$, 则 $a_2,\dots,a_r$ 为 B/P 的一个富余参数系, 从而得到 $\dim B/P\leq r-1=\dim B-1$. 但这与 $\dim B/P=\dim B$ 矛盾! 故 a_1 不在 B 的任一极小素理想中, 即知 a_1 为正则元. 对 CM 局部环 $B/(a_1)$ 应用归纳假设, 得到 $(a_2,\dots,a_r)$ 为 $B/(a_1)$ 的极大正则序列. 从而 $(a_1,\dots,a_r)$ 为 B 的极大正则序列.

由于 A 为正则局部环, 可以取 k-线性空间 m/m^2 的一组基 $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_s$. 则 $a_1,\dots,a_s$ 为 A 的一组参数系, 并且 $m=(a_1,\dots,a_s)$. 取 $b_1,\dots,b_r\in n$ 使得 $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_r$ 为 F 的一个参数系, 由 $\dim B=\dim A+\dim F$ 不难看到 $a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_r$ 为 B 的一个参数系, 从而也为 B 的一个极大正则序列. 由于 A 为正则局部环, $(a_1,\dots,a_s)$ 为 A 的正则序列, 故 Koszul 复形 $K_\bullet(\underline{a},A)$ 给出了 A-模 $k:=A/m$ 的一个自由消解. 我们利用这个自由消解计算 $\operatorname{Tor}_1^A(k,B)$. 注意到 $K_\bullet(\underline{a},A)\otimes_A B=K_\bullet(\underline{a},B)$ 恰为 $a_1,\dots,a_s$ 看作 B

中元素得到的 Koszul 复形. 而由于 $(a_1,\dots,a_s)$ 为 B 的正则序列, 可知 $K_\bullet(\underline{a},B)$ 为正合列. 由此得到 $\mathrm{Tor}_1^A(k,B)=0$. 再利用平坦性的局部判别法即得 B 为平坦 A 代数. □

定义 8.4.1 环 A 称为**正则环**, 如果 A 为 Noether 环, 并且 A 在每个素理想 P 处的局部化 A_P 均为正则局部环.

我们可以将上述定理 8.4.1写作如下代数几何中更加常用的形式。

推论 8.4.1 设 k 为域, R,S 均为整的有限生成 k-代数, 并且 R 为正则环, S 为 CM 环. 设 $\varphi\colon R\longrightarrow S$ 为 k-代数同态. 并且对 R 的任意极大理想 m, 纤维 $\operatorname{Spec} S/mS$ 或者为空集, 或者其每个不可约分支的维数均为 $\dim S-\dim R$. 则 φ 为平坦的.

证明 对 S 中的每个极大理想 n, 其在 φ 下的逆像 $m\coloneqq\varphi^{-1}(n)$ 均为 R 的极大理想 (定理 3.6.3). 对局部同态 $R_m\longrightarrow S_n$ 应用定理 8.4.1 即可. □

注记 8.4.1 推论 8.4.1 可以翻译为: 设 $\varphi\colon X\longrightarrow Y$ 为不可约 k-代数簇之间的 k-态射, 并且 X 为 CM 的, Y 为正则的. 如果 φ 的每个非空纤维的任意不可约分支的维数均为 $\dim X-\dim Y$, 那么 φ 为平坦态射.

注记 8.4.2 现在可以利用推论 8.4.1 来重新看例 7.2.1. 要说明 $C=B/(f,g)$ 为平坦 A-代数, 只需验证如下两条:

(i) (f,g) 为 B-正则序列.

(ii) $\forall\, a_1,a_2\in k$, $\bar f\coloneqq x_1^2+a_1x_1+a_2x_2$, $\bar g\coloneqq x_2^2+a_1x_1+a_2x_2$ 为 $k[x_1,x_2]$ 中的正则序列.

这是因为, (i) 保证了 C 为 CM 环, (ii) 保证了每个极大理想处的纤维维数是期望维数 $\dim C-\dim A$.

当 $A\longrightarrow B$ 平坦时, A,B,F 三者 CM 性质的关系如下

定理 8.4.2 设 B 为平坦 A 代数, 则 B 为 CM 局部环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 局部环.

证明 对 $\operatorname{depth} F$ 进行归纳.

(i) 假设 $\operatorname{depth} F=0$. 下面对 $\operatorname{depth} A$ 进行归纳.

如果 $\operatorname{depth} A=0$, 则 $m\in\operatorname{Ass}(A)$, $n/m\in\operatorname{Ass}(F)$. 故存在单同态 $A/m\hookrightarrow A$ 以及 $B/nB\hookrightarrow B/mB$. 由 B 的平坦性, 对单同态 $A/m\hookrightarrow A$ 作用 $\cdot\otimes_A B$ 得到单同态 $B/mB\hookrightarrow B$, 再与 $B/nB\hookrightarrow B/mB$ 复合得到单同态 $B/nB\hookrightarrow B$. 这说明 $n\in\operatorname{Ass}(B)$, 即 $\operatorname{depth} B=0$. 再由 $\dim B=\dim A+\dim F$ 可得 B 为 CM 环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 环.

如果 $\operatorname{depth} A>0$, 取 $a\in m$ 为 A 的正则元, 由 B 的平坦性知 a 也为 B 的正则元. 令 $A_1=A/(a)$, $B_1=B/(a)$. 则 $\operatorname{depth} A_1=\operatorname{depth} A-1$, $\operatorname{depth} B_1=\operatorname{depth} B-1$, 局部同态 $A_1\longrightarrow B_1$ 是平坦的, 并且其纤维还是 F. 由归纳假设, B_1 为 CM 环

$\iff$ A_1 和 F 均为 CM 环. 又由于 B_1 为 CM 环 $\iff$ B 为 CM 环, 以及 A_1 为 CM 环 $\iff$ A 为 CM 环, 从而 B 为 CM 环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 环.

(ii) 假设 $\operatorname{depth} F > 0$. 取 $b \in n$ 使得 $\bar{b}$ 为 F 的正则元. 由引理 7.2.1 知 b 为 B 的正则元, 并且 $B_1 \coloneqq B/(b)$ 为平坦 A-代数. 由于 $A \longrightarrow B_1$ 的纤维为 $F_1 \coloneqq F/(\bar{b})$, 故可以对 $A \longrightarrow B_1$ 应用归纳假设, 得到 B_1 为 CM 环 $\iff$ A 和 F_1 均为 CM 环. 由于由于 B_1 为 CM 环 $\iff$ B 为 CM 环, F_1 为 CM 环 $\iff$ F 为 CM 环. 从而 B 为 CM 环 $\iff$ A 和 F 均为 CM 环. □

推论 8.4.2 设 A 为 Noether 局部环, 则 A 为 CM 局部环 $\iff$ 完备化 $\widehat{A}$ 为 CM 局部环.

证明 注意到 $A \longrightarrow \widehat{A}$ 平坦, 并且纤维 $\widehat{A}/m\widehat{A} = A/m$ 为域即可. □

以下命题说明不变量子环很多时候都是 CM 环.

命题 8.4.1 设 k 为域, B 为有限生成 k-代数, 且为 CM 环. 设 G 为 B 作为 k-代数的自同构群 $\operatorname{Aut}_k(B)$ 的有限子群, 并且 k 的特征 $\operatorname{char}.k$ 或者为 0, 或者与 $|G|$ 互素. 则不变子环 B^G 为 CM 环.

证明 令 $A = B^G$. 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 只需证明完备化 $\widehat{A_P}$ 为 CM 环. 取 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 满足 $Q \cap A = P$. 由命题 3.7.3, (iv) 得到 k-代数同构 $\widehat{A_P} \simeq \widehat{B_Q}^{G_Q}$, 其中 $G_Q \coloneqq \{g \in G \mid gQ = Q\}$ 为 Q 的稳定子群. 应用如下引理 8.4.1 到 $\widehat{B_Q}^{G_Q}$ 即知 $\widehat{B_Q}^{G_Q}$ 为 CM 环, 从而 $\widehat{A_P}$ 也为 CM 环. □

引理 8.4.1 设 k 为域, B 为 k-代数, 并且 (B, m) 为完备 Noether 局部环. 设 G 为 k-代数自同构群 $\operatorname{Aut}_k(B)$ 的有限子群, 并且 k 的特征 $\operatorname{char}.k$ 或者为 0, 或者与 $|G|$ 互素. 设 B 为 CM 环, 则不变量子环 B^G 也为 CM 环.

证明 首先注意到 $B^G \hookrightarrow B$ 为单的整扩张, 从而 $\dim B^G = \dim B$, 并且 (B^G, m^G) 也为局部环 (推论 3.6.1). 下面对 $\operatorname{depth} B$ 归纳. 当 $\operatorname{depth} B = 0$ 时, $\dim B = 0$, 从而 $\dim B^G = 0$, 故此时 B^G 为 CM 环. 当 $\operatorname{depth} B \geq 1$ 时, 设 $b \in m$ 为 B 的正则元, 则对任意 $g \in G$, $gb \in m$ 也为正则元, 从而 $\tilde{b} \coloneqq \prod_{g \in G} gb$ 为 B 的正则元, 并且 $\tilde{b} \in m^G \subset B^G$. 再利用 G 的完全可约性得到 $B^G/(\tilde{b}) \simeq (B/(\tilde{b}))^G$. 对商环 $B/(\tilde{b})$ 应用归纳假设得到 $(B/(\tilde{b}))^G$ 为 CM 环, 从而 B^G 的商环 $B^G/(\tilde{b})$ 为 CM 环. 故 B^G 为 CM 环. □

8.5 CM 环与整闭性

回忆判断整闭性的定理 4.1.3:

设 A 为 Noether 整环. 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:

(i) 对 A 的每个高度为 1 的素理想 P, 局部环 A_P 为离散赋值环.

(ii) 对每个非零的 $a \in A$, 对每个 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 均有 $\mathrm{ht}\, P = 1$.

注意到当 A 为 CM 整环时, (ii) 总成立. 这是因为由 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$ 知 $\mathrm{depth}\,(P, A) = 1$, 故 $\mathrm{depth}\, A_P = 1$. 进而得到 $\mathrm{ht}\, P = \dim A_P = 1$. 如果不假设 A 为整环, 那么我们有如下整闭性判据.

定理 8.5.1 (Serre 整闭性判据) *设 A 为 Noether 局部环, 则 A 为整闭整环当且仅当以下两条同时成立:*

(i) *A 在任意极小素理想处的局部化均为域, 在任意高度为 1 的素理想处的局部化均为离散赋值环.*

(ii) *对任意 $P \in \mathrm{Spec}\, A$, 如果 $\mathrm{ht}\, P \geq 2$, 则 $\mathrm{depth}(P, A) \geq 2$.*

证明 设 A 为整闭整环. 由定理 4.1.1知 (i) 成立. 对 $P \in \mathrm{Spec}\, A$ 满足 $\mathrm{ht}\, P \geq 2$, 假设 $\mathrm{depth}(P, A) = 1$, 则取 $0 \neq a \in P$, 可知 a 为 P 中的极大正则序列, 从而 P 包含于 A/aA 的零因子集合. 由素避引理 3.2.1可找到 $Q \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, 使得 $P \subset Q$. 由定理 4.1.3, (ii), 知 $\mathrm{ht}\, Q = 1$, 从而 $\mathrm{ht}\, P = 1$, 这与 $\mathrm{ht}\, P \geq 2$ 矛盾! 故 $\mathrm{depth}\,(P, A) \geq 2$, 即 (ii) 成立.

设 (i) 和 (ii) 均成立. 注意到 $\forall\ P \in \mathrm{Spec}\, A$, 若 $\mathrm{ht}\, P \geq 1$, 则 $\mathrm{depth}\, A_P \geq 1$. 由此知 A 的伴随素理想均为极小素理想. 设 $P_1, \ldots, P_n$ 为 A 的全部极小素理想. 则 $\{s \in A | s \text{ 为正则元}\} = \{s \in A | s \notin P_1 \cup \cdots \cup P_n\}$. 记该集合为 S. 在该乘法子集处的局部化为 $K := S^{-1}A$, 这称为 A 的全分式环. 不难看到, K 为零维环, 其所有素理想为 $P_1, \ldots, P_n$. 由命题 1.4.7 知 $K = K_1 \times \ldots K_n$, 其中 $K_i = A_{P_i}$ 为域.

由定义可以看到, $A \hookrightarrow K$ 为单同态. 下面验证 A 在 K 中为整闭的, 即 $\forall\ x \in K$, 若 x 在 A 上整, 则 $x \in A$. 为此, 设 $x = \frac{b}{a} \in K$ 在 A 上整, 其中 $a, b \in A$, 且 $a \in S$ 为正则元. 考虑 A 的理想 $I := \{t \in A | tx \in A\} = \{t \in A | tb \in aA\}$. 如果 $I = A$, 则 $x \in A$. 如果 $I \neq A$, 则在 A/aA 中, 有 $\bar{b} \neq 0$, 并且 $I/aA = \mathrm{ann}(\bar{b})$. 故存在 $P \in \mathrm{Ass}(A/aA)$ 使得 $I \subset P$. 由 (ii), $\mathrm{ht}\, P \leq 1$. 再由 (i) 知 A_P 为整闭整环. 将 $x = \frac{b}{a}$ 看作 $\mathrm{Frac}(A_P)$ 中的元素, 由 x 在 A 上整知 $x \in A_P$. 这样得到 $I_P = A_P$. 这与 $I \subset P$ 矛盾! 从而 $I = A$, $x \in A$. 这就验证了 A 在 K 中整闭.

由分解 $K = K_1 \times \cdots \times K_n$, 得到 $1 = e_1 + \cdots + e_n$, 其中 e_i 为 K_i 中的 1. 由 $e_i^2 - e_i = 0$ 及 A 在 K 中整闭知 $e_i \in A$. 由此不难看到 $A = Ae_1 \times \cdots \times Ae_n$ 为 n 个子环的乘积. 由 A 为局部环知 $n = 1$. 从而 K 为域, 并且 A 为整闭整环. □

注意到对于 CM 局部环 A, 定理 8.5.1 中的 (ii) 总成立. 因此, 对于 CM 环 A, 要

验证 A 的整闭性, 我们只需按如下程序去做:

(i) 如果 A 是整环, 只需验证 A 在任意高度为 1 的素理想处的局部化为离散赋值环.

(ii) 如果 A 是局部环, 只需验证 A 在任意极小素理想处的局部化是域, 并且 A 在任意高度为 1 的素理想处的局部化为离散赋值环.

习题

1. 设 $\underline{a} \coloneqq (a_1, \dots, a_n)$ 为环 A 的正则序列. 试计算复形 $\mathrm{Hom}_A(K_\bullet(\underline{a}), A)$ 的各阶上同调群.

2. 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 Noether 局部环之间的有限扩张, 设 M 为有限 B-模. $\mathrm{depth}_A M$ 和 $\mathrm{Supp}_A(M)$ 分别表示 M 作为 A-模的深度和支集. $\mathrm{depth}_B M$ 和 $\mathrm{Supp}_B(M)$ 分别表示 M 作为 B-模的深度和支集. 证明:

(i) φ 为局部同态.

(ii) $\mathrm{depth}_A M = \mathrm{depth}_B M$, $\dim \mathrm{Supp}_A(M) = \dim \mathrm{Supp}_B(M)$.

(iii) M 作为 A-模是 CM 的 $\iff$ M 作为 B-模是 CM 的.

3. 设 A 为 CM 环, 证明形式幂级数环 $A[\![X]\!]$ 为 CM 环.

4. 设 L/k 为域的有限扩张. 设 A 为 k-代数. 证明 A 为 CM 环 $\iff$ $A \otimes_k L$ 为 CM 环.

5. 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, 并且 B 为平坦 A-代数. 令 $F \coloneqq B/mB$ 为纤维. 证明 $\mathrm{depth}\, B = \mathrm{depth}\, A + \mathrm{depth}\, F$.

6. 设 (A, m) 为正则局部环, M 为有限 A-模.

(i) 设 $a \in m$ 为 M-正则元, 并且 M/aM 为自由 A/aA-模. 证明 M 为自由 A-模.

(ii) 设 $\dim \mathrm{Supp}(M) = \dim A$, 并且 M 为 CM 模. 证明 M 为自由 A-模.

7. 设 A 为 Noether 局部环. 证明 $\mathrm{depth}\, A = \mathrm{depth}\, \widehat{A}$.

8. 设 k 为域, $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. 证明: $(f_1, \dots, f_r)$ 为 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的正则序列 $\iff$ $\forall\, 1 \le i \le r$, $\dim k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_i) = n - i$.

习题提示

2. (i): 如果 $mB = B$, 可以应用 Nakayama 引理得到 $B = 0$. (ii): 对 $\operatorname{depth}_A M$ 进行归纳来证明 $\operatorname{depth}_A M = \operatorname{depth}_B M$. 对于 $\dim \operatorname{Supp}_A(M) = \dim \operatorname{Supp}_B(M)$, 利用 $\operatorname{ann}_B(M) \cap A = \operatorname{ann}_A(M)$, 从而得到单的有限扩张 $A/\operatorname{ann}_A(M) \hookrightarrow B/\operatorname{ann}_B(M)$.

3. 利用定理 8.4.2, 局部化之后分析纤维 F. 注意到对于 $A[\![X]\!]$ 的极大理想 n, 总有 $X \in n$, 从而 $n = m + (X)$, 其中 m 为 A 的极大理想. 见 [26, Theorem 23.5].

5. 与定理 8.4.2 证明类似, 先对 $\operatorname{depth} F$ 归纳, 再对 $\operatorname{depth} A$ 归纳.

6. (i): 设 $k = A/m$. 取 $x_1, \ldots, x_r \in M$, 使得 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ 为 M/mM 的一组 k-线性空间基. 证明 $x_1, \ldots, x_r$ 为 A-线性无关的. (ii): 对 $\operatorname{depth} M$ 进行归纳.

第九章 正则局部环

本章我们主要证明由 Serre 给出的正则局部环的一个刻画 (定理 9.2.1), 以及由此得到的两个常用推论: 正则局部环在素理想处的局部化还是正则局部环, 以及正则局部环都是 UFD(唯一因子分解整环).

9.1 极小自由消解

本节中, 我们总是固定一个 Noether 局部环 (A, m, k). 对于 A-模 M 和 N, 有时将张量积 $M \otimes_A N$ 简记为 $M \otimes N$.

设 M 为有限 A-模. 我们希望找到 M 的自由消解

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

使得 F_i 的秩尽可能小. 为此, 取自由 A-模 F_0 以及同态 $F_0 \longrightarrow M$ 使得 $F_0 \otimes k \longrightarrow M \otimes k$ 为同构. 由 Nakayama 引理, $F_0 \longrightarrow M$ 为满同态, 并得到短正合列

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

继续取自由 A-模 F_1 以及同态 $F_1 \longrightarrow K_0$ 使得 $F_0 \otimes k \longrightarrow K_0 \otimes k$ 为同构, 则同样理由得到短正合列

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0.$$

继续讨论下去, 我们得到 M 的自由消解

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

满足如下条件:

(i) F_i 为秩有限的自由 A-模, $\forall\, i \geq 0$.

(ii) $\bar{d}_i = 0\colon F_i \otimes k \longrightarrow F_{i-1} \otimes k$, 即 $d_i(F_i) \subset mF_{i-1}$, $\forall\, i \geq 1$.

(iii) $\bar{\epsilon}\colon F_0 \otimes k \longrightarrow M \otimes k$ 为同构.

由上面的构造, 我们得到如下的

定义–命题 9.1.1 *任一有限 A-模 M 均存在同时满足上述三条的自由消解. 这称为 M 的* **极小自由消解**.

极小自由消解在相差一个同构的情况下是唯一的, 即

命题 9.1.1 *有限 A-模 M 的任意两个极小自由消解均同构.*

证明 设 $(F_\bullet, d_\bullet)$ 和 $(F'_\bullet, d'_\bullet)$ 均为 M 的极小自由消解. 由投射消解的性质 (推论 6.3.1), 存在复形的同伦等价 $\varphi_\bullet\colon (F_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (F'_\bullet, d'_\bullet)$. 则 $\varphi_\bullet \otimes k\colon (F_\bullet \otimes k, \bar{d}_\bullet) \longrightarrow (F'_\bullet \otimes k, \bar{d}'_\bullet)$ 仍为同伦等价, 从而诱导同调群的同构. 注意到 $\bar{d}_\bullet = \bar{d}'_\bullet = 0$, 我们得到 $\bar{\varphi}_i\colon F_i \otimes k \xrightarrow{\sim} F'_i \otimes k$ 为同构, $\forall\, i \geq 0$. 由此知 $\varphi_i\colon F_i \xrightarrow{\sim} F'_i$ 为同构, $\forall\, i \geq 0$. □

设 $\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M$ 为 M 的一个投射消解, 则称 $\min\{n | P_i = 0,\ \forall\, i > n\}$ 为 M 的上述投射消解的长度. 如果这个最小值不存在 (即对任意 n, 均存在 $i > n$, 使得 $P_i \neq 0$), 则称该投射消解的长度为无穷大. 由上述命题 9.1.1, M 的极小自由消解的长度是良好定义的.

定义 9.1.1 *对有限 A-模 M, 其极小自由消解的长度称为 M 的* **投射维数**, *记为* $\operatorname{proj\,dim} M$ *或* $\operatorname{proj\,dim}_A M$. *如果极小自由消解的长度为无穷大, 则记* $\operatorname{proj\,dim} M = \infty$.

例 9.1.1 设 $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ 为 A 的一个正则序列. Koszul 复形 $K_\bullet(\underline{a})$ 给出了 $A/(a_1, \ldots, a_n)$ 的一个长度为 n 的极小自由消解. 特别地, 如果 A 为正则局部环, 并且 $a_1, \ldots, a_n$ 为正则参数系, 那么上述 Koszul 复形给出了 k 的一个长度为 $\dim A$ 的极小自由消解.

命题 9.1.2 *设 M 为有限 A-模, 则*

(i) $\operatorname{proj\,dim} M \leq \operatorname{proj\,dim} k$.

(ii) $\operatorname{proj\,dim} M = \sup\{i | \operatorname{Tor}_i^A(M, k) \neq 0\}$.

(iii) $\operatorname{proj\,dim} M < \infty \iff M$ *存在长度有限的投射消解.*

证明 (i) 设 $\operatorname{proj\,dim} k = n < \infty$. 利用 k 的极小自由消解进行计算, 可以看到 $\operatorname{Tor}_i^A(M, k) = 0$, $\forall\, i > n$. 设 $F_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 为 M 的极小自由消解, 则 $\operatorname{Tor}_i^A(M, k) = F_i \otimes k$, $\forall\, i \geq 0$. 由此知对于 $i > n$, 有 $F_i \otimes k = 0$, 从而 $F_i = 0$.

(ii) 利用 M 的极小自由消解计算 $\operatorname{Tor}_i^A(M,k)$ 即得.

(iii) 如果 $\operatorname{proj\,dim} M<\infty$, 则由定义, M 存在长度有限的极小自由消解. 这就是一个长度有限的投射消解. 反过来, 如果 M 存在长度有限的投射消解, 则利用这个投射消解计算 Tor 即得 $\sup\{i|\operatorname{Tor}_i^A(M,k)\neq 0\}<\infty$, 再由 (ii) 知 $\operatorname{proj\,dim} M<\infty$. □

下面的命题给出了利用极小自由消解判断 A 中正则元存在性的一个方法. 这是 Auslander-Buchsbaum 定理 (本章习题 4) 的一个特殊情形.

命题 9.1.3 设 M 为有限 A-模, 且 $0<\operatorname{proj\,dim} M<\infty$. 则 $\operatorname{depth} A\geq 1$, 即 $m\notin \operatorname{Ass}(A)$.

证明 反证法. 假设存在 $0\neq a\in A$, 使得 $ma=0$. 取 M 的极小自由消解

$$0\longrightarrow L_n\xrightarrow{d_n}L_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow L_0\longrightarrow M\longrightarrow 0.$$

在等同 $L_n=A^r$, $L_{n-1}=A^s$ 下, 同态 d_n 表示为一个系数全在 m 中的矩阵, 从而 $d_n((a,\dots,a))=0$, 这与 d_n 为单同态矛盾! □

9.2 正则局部环的同调刻画

本节主要目标为证明如下定理

定理 9.2.1 (Serre) 设 (A,m,k) 为 Noether 局部环. 则以下三条相互等价:

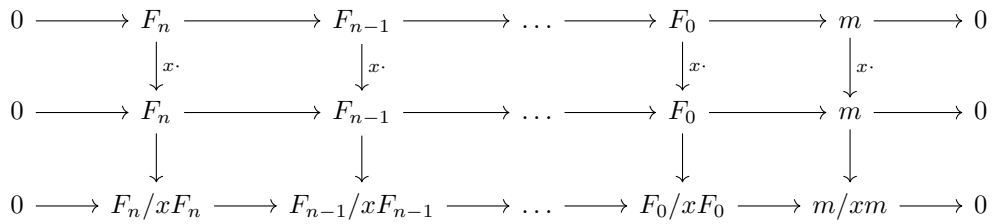
(i) A 为正则局部环.
(ii) $\operatorname{proj\,dim} k<\infty$.
(iii) 对任意有限 A-模 M, 有 $\operatorname{proj\,dim} M<\infty$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 由 Koszul 复形即得 (例 9.1.1). (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) 由命题 9.1.2 得到. 故只需证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i). 设对任意有限 A-模 M, 有 $\operatorname{proj\,dim} M<\infty$. 下面通过对 $\dim_k m/m^2$ 进行归纳来证明 A 为正则局部环.

当 $\dim_k m/m^2=0$ 时, 易知 A 为域, 故为正则局部环. 设 $\dim_k m/m^2>0$. 则 $0<\operatorname{proj\,dim} k<\infty$. 从而由命题 9.1.3知 $m\notin\operatorname{Ass}(A)$. 再由素避引理 3.2.1, 可以取 $x\in m-m^2$, 并且 x 为 A 的正则元. 令 $\bar{A}=A/xA$. 则 $\bar{A}$ 也为 Noether 局部环, 其极大理想为 $\bar{m}=m/xA$, 其剩余类域仍为 k, 并且 $\dim_k \bar{m}/\bar{m}^2=\dim_k m/m^2-1$, 以及 $\dim\bar{A}=\dim A-1$. 从而只需证明 $\bar{A}$ 为正则局部环. 根据归纳假设以及 (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), 又只需证明 $\operatorname{proj\,dim}_{\bar{A}}k<\infty$.

由条件, m 作为 A-模, 存在长度有限 (设为 n) 的极小自由消解 $F_\bullet\longrightarrow m\longrightarrow 0$.

考虑如下交换图表:



由于 x 为正则元, 上面的图表为 (行) 复形的短正合列, 从而由上面的两行正合知最下面一行也正合. 这样得到 m/xm 作为 A/xA-模, 存在有限长度的极小自由消解, 即 $\operatorname{proj\,dim}_{\bar{A}} m/xm < \infty$.

下面说明自然的满同态 $\varphi\colon m/xm \longrightarrow m/xA$ 存在截面, 即存在同态 $\psi\colon m/xA \longrightarrow m/xm$, 使得 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. 这样将会得到 m/xA 同构于 m/xm 的一个直和项. 由于 $x \notin m^2$, 我们可以取 m 的一组元素 $x_1 = x, x_2, \ldots, x_s$, 使得 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$ 为 m/m^2 的一组 k-线性空间基. 可以看到对任意 $c_2, \ldots, c_s \in A$, 若 $c_2x_2 + \ldots c_sx_s \in xA$, 则 $c_2x_2 + \ldots c_sx_s \in xm$. 这说明生成元之间的映射 $\bar{x}_i \mapsto \bar{x}_i$ $(i = 2, \ldots, s)$ 给出了一个良好定义的 $\bar{A}$-模同态 $\psi\colon m/xA \longrightarrow m/xm$. 这显然是自然满同态 $m/xm \xrightarrow{\varphi} m/xA$ 的一个截面. 这样 m/xA 同构于 m/xm 的一个直和项, 再由命题 9.1.2, (ii) 得到 $\operatorname{proj\,dim}_{\bar{A}} m/xA \leq \operatorname{proj\,dim}_{\bar{A}} m/xm < \infty$.

短正合列 $0 \longrightarrow m/xA \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow k \longrightarrow 0$ 以及 m/xA 的极小自由消解给出了 k 作为 $\bar{A}$-模的长度有限的投射消解, 从而由命题 9.1.2, (iii) 知 $\operatorname{proj\,dim}_{\bar{A}} k < \infty$. □

推论 9.2.1 设 A 为正则局部环, 设 $P \in \operatorname{Spec} A$, 则局部化 A_P 也为正则局部环.

证明 记 $k(P) = A_P/PA_P$ 为 P 处的剩余类域. 由定理 9.2.1, 只需证明

$$\operatorname{proj\,dim}_{A_P} k(P) < \infty.$$

由 A 正则可知 A/P 作为 A-模存在有限长度的极小自由消解 $F_\bullet \longrightarrow A/P \longrightarrow 0$. 在 P 处作局部化之后得到 $F_\bullet \otimes_A A_P \longrightarrow (A/P) \otimes_A A_P = k(P) \longrightarrow 0$, 这是 $k(P)$ 作为 A_P-模的一个投射消解. 从而由命题 9.1.2, (iii) 知 $\operatorname{proj\,dim}_{A_P} k(P) < \infty$. □

命题 9.2.1 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为 Noether 局部环之间的平坦局部态射, 则

(i) B 为正则局部环 $\Longrightarrow$ A 为正则局部环.

(ii) A 和 B/mB 均为正则局部环 $\Longrightarrow$ B 为正则局部环.

证明 (i) 假设 A 不是正则局部环, 则 A/m 的极小自由消解 $F_\bullet \longrightarrow A/m \longrightarrow 0$ 的长度为无穷大. 由 B 平坦知 $F_\bullet \otimes_A B \longrightarrow B/mB \longrightarrow 0$ 也为正合列, 并且直接验证定义即知这是 B/mB 作为 B-模的极小自由消解. 由此知 $\operatorname{proj\,dim}_B B/mB = \infty$. 这与 B 正则矛盾! 故 A 为正则局部环.

(ii) 记 $k = B/n$. 设 $x_1, \dots, x_r$ 和 $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s$ 分别为 A 和 B/mB 的正则参数系, 容易看到 $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ 为 n 的一组生成元. 这样得到

$$\dim B \leq \dim_k n/n^2 \leq r + s = \dim A + \dim B/mB.$$

而平坦性保证了等式 $\dim B = \dim A + \dim B/mB$(命题 7.3.7). 从而 $\dim B = \dim_k n/n^2$. 即 B 为正则局部环. □

例 9.2.1 上述命题的 (i) 中, 只由 B 为正则局部环并不能得到纤维 B/mB 为正则局部环. 下面为一个例子: $A = \mathbb{C}[y]_{(y)}$, $B = \mathbb{C}[x]_{(x)}$, 同态 $A \longrightarrow B$ 为 $y \mapsto x^2$. 不难验证, A, B 均为正则局部环, $A \longrightarrow B$ 为平坦局部态射, 而纤维 $B/x^2B = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ 不是正则局部环. 几何上看, 这是二重分歧覆盖 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ 在分歧点 0 处对应的局部环同态.

回忆一个 Noether 环 A 称为正则环, 如果 A 在每个素理想处的局部化均为正则局部环. 现在由推论 9.2.1, 要判断 Noether 环 A 为正则环, 只需 A 在每个极大理想 m 处的局部化 A_m 均为正则局部环.

命题 9.2.2 设 A 为正则环, 那么 $A[X]$ 和 $A[\![X]\!]$ 均为正则环.

证明 设 Q 为 $A[X]$ 的极大理想, 令 $P = Q \cap A$. 通过在 P 处作局部化, 不妨设 A 为局部环, 并且其极大理想 $m = P$. 显然 $A \longrightarrow A[X]_Q$ 平坦, 并且其纤维 $(A/m[X])_Q$ 是离散赋值环. 由命题 9.2.1, (ii) 知 $A[X]_Q$ 为正则局部环. 从而 $A[X]$ 为正则环.

同理, 设 Q 为 $A[\![X]\!]$ 的极大理想. 由于对任意 $f \in A[\![X]\!]$, $1 + Xf \in A[\![X]\!]^*$, 不难看到 $X \in Q$. 从而 $P \coloneqq Q \cap A$ 为 A 的极大理想, 并且 $Q = PA[\![X]\!] + (X)$. 注意到 $A[\![X]\!]$ 为 $A[X]$ 在理想 (X) 处的完备化, 从而 $A[X] \longrightarrow A[\![X]\!]$ 为平坦的 (命题 7.1.10), 进而 $A \longrightarrow A[\![X]\!]$ 平坦. 而同态 $A_P \longrightarrow A[\![X]\!]_Q$ 在 P 处的纤维同构于 $A/P[\![X]\!]$, 为离散赋值环. 由命题 9.2.1, (ii) 知 $A[\![X]\!]_Q$ 为正则局部环. 从而 $A[\![X]\!]$ 为正则环. □

例 9.2.2 设 $n \geq 1$, 则 $A \coloneqq \mathbb{C}[x, y, z]/(x^n + y^n + z^n)$ 为整闭整环. 首先, 不难看到 $f \coloneqq x^n + y^n + z^n$ 为不可约多项式. 从而 A 为 Noether 整环. 再由 $\mathbb{C}[x, y, z]$ 为 CM 环知 A 为 CM 环. 由8.5节的讨论, 只需证明 A 在高度为 1 的素理想处的局部化均为离散赋值环. 任取 A 的高度为 1 的素理想 P, 由 A 为悬链环 (定理 8.3.2) 不难看到 $\dim A/P = 1$, 从而可以取一个极大理想 $m = (x - a, y - b, z - c)$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, 使得 $P \subset m$ 并且 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. 由于 $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ 的公共解只有 $(0, 0, 0)$, 知 $f \notin m/m^2$. 这样 A_m 为正则局部环, 从而 A_P 为一维正则局部环, 即离散赋值环.

9.3 正则局部环是唯一因子分解整环

命题 9.3.1 设 A 为 Noether 整环. 则 A 是唯一因子分解整环 $\iff$ A 的每个高度为 1 的素理想均为主理想.

证明 $\Longrightarrow$: 设 P 为高度 1 的素理想. 取 $0 \neq a \in P$. 设 $a = p_1 \dots p_m$ 为 a 的素因子分解. 由 $a \in P$ 知存在 i, 使得 $p_i \in P$. 由于 p_i 为素元, 知 (p_i) 为素理想. 再由 $(p_i) \subset P$ 和 $\operatorname{ht} P = 1$ 知 $P = (p_i)$ 为主理想.

$\Longleftarrow$: 设 a 为 A 的不可约元, 我们只需证明 a 为素元, 即 (a) 为素理想. 取 P 为包含 (a) 的一个极小素理想. 由 Krull 主理想定理知 $\operatorname{ht} P = 1$. 从而 $P = (b)$ 为主理想. 由 $a \in P$ 知 $b \mid a$. 再由 a 不可约即知 $a = \lambda b$, 并且 $\lambda \in A^*$ 为可逆元. 这样得到了 a 为素元. □

命题 9.3.2 设 A 为 Noether 整环. 设 $0 \neq x$ 为 A 的一个素元 (即 (x) 为素理想). 则 A 是唯一因子分解整环 $\iff$ 局部化 A_x 是唯一因子分解整环.

证明 $\Longrightarrow$: 由定义直接验证即得.

$\Longleftarrow$: 设 $a \in A$ 为不可约元, 并且 $x \nmid a$, 我们只需证明 a 为素元. 首先说明 a 为 A_x 中的不可约元. 假设在 A_x 中有分解 $a = \frac{b}{x^m}\frac{c}{x^n}$, 其中 $b, c \in A$, m, n 为正整数. 则在 A 中有 $ax^{m+n} = bc$. 由 x 为素元知 $x \mid b$ 或 $x \mid c$. 不妨设 $b = xb_1$. 则 $ax^{m+n-1} = b_1 c$. 继续讨论下去不难看到 b 或 c 在 A_x 中为可逆元. 这样证明了 a 为 A_x 中的不可约元. 由于 A_x 是唯一因子分解整环, a 为 A_x 的素元. 要证明 a 为 A 的素元, 假设在 A 中有 w, z, 使得 $a \mid wz$. 由 a 为 A_x 的素元, 在 A_x 中有 $a \mid w$ 或 $a \mid z$. 不妨设 $a \mid w$ 在 A_x 中成立, 则 $w = a \cdot \frac{a_1}{x^n}$, 其中 $a_1 \in A$, $n \geq 0$. 这样得到 A 中的等式 $wx^n = aa_1$. 如果 $n > 0$, 由 $x \nmid a$ 并且 x 为素元, 得到 $x \mid a_1$. 设 $a_1 = xa_2$, 则 $\frac{a_1}{x^n} = \frac{a_2}{x^{n-1}}$. 继续讨论下去不难看到存在 $a_i \in A$ 使得 $w = aa_i$. 故在 A 中有 $a \mid w$. 这样我们证明了 a 为 A 的素元. □

定理 9.3.1 正则局部环是唯一因子分解整环.

证明 设 (A, m) 为正则局部环. 我们对 $\dim A$ 进行归纳. 当 $\dim A = 0$ 时, A 为域, 从而为唯一因子分解整环. 设 $\dim A > 0$, 取 $x \in m \setminus m^2$, 由命题 5.5.3, 商环 $A/(x)$ 为正则局部环, 从而为整环 (命题 5.5.2). 故 (x) 为 A 的素理想, x 为 A 的素元. 由命题 9.3.2, 只需证明 A_x 是唯一因子分解整环. 再由命题 9.3.1, 又只需证明 A_x 的任意高度为 1 的素理想均为主理想. 设 P 为 A 的高度为 1 的素理想, 并且满足 $x \notin P$. 则我们只需证明 PA_x 为 A_x 的主理想. 注意到 A_x 的每个素理想均形如 QA_x, 其中 Q 为 A 的不包含 x 的素理想. 由 $x \in m$ 知 $\operatorname{ht} Q < \operatorname{ht} m = \dim A$. 从而 $(A_x)_Q = A_Q$ 为正则局部环, 并且 $\dim A_Q < \dim A$. 由归纳假设知 A_Q 是唯一因子分解整环, 从而

$(PA_x)_Q = PA_Q$ 为主理想. 这样得到 A_x 的理想 PA_x 在每个素理想处的局部化均为主理想, 故 PA_x 为投射 A_x-模 (命题 7.1.7).

由定理 9.2.1知 P 作为有限 A-模, 存在长度有限的极小自由消解, 再作局部化得到 PA_x 作为 A_x-模存在长度有限的自由消解. 由下面的引理 9.3.1和 引理 9.3.2 即知 PA_x 为 A_x 的主理想. □

引理 9.3.1　设 A 为 Noether 环, M 为投射 A-模. 设 M 存在长度有限的自由消解

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

使得对任意 i, 自由 A-模 F_i 的秩有限. 则存在正整数 n_1, n_2, 使得 $M \oplus A^{n_1} \simeq A^{n_2}$.

证明　对 r 进行归纳. 当 $r = 1$ 时, 由 M 投射知短正合列 $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 分裂, 从而 $M \oplus F_1 \simeq F_0$. 当 $r > 1$ 时, 令 $K = \ker \epsilon$. 由 M 投射知短正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 分裂, 从而

$$M \oplus K \simeq F_0 \simeq A^s. \tag{9.3–1}$$

注意到

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

为 K 的自由消解, 并且由 (9.3–1) 知 K 为投射 A-模, 从而由归纳假设知存在正整数 m_1, m_2 使得

$$K \oplus A^{m_1} \simeq A^{m_2}. \tag{9.3–2}$$

联合 (9.3–1) 和 (9.3–2) 即得同构 $M \oplus A^{m_2} \simeq A^{s+m_1}$. □

引理 9.3.2　设 A 为整环, I 为 A 的非零理想, 并且存在正整数 n, m, 使得有 A-模同构 $I \oplus A^n \simeq A^m$. 则 $m = n + 1$, 并且 I 为主理想.

证明　设 $K = \mathrm{Frac}(A)$ 为 A 的分式域. 由 $I \oplus A^n \simeq A^m$ 得到 K-线性空间同构 $(I \otimes_A K) \oplus K^n \simeq K^m$. 显然 $I \otimes_A K \simeq K$. 故 $m = n + 1$.

条件 $I \oplus A^n \simeq A^{n+1}$ 等价于存在一个分裂的短正合列 $0 \longrightarrow A^n \xrightarrow{\varphi} A^{n+1} \longrightarrow I \longrightarrow 0$. 故存在同态 $\psi\colon A^{n+1} \longrightarrow A^n$, 使得 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. 取 A^n 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$ 以及 A^{n+1} 的一组基 $f_1, \ldots, f_{n+1}$, 则 φ 和 ψ 具有如下的矩阵表示:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1, \ldots, e_n) &= (f_1, \ldots, f_{n+1})P \\ \psi(f_1, \ldots, f_{n+1}) &= (e_1, \ldots, e_n)Q. \end{aligned}$$

其中 $P \in M_{(n+1)\times n}(A)$, $Q \in M_{n\times(n+1)}(A)$. 由 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ 知 $QP = \mathrm{I}_n$ 为单位方阵.

由 Cauchy-Binet 公式, 得到行列式等式:

$$1 = \det(QP) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i,$$

其中 a_i 为 Q 删去第 i 列得到的 n 阶方阵的行列式, 而 b_i 为 P 删去第 i 行得到的 n 阶方阵的行列式. 由此, 令 $\tilde{Q}$ 为 Q 添加第一行为 $(b_1, -b_2, \ldots, (-1)^{n+1} b_{n+1})$ 得到的 $n+1$ 阶方阵, 则 $\det \tilde{Q} = 1$. 同理, P 添加第 $n+1$ 列可以得到一个 $n+1$ 阶方阵 $\tilde{P}$ 满足 $\det \tilde{P} = 1$. 由 $\tilde{P}$ 为 A 上的可逆方阵, 不难看到令 $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n+1}) \coloneqq (f_1, \ldots, f_{n+1})\tilde{P}$, 则 $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n+1})$ 为 A^{n+1} 的一组基, 并且 $\varphi(e_i) = \tilde{f}_i,\ i = 1, \ldots, n$. 从而 $I \simeq \operatorname{coker} \varphi \simeq A \cdot \tilde{f}_{n+1}$ 为自由 A-模, 即 I 为主理想. □

习题

1. 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A-模. 证明: M 为投射模 $\iff \operatorname{Ext}^1_A(M, k) = 0$.

2. 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, M 为有限 A- 模, 并且 $\operatorname{proj\,dim} M = n < \infty$. 设

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

为 M 的一个投射消解. 证明:

(i) $\forall\ i = 0, \ldots, n,\ P_i \neq 0$.

(ii) 如果 P_n 为有限 A-模, 则 $\operatorname{Im} d_n$ 为自由 A-模, 从而以下为 M 的一个长度为 n 的投射消解:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_n \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

3. 设 k 为域, M 为多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 上的有限模. 证明: M 存在长度不超过 n 的有限投射消解, 即存在如下 $k[x_1, \ldots, x_n]$-模正合列, 使得每个 P_i 均为有限投射 $k[x_1, \ldots, x_n]$-模:

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

注记 9.3.1 事实上, 每个 P_i 均为自由 $k[x_1, \ldots, x_n]$-模. 这是因为有如下 Serre 所猜想, Quillen 和 Suslin 分别独立证明的定理: 任意有限投射 $k[x_1, \ldots, x_n]$-模均为自由模. 从而由该习题的结论可知 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 上的有限模均存在长度不超过 n 的有限自由消解. 这称为 **Hilbert 合冲定理** (Hilbert's syzygy theorem).

4. [Auslander-Buchsbaum] 设 A 为 Noether 局部环, $0 \neq M$ 为有限 A- 模. 设 $\operatorname{proj\,dim} M = n < \infty$. 证明 $\operatorname{proj\,dim} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A$.

5. 设 A 为正则环. 证明 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, 使得每个 A_i 均为整的正则环.

6. 设 k 为域, A 为有限生成 k-代数, 且 A 为整环. 证明以下几条互相等价:

(i) A 为 Cohen-Macaulay 环.

(ii) 对任意正则环 B, 任意单的有限扩张 $\varphi\colon B \hookrightarrow A$ 均为平坦的.

(iii) 存在多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 到 A 的单的平坦的有限扩张.

习题提示 1. 利用 M 的极小自由消解.

2, (ii). 利用习题1 证明 $\operatorname{Im} d_n$ 为投射 A-模, 从而为自由 A-模.

3. 对 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的任意素理想 P, 令 $A \coloneqq k[x_1,\dots,x_n]_P$. 则 A 为正则局部环, 且 $\dim A \leq n$. 从而 $\operatorname{proj\,dim} k(P) \leq n$. 再证明对任意有限 A-模 N, $\operatorname{proj\,dim} N \leq n$. 由此证明 $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M_P, k(P)) = 0$.

4. 对 $\operatorname{proj\,dim} M$ 进行归纳. 见 [26, Theorem 19.1].

6. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 利用定理 8.4.1. (iii) $\Longrightarrow$ (i): 利用定理 8.4.2.

第十章 微分模

我们将环中的元素看成 “函数”, 自然也希望定义这些函数的导数. 本章我们定义形式导数以及形式微分的概念, 并利用这些概念定义光滑同态和平展同态. 其中 Jacobian 判据在联系微分和光滑性时起到桥梁的作用, 以此为中心, 我们介绍光滑和平展同态的一些常用性质和等价定义.

10.1 基本正合列

定义 10.1.1 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模. 称映射 $D\colon B \longrightarrow M$ 为一个 A-**导子**, 如果其满足如下条件:

(i) $D(b_1 + b_2) = D(b_1) + D(b_2),\ \forall\ b_1, b_2 \in B.$

(ii) $D(b_1 b_2) = b_1 D(b_2) + b_2 D(b_1),\ \forall\ b_1, b_2 \in B.$

(iii) $D(a) = 0,\ \forall\ a \in A.$

我们将 A-导子的集合记为 $\mathrm{Der}_A(B, M)$. 对 $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, 对 $a \in A$, $b \in B$, 有 $D(ab) = aD(b) + bD(a) = aD(b)$. 故 D 为 A-模同态. 对于 $g \in B$, 注意到 $gD\colon B \longrightarrow M$, $b \mapsto g \cdot D(b)$ 也是 A-导子, 故 $\mathrm{Der}_A(B, M)$ 为 B-模.

例 10.1.1 设 A 为环, $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ 为 A 上的 n 元多项式代数. 对每个 i, 令 $\frac{\partial}{\partial x_i}\colon B \longrightarrow B$ 为对 x_i 求偏导数. 则 $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}_A(B, B)$.

设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, 考虑由形式符号集合 $\left\{\tilde{\mathrm{d}}b \mid b \in B\right\}$ 作为基生成的自由 B-模 $\widetilde{\Omega}_{B/A}$, 再定义 $\Omega_{B/A}$ 为商模 $\widetilde{\Omega}_{B/A}/F$, 其中 F 为全部的以下三类元素生成的 B-子模:

(i) $\tilde{\mathrm{d}}(b_1 + b_2) - \tilde{\mathrm{d}}b_1 - \tilde{\mathrm{d}}b_2,\ \forall\ b_1, b_2 \in B.$

(ii) $\tilde{\mathrm{d}}(b_1b_2) - b_1\tilde{\mathrm{d}}b_2 - b_2\tilde{\mathrm{d}}b_1,\ \forall\, b_1, b_2 \in B$.
(iii) $\tilde{\mathrm{d}}a,\ \forall\, a \in A$.

我们称 B-模 $\Omega_{B/A}$ 为 B 相对于 A 的**微分模**, 并将 $\tilde{\mathrm{d}}b$ 在 $\Omega_{B/A}$ 中代表的类记为 $\mathrm{d}\,b$. 由定义可知 $\Omega_{B/A}$ 作为 B-模由 $\{\mathrm{d}\,b \mid b \in B\}$ 生成. 微分模具有如下万有性质.

命题 10.1.1 (微分模的万有性质) 映射 $\mathrm{d}\colon B \longrightarrow \Omega_{B/A},\ b \longmapsto \mathrm{d}\,b$ 为一个 A-导子. 对任意 B-模 M 以及任意 A-导子 $D\colon B \longrightarrow M$, 均存在唯一的 B-模同态 $\varphi\colon \Omega_{B/A} \longrightarrow M$, 使得 $D = \varphi \circ \mathrm{d}$, 即下图交换:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_{B/A} \\ & \searrow^{D} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ & & M \end{array}$$

证明 直接验证可以看到 $B \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_{B/A},\ b \longmapsto \mathrm{d}\,b$ 为一个 A-导子. 设 M 为 B-模, $D\colon B \longrightarrow M$ 为 A-导子. 定义自由 B-模 $\widetilde{\Omega}_{B/A}$ 到 M 的同态 $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{\Omega}_{B/A} \longrightarrow M$ 为 $\tilde{\varphi}(\tilde{\mathrm{d}}b) = D(b),\ \forall\, b \in B$. 容易验证 $F \subset \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}$. 故 $\tilde{\varphi}$ 诱导 B-模同态 $\varphi\colon \Omega_{B/A} \longrightarrow M$, 并且满足 $D = \varphi \circ \mathrm{d}$. 由 $\{\mathrm{d}\,b \mid b \in B\}$ 为 $\Omega_{B/A}$ 的生成元可得 φ 的唯一性. □

上述万有性质说明 $\mathrm{d}\colon B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ 为 "万有的" A-导子, 并且对任意 B-模 M, 有集合的双射 $\operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_A(B, M)$, $\varphi \longmapsto \varphi \circ \mathrm{d}$.

例 10.1.2 设 $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ 为环 A 上的多项式环. 令 Ω 为符号集合 $\{\mathrm{d}\,x_1, \ldots, \mathrm{d}\,x_n\}$ 作为基生成的自由 B-模. 定义映射

$$\begin{aligned} d\colon B &\longrightarrow \Omega \\ f &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\,x_i \end{aligned}$$

容易验证 d 为 A-导子. 对任意 A-导子 $D\colon B \longrightarrow M$, 对 $f \in B$, 均有 $D(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} D(x_i)$. 故存在唯一的 B-模同态 $\varphi\colon \Omega \longrightarrow M,\ \mathrm{d}\,x_i \longmapsto D(x_i)$, 使得 $D = \varphi \circ d$. 由微分模的万有性质, 得到 B-模同构 $\Omega_{B/A} \simeq \Omega$. 从而 $\Omega_{B/A}$ 为秩 n 的自由 B-模, 并且 $\mathrm{d}\,x_1, \ldots, \mathrm{d}\,x_n$ 为一组基.

下面的命题说明取微分模的操作与张量积和局部化都是交换的.

命题 10.1.2 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态.
(i) 设 $A \longrightarrow A'$ 为环同态. 令 $B' = B \otimes_A A'$, 则有 B'-模同构

$$\Omega_{B'/A'} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B B' \simeq \Omega_{B/A} \otimes_A A'.$$

(ii) 设 S 为 B 的乘法子集, 则有 B_S-模同构 $\Omega_{B_S/A} \simeq (\Omega_{B/A})_S$.

证明 (i): 同构 $\Omega_{B/A}\otimes_B B'\simeq\Omega_{B/A}\otimes_A A'$ 由张量积的基本性质得到. 下面构造 $\Omega_{B'/A'}$ 与 $\Omega_{B/A}\otimes_A A'$ 的同构. 首先 A-双线性映射 $B\times A'\longrightarrow\Omega_{B/A}\otimes_A A'$, $(b,a')\longmapsto(\mathrm{d}\,b)\otimes a'$ 诱导了 A-模同态 $D\colon B'\longrightarrow\Omega_{B/A}\otimes_A A'$, $b\otimes a'\longmapsto(\mathrm{d}\,b)\otimes a'$. 容易验证 D 为 A'-导子. 从而 D 诱导了 B'-模同态 $\varphi\colon\Omega_{B'/A'}\longrightarrow\Omega_{B/A}\otimes_A A'$, 满足 $\varphi(\mathrm{d}(b\otimes a'))=(\mathrm{d}\,b)\otimes a'$.

另一方面, 对任意 $a'\in A'$, 映射 $B\longrightarrow\Omega_{B'/A'}$, $b\longmapsto\mathrm{d}(b\otimes a')$ 是一个 A-导子, 从而诱导 B-模同态 $\psi_{a'}\colon\Omega_{B/A}\longrightarrow\Omega_{B'/A'}$. 令 $\psi\colon\Omega_{B/A}\otimes_A A'\longrightarrow\Omega_{B'/A'}$ 为 A-双线性映射 $\Omega_{B/A}\times A'\longrightarrow\Omega_{B'/A'}$, $(\omega,a')\longmapsto\psi_{a'}(\omega)$ 诱导的 A-模同态. 不难验证 ψ 为 B'-模同态, 并且 $\psi((\mathrm{d}\,b)\otimes a')=\mathrm{d}(b\otimes a')$. 直接在生成元上验证即得 φ 和 ψ 为互逆的同态. 从而得到同构 $\Omega_{B'/A'}\simeq\Omega_{B/A}\otimes_A A'$.

(ii): 定义映射 $D\colon B_S\longrightarrow(\Omega_{B/A})_S$, $\frac{b}{s}\longmapsto\frac{s\,\mathrm{d}\,b-b\,\mathrm{d}\,s}{s^2}$. 直接验证可以看到 D 是良好定义的, 并且是一个 A-导子. 从而 D 诱导一个 B_S-模同态 $\varphi\colon\Omega_{B_S/A}\longrightarrow(\Omega_{B/A})_S$, 满足 $\varphi(\mathrm{d}\,\frac{b}{s})=\frac{s\,\mathrm{d}\,b-b\,\mathrm{d}\,s}{s^2}$.

另一方面, 复合映射 $B\longrightarrow B_S\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega_{B_S/A}$ 是一个 A-导子, 从而诱导 B-模同态 $\Omega_{B/A}\longrightarrow\Omega_{B_S/A}$. 模的局部化的万有性质 (命题 2.1.4) 给出 B_S-模同态 $\psi\colon(\Omega_{B/A})_S\longrightarrow\Omega_{B_S/A}$, 满足 $\psi(\mathrm{d}\,b)=\mathrm{d}\,\frac{b}{1}$. 在生成元上直接验证可得 φ,ψ 为互逆的同态, 故知有 B_S-模同构 $\Omega_{B_S/A}\simeq(\Omega_{B/A})_S$. □

下面讨论 A-导子与同态的幂零提升之间的关系. 给定如下环同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C/N \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

其中 N 为 C 的理想, 满足 $N^2=0$. 同态 $C\longrightarrow C/N$ 为自然的商同态. 我们称使得如下图表交换的环同态 $\beta_1\colon B\longrightarrow C$ 为 β 的一个**提升**:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C/N \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & \overset{\beta_1}{\searrow} & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

由 $N^2=0$ 知 N 自然为 C/N-模. 通过同态 $\beta\colon B\longrightarrow C/N$, 我们将 N 也看作 B-模.

命题 10.1.3 设 A,B,C,N 以及交换图表

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C/N \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & \overset{\beta_1}{\searrow} & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

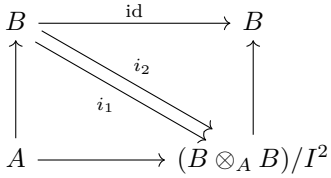
如上. 则对 β 的任意提升 $\beta_2\colon B\longrightarrow C$, 都有 $\beta_2-\beta_1\colon B\longrightarrow N$ 为 A-导子. 反之, 任给

A-导子 $D\colon B \longrightarrow N$, 都有 $\beta_1 + D\colon B \longrightarrow C$ 为 β 的提升.

证明 直接验证即可. □

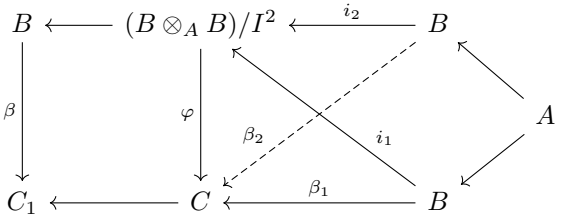
环同态 $C \xrightarrow{\varphi} C_1$ 称为 C_1 的一个**一阶加厚**, 如果该同态为满同态, 并且核 $I \coloneqq \operatorname{Ker}\varphi$ 满足 $I^2 = 0$. 上述命题说明对 A-代数的一阶加厚 $C \longrightarrow C/N$, A-代数同态 $\beta\colon B \longrightarrow C/N$ 的提升之差对应到 A-导子集合 $\operatorname{Der}_A(B, N) \simeq \operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N)$.

利用上面的观察, 可以给出微分模的另一种构造. 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态. 考虑环的满同态 $B \otimes_A B \longrightarrow B$, $b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 b_2$. 记该同态的核为 I. 则诱导同态 $(B \otimes_A B)/I^2 \longrightarrow B$ 为一阶加厚, 其核为 I/I^2. 注意到 $i_1\colon B \longrightarrow (B \otimes_A B)/I^2$, $b \longmapsto b \otimes 1$ 和 $i_2\colon B \longrightarrow (B \otimes_A B)/I^2$, $b \longmapsto 1 \otimes b$ 为恒等同态 $\mathrm{id}\colon B \longrightarrow B$ 的两个提升, 即有如下交换图表:



由命题 10.1.3 即知 $i_2 - i_1\colon B \longrightarrow I/I^2$ 为 A-导子. 提升对 (i_1, i_2) 具有如下万有性质.

命题 10.1.4 A, B, I 如上. 设 $C \longrightarrow C_1$ 为 A-代数同态, 且为一阶加厚. 设 $\beta\colon B \longrightarrow C_1$ 为 A-代数同态. 则对任意两个 β 的提升 $\beta_i\colon B \longrightarrow C$, $i = 1, 2$, 均存在唯一的环同态 $\varphi\colon (B \otimes_A B)/I^2 \longrightarrow C$, 使得下图交换:

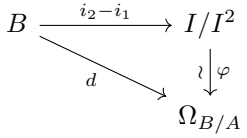


证明 由张量积的万有性质, 在上图中, 将 $(B \otimes_A B)/I^2$ 换作 $B \otimes_A B$ 可找到使上图交换的环同态 $\tilde{\varphi}\colon B \otimes_A B \longrightarrow C$. 再由 $\tilde{\varphi}(I) \subset \operatorname{Ker}(C \longrightarrow C_1)$ 知 $\tilde{\varphi}(I^2) = 0$, 从而 $\tilde{\varphi}$ 诱导所求的环同态 φ. 唯一性由张量积的万有性质即得. □

下面的命题说明 I/I^2 同构于微分模 $\Omega_{B/A}$.

命题 10.1.5 A, B, I 如上. I/I^2 作为 B-模由 $\{(i_2 - i_1)(b) = 1 \otimes b - b \otimes 1 \mid b \in B\}$ 生

成, 并且存在唯一的 B-模同构 $\varphi\colon I/I^2 \xrightarrow{\sim} \Omega_{B/A}$, 使得下图交换:



证明 首先验证 I/I^2 由 $\{1\otimes b - b\otimes 1 \mid b\in B\}$ 生成. 任取 I 中的元素

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)} \otimes b_2^{(i)}.$$

由 $x \in I = \operatorname{Ker}(B\otimes_A B \longrightarrow B)$ 知 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_1^{(i)} b_2^{(i)} = 0$. 故

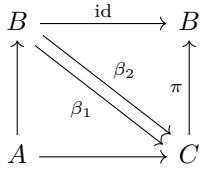
$$x = \sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)} \otimes 1 \cdot (1\otimes b_2^{(i)} - b_2^{(i)} \otimes 1 + b_2^{(i)} \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)} \otimes 1 \cdot (1\otimes b_2^{(i)} - b_2^{(i)} \otimes 1).$$

这说明 $\bar{x} \in I/I^2$ 在 $\{1\otimes b - b\otimes 1 \mid b\in B\}$ 生成的 B-子模中.

令 $C = B \oplus \Omega_{B/A}$ 为 Abel 群的直和. 在 C 上定义乘法如下:

$$(b,\omega)\cdot(b',\omega') \coloneqq (bb', b\omega' + b'\omega).$$

容易验证 C 为环, 自然投影同态 $\pi\colon C \longrightarrow B$ 为一阶加厚, 并且核为 $\Omega_{B/A}$. 定义映射 $\beta_1\colon B \longrightarrow C$ 为 $\beta_1(b) = (b,0)$, $\beta_2\colon B \longrightarrow C$ 为 $\beta_2(b) = (b, \mathrm{d}\, b)$. 则 β_1, β_2 均为环同态, 且下图交换:



这说明 β_1, β_2 均为 $\mathrm{id}\colon B \longrightarrow B$ 的提升. 在命题 10.1.4 中, 取 $C_1 = B$, 取 β 为恒等同态 $B \xrightarrow{\mathrm{id}} C_1 = B$, 则得到同态 $\varphi\colon (B\otimes_A B)/I^2 \longrightarrow C = B\oplus\Omega_{B/A}$. 由图表的交换性知 φ 诱导了同态 (仍记为 φ):

$$\varphi\colon I/I^2 = \operatorname{Ker}((B\otimes_A B)/I^2 \longrightarrow B) \longrightarrow \Omega_{B/A} = \operatorname{Ker}(C \xrightarrow{\pi} B).$$

由于 $\beta_2-\beta_1=\mathrm{d}\colon B\longrightarrow\Omega_{B/A}$, 我们得到下面的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_2-i_1} & I/I^2 \\ & \searrow^{d} & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ & & \Omega_{B/A} \end{array}$$

另一方面, 由于 $i_1,i_2\colon B\longrightarrow(B\otimes_A B)/I^2$ 均为 $B\xrightarrow{\mathrm{id}}B$ 的提升, 知 $i_2-i_1\colon B\longrightarrow I/I^2$ 为 A-导子, 从而存在 B-模同态 $\psi\colon\Omega_{B/A}\longrightarrow I/I^2$, 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{d} & \Omega_{B/A} \\ & \searrow^{i_2-i_1} & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ & & I/I^2 \end{array}$$

在生成元上直接验证即知 φ,ψ 为互逆的模同态, 从而得到 $\varphi\colon I/I^2\xrightarrow{\sim}\Omega_{B/A}$ 为 B-模同构. 由 i_2-i_1 的像生成 I/I^2 可得 φ 的唯一性. □

下面利用一阶加厚同态的提升给出形式光滑 (不分歧, 平展) 性的定义.

定义 10.1.2 我们称环同态 $A\longrightarrow B$ **形式光滑** (或**形式不分歧**, 或**形式平展**), 如果对任意一阶加厚 $C\longrightarrow C_1$, 以及任意环同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

均存在 (或至多存在一个, 或存在唯一) 环同态 $B\longrightarrow C$, 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C_1 \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

我们有时也将 $A\longrightarrow B$ 形式光滑称为 B 相对于 A 形式光滑, 或者 B/A 形式光滑. 同样的表述和记号也适用于形式不分歧和形式平展. 首先讨论这三个概念之间的一些简单关系.

命题 10.1.6 设 $A\longrightarrow B$ 为环同态. 则:

(i) $A\longrightarrow B$ 为形式不分歧的 $\iff\Omega_{B/A}=0$.

(ii) $A\longrightarrow B$ 为形式平展的 $\iff$ 其为形式光滑的, 并且 $\Omega_{B/A}=0$.

证明 (i): 由命题 10.1.3 和微分模的万有性质即得.

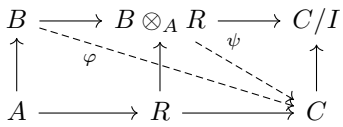
(ii): 由定义, 形式平展等价于形式光滑加上形式不分歧, 从而由 (i), 也等价于形式光滑加上微分模平凡. □

例 10.1.3 由定义不难验证下面两个同态都是形式光滑的.

(i) $A \longrightarrow A[x]$.
(ii) $A \longrightarrow A_S$, 其中 S 为 A 的乘法子集. 实际上还可以验证 $A \longrightarrow A_S$ 为形式平展的.

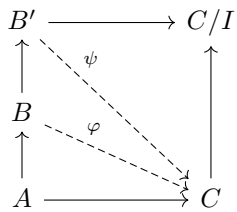
命题 10.1.7 (基变换与复合) (i) 设环同态 $A \longrightarrow B$ 为形式光滑 (形式不分歧, 形式平展) 的. 设 $A \longrightarrow R$ 为环同态, 则 $R \longrightarrow B \otimes_A R$ 也为形式光滑 (形式不分歧, 形式平展) 的.
(ii) 设 $A \longrightarrow B$ 和 $B \longrightarrow B'$ 均为形式光滑 (形式不分歧, 形式平展) 的环同态, 则复合同态 $A \longrightarrow B'$ 也为形式光滑 (形式不分歧, 形式平展) 的.
(iii) 设 $A \longrightarrow B$ 和 $B \longrightarrow B'$ 为环同态, 并且 $A \longrightarrow B$ 为形式平展的. 则 $A \longrightarrow B'$ 为形式光滑 (形式不分歧, 形式平展) 的 $\iff$ $B \longrightarrow B'$ 为形式光滑 (形式不分歧, 形式平展) 的.

证明 (i): 对一阶加厚 $C \longrightarrow C/I$, 以及下图的实箭头给出的同态的交换图表:



由张量积的万有性质, 提升 φ 一一对应到提升 ψ. 从而命题得证.

(ii): 设 $C \longrightarrow C/I$ 为一阶加厚, 并给定下面的实箭头形成的环同态的交换图表:



设 $A \longrightarrow B$ 和 $B \longrightarrow B'$ 均为形式光滑的, 则由 $A \longrightarrow B$ 形式光滑得到提升 φ, 再由 $B \longrightarrow B'$ 形式光滑得到提升 ψ, 故 $A \longrightarrow B'$ 形式光滑. 形式不分歧的复合性可以类似证明. 联合形式光滑和形式不分歧的情形, 即得到形式平展的复合性.

(iii): 由 (ii) 即得 $\Longleftarrow$. 故只需证明 $\Longrightarrow$. 记同态 $B \longrightarrow B'$ 为 φ, 记同态 $A \longrightarrow B$ 为 ψ. 首先设 $\varphi \circ \psi \colon A \longrightarrow B'$ 是形式光滑的, 我们需要证明 $B \xrightarrow{\varphi} B'$ 也是形式光滑

的. 为此, 对任意一阶加厚 $C \longrightarrow C/I$ 以及如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta} & C/I \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

利用 $A \longrightarrow B'$ 形式光滑, 可得同态 $\beta' \colon B' \longrightarrow C$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta} & C/I \\ {\scriptstyle\varphi\circ\psi}\uparrow & \overset{\beta'}{\searrow} & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\gamma\circ\psi} & C \end{array}$$

注意到 γ 和 $\beta' \circ \varphi$ 均为下图中 $\beta \circ \varphi$ 的提升:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta\circ\varphi} & C/I \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{\gamma\circ\psi} & C \end{array}$$

从而利用 $A \longrightarrow B$ 形式不分歧即得 $\beta' \circ \varphi = \gamma$. 故得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta} & C/I \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & \overset{\beta'}{\searrow} & \uparrow \\ B & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

这就证明了 $\varphi \colon B \longrightarrow B'$ 光滑. 类似地可以由 $A \longrightarrow B'$ 形式不分歧得到 $B \longrightarrow B'$ 形式不分歧. 联合形式光滑和形式不分歧的结论即知 $A \longrightarrow B'$ 形式平展蕴含 $B \longrightarrow B'$ 形式平展. □

微分模有两个基本正合列, 下面是其中一个.

定理 10.1.1 设 $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ 为环同态.

(i) 有以下 C-模的右正合列:

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\varphi} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\psi} \Omega_{C/B} \longrightarrow 0. \tag{10.1–1}$$

其中 $\varphi((\mathrm{d}\, b) \otimes c) = c\, \mathrm{d}\, f(b)$, $\psi(\mathrm{d}\, c) = \mathrm{d}\, c$.

(ii) 若 $B \longrightarrow C$ 为形式光滑的, 则 (10.1–1) 为分裂的短正合列, 即存在 C-模同态 $\varphi_1 \colon \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C$, 使得 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$.

(iii) 若 $A \longrightarrow C$ 为形式光滑的, 则 (10.1–1) 为分裂的短正合列 $\iff$ $B \longrightarrow C$ 为形式

光滑的.

证明 (i): 由命题 2.3.2 (iii), 只需证明对任意 C-模 M, 以下为左正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M).$$

由于由自然同构 $\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M)$, 故又只需证以下为左正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/B}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M).$$

由微分模的万有性质, 最终只需证以下为左正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M).$$

而这根据导子的定义以及这些同态的定义是显然的.

(ii): 记 C-模 $\Omega_{B/A} \otimes_B C$ 为 M. 在 Abel 群直和 $C \oplus M$ 上定义如下乘法:

$$(c_1, m_1) \cdot (c_2, m_2) \coloneqq (c_1 c_2, c_1 m_2 + c_2 m_1).$$

则 $C \oplus M$ 成为环, 并且投影映射 $C \oplus M \longrightarrow C$, $(c, m) \longmapsto c$ 为一阶加厚. 考虑如下环同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\mathrm{id}} & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \longrightarrow & C \oplus M \end{array}$$

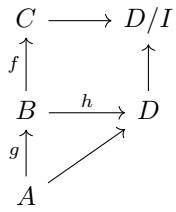
其中 $B \longrightarrow C \oplus M$ 为同态: $b \longmapsto (f(b), \mathrm{d}\, b \otimes 1)$. 由 $B \longrightarrow C$ 形式光滑, 我们得到如下提升:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\mathrm{id}} & C \\ \uparrow & \overset{\alpha}{\searrow} & \uparrow \\ B & \longrightarrow & C \oplus M \end{array}$$

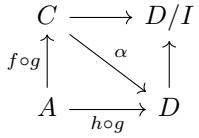
有图表的交换性知 $\forall\, c \in C$, $\alpha(c) = (c, \alpha_2(c))$. 可以验证 $\alpha_2 \colon C \longrightarrow M = \Omega_{B/A} \otimes_B C$ 为 A-导子, 并且对 $b \in B$, 有 $\alpha_2(f(b)) = \mathrm{d}\, b \otimes 1$. 再由微分模的万有性质, α_2 诱导了 C-模同态 $\varphi_1 \colon \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C$. 由 α 满足的条件知 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$.

(iii): 在 (ii) 中已经证明了 $\Longleftarrow$. 下面证明 $\Longrightarrow$. 设 $\varphi_1 \colon \Omega_{C/A} \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C$ 为

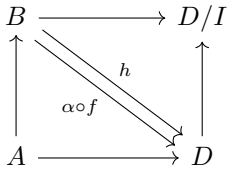
C-模同态, 且满足 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$. 对任意一阶加厚 $D \longrightarrow D/I$ 以及环同态的交换图表:



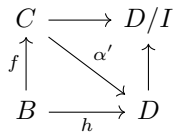
由 $A \longrightarrow C$ 形式光滑, 可以找到同态 $\alpha\colon C \longrightarrow D$, 使得如下图表交换:



由此得到 $\alpha \circ f$ 和 h 均为 $B \longrightarrow D/I$ 的提升:



从而 $h - \alpha \circ f\colon B \longrightarrow I$ 为 A-导子, 进而诱导 B-模同态 $\delta\colon \Omega_{B/A} \longrightarrow I$. 注意到 I 实际上为 C-模 (通过 $C \longrightarrow D/I$), 我们有 C-模同态的复合: $\Omega_{C/A} \xrightarrow{\varphi_1} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\delta\otimes 1} I$. 这对应 A-导子 $\delta'\colon C \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_{C/A} \xrightarrow{(\delta\otimes 1)\circ\varphi_1} I$. 直接验证可得 $\alpha' \coloneqq \alpha + \delta'$ 是 B-代数同态, 并且为 $C \longrightarrow D/I$ 的提升. 即有下面的交换图表:



这样就证明了 $B \longrightarrow C$ 形式光滑. □

注记 10.1.1 对于微分流形的淹没 (submersion) $f\colon X \longrightarrow Y$, 有联系切丛的短正合列:

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \longrightarrow f^* T_Y \longrightarrow 0.$$

取对偶丛得到联系余切丛的短正合列:

$$0 \longrightarrow f^*T_Y^* \longrightarrow T_X^* \longrightarrow T_{X/Y}^* \longrightarrow 0.$$

其代数类比就是定理 10.1.1 中的正合列.

关于微分模的第二个基本正合列为:

定理 10.1.2 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, I 为 B 的理想. 令 $\overline{B} = B/I$ 为商环.

(i) 有以下 $\overline{B}$-模的右正合列:

$$I/I^2 \xrightarrow{\varphi} \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \xrightarrow{\psi} \Omega_{\overline{B}/A} \longrightarrow 0. \tag{10.1–2}$$

其中 $\varphi(i) = \mathrm{d}\, i \otimes 1$, $\psi(\mathrm{d}\, b \otimes \lambda) = \lambda\, \mathrm{d}\, \bar{b}$.

(ii) 若 $A \longrightarrow \overline{B}$ 为形式光滑的, 则 (10.1–2) 为分裂的短正合列, 即存在 $\overline{B}$-模同态 $\varphi_1 \colon \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \longrightarrow I/I^2$, 使得 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$.

(iii) 若 $A \longrightarrow B$ 为形式光滑的, 则 (10.1–2) 为分裂的短正合列 $\Longleftrightarrow$ $A \longrightarrow \overline{B}$ 为形式光滑的.

证明 (i): 与定理 10.1.1, (i) 类似, 只需证明对任意 $\overline{B}$-模 M, 以下为左正合列:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{B}}(\Omega_{\overline{B}/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{B}}(\Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{B}}(I/I^2, M).$$

而这又等价于证明

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(\overline{B}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{B}}(I/I^2, M)$$

为左正合列. 而根据定义这是容易看到的.

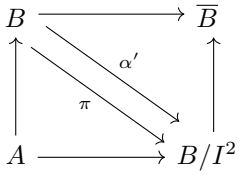
(ii): 注意到 $B/I^2 \longrightarrow \overline{B}$ 为一阶加厚, 其核为 I/I^2. 考虑如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} \overline{B} & \longrightarrow & \overline{B} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B/I^2 \end{array}$$

由 $A \longrightarrow \overline{B}$ 形式光滑, 存在环同态 $\alpha \colon \overline{B} \longrightarrow B/I^2$, 使得如下图表交换

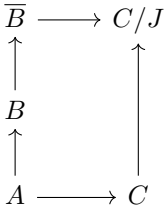
$$\begin{array}{ccc} \overline{B} & \longrightarrow & \overline{B} \\ \uparrow & \overset{\alpha}{\searrow} & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B/I^2 \end{array}$$

令 α' 为复合同态 $B \longrightarrow \overline{B} \xrightarrow{\alpha} B/I^2$. 则 α' 和自然商同态 $\pi\colon B \longrightarrow B/I^2$ 均为 $B \longrightarrow \overline{B}$ 的提升, 即有如下交换图表

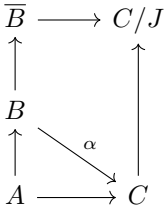


由此得到 A-导子 $\pi - \alpha'\colon B \longrightarrow I/I^2$. 这对应 B-模同态 $\Omega_{B/A} \longrightarrow I/I^2$, 进而由 I/I^2 为 $\overline{B}$-模, 又对应 $\overline{B}$-模同态 $\varphi_1\colon \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \longrightarrow I/I^2$. 直接验证即得 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$.

(iii): 我们只需证明 $\Longrightarrow$. 设 $\varphi_1\colon \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \longrightarrow I/I^2$ 为 $\overline{B}$-模同态, 使得 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$. 设 $C \longrightarrow C/J$ 为一阶加厚, 并且有如下环同态的交换图表



由 $A \longrightarrow B$ 形式光滑, 得到环同态 $\alpha\colon B \longrightarrow C$ 为 $B \longrightarrow C/J$ 的提升. 即如下图表交换



由图表的交换性可知 $\alpha(I) \subset J$, 再由 $J^2 = 0$ 得到良好定义的 $\overline{B}$-模同态 $\alpha'\colon I/I^2 \longrightarrow J$, $\overline{i} \longmapsto \alpha(i)$. 定义 $\beta\colon B \longrightarrow J$ 为如下复合映射

$$B \xrightarrow{b \mapsto (\mathrm{d}\, b) \otimes 1} \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \xrightarrow{\varphi_1} I/I^2 \xrightarrow{\alpha'} J.$$

直接验证可知 $\gamma := \alpha - \beta\colon B \longrightarrow C$ 为环同态, 并且 $\gamma(I) = 0$. 从而得到环同态 $\overline{\gamma}\colon \overline{B} \longrightarrow C$, $\overline{b} \longmapsto \gamma(b)$. 由上面的交换图表可以看到 $\overline{\gamma}$ 是 $\overline{B} \longrightarrow C/J$ 的一个提升. □

注记 10.1.2 设 $j\colon X \hookrightarrow Y$ 是微分流形的光滑嵌入, 则有联系法丛和切丛的短正合列:

$$0 \longrightarrow T_X \longrightarrow j^* T_Y \longrightarrow N_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

取对偶丛即得到联系余法丛和余切丛的短正合列:

$$0 \longrightarrow N_{X/Y}^* \longrightarrow j^*T_Y^* \longrightarrow T_X^* \longrightarrow 0.$$

其代数类比即为定理 10.1.2 中的正合列.

例 10.1.4 设 $B = A[x_1, \dots, x_n]/I$ 为有限生成 A-代数, 并且 $I = (f_1, \dots, f_m)$. 则由例 10.1.2 和定理 10.1.2 可知, $\Omega_{B/A} \simeq (\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} B\,\mathrm{d}\,x_i)/F$ 同构于自由 B-模 $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} B\,\mathrm{d}\,x_i$ 的商模, 其中子模 F 由 $\mathrm{d}\,f_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\,x_k$ $(j = 1, \dots, m)$ 生成.

设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, $S \subset B$ 为乘法子集. 注意到 $B \longrightarrow B_S$ 为形式平展的, 故对 $A \longrightarrow B \longrightarrow B_S$ 应用定理 10.1.1, 得到分裂的短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B B_S \longrightarrow \Omega_{B_S/A} \longrightarrow \Omega_{B_S/B} \longrightarrow 0.$$

又由 $B \longrightarrow B_S$ 形式平展知 $\Omega_{B_S/B} = 0$, 故我们再次得到微分模的局部化性质 $\Omega_{B/A} \otimes_B B_S \xrightarrow{\sim} \Omega_{B_S/A}$.

命题 10.1.8 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, $Q \in \operatorname{Spec} B$, $P = Q \cap A$. 则有 B_Q-模同构

$$\Omega_{B_Q/A_P} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B B_Q.$$

证明 由微分模的局部化性质得到 $\Omega_{B/A} \otimes_B B_Q \simeq \Omega_{B_Q/A}$. 对环同态 $A \longrightarrow A_P \longrightarrow B_Q$ 应用定理 10.1.1, 并注意到 $\Omega_{A_P/A} = 0$, 得到 $\Omega_{B_Q/A} \simeq \Omega_{B_Q/A_P}$. 从而有同构 $\Omega_{B/A} \otimes_B B_Q \simeq \Omega_{B_Q/A_P}$. □

直观上看, 微分模是流形上微分一形式的代数类比, 而流形上一点处的一形式空间同构于该点的余切空间. 下面的推论是这个事实的代数类比.

推论 10.1.1 设 k 为域, (A, m) 为局部 k-代数 (既是局部环, 又是 k-代数), 并且结构同态 $k \longrightarrow k(m) \coloneqq A/m$ 为同构. 则有 k-线性空间同构 $m/m^2 \simeq \Omega_{A/k} \otimes_A k(m)$.

证明 对环同态 $k \longrightarrow A$ 以及理想 m 应用定理 10.1.2, 并且注意到 $k \xrightarrow{\sim} k(m)$ 为形式平展的, 我们得到如下短正合列

$$0 \longrightarrow m/m^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A k(m) \longrightarrow \Omega_{k(m)/k} \longrightarrow 0.$$

由 $k(m) \simeq k$ 知 $\Omega_{k(m)/k} = 0$, 故得同构 $m/m^2 \simeq \Omega_{A/k} \otimes_A k(m)$. □

10.2 光滑同态

如果 A-代数 B 同构于一个有限生成 A-代数在某个乘法子集处的局部化, 则称 A-代数 B 为**本质有限生成的**.

命题 10.2.1 设 A-代数 B 是本质有限生成的, 则 $\Omega_{B/A}$ 为有限 B-模.

证明 设 $B \simeq C_S$, 其中 $C = A[x_1, \dots, x_n]/I$, S 为 C 的乘法子集. 由命题 10.1.2 知 $\Omega_{B/A} \simeq \Omega_{C/A} \otimes_C B$. 由例 10.1.4可以看到 $\Omega_{C/A} = C\,\mathrm{d}\,x_1 + \cdots + C\,\mathrm{d}\,x_n$, 从而 $\Omega_{B/A} = B\,\mathrm{d}\,x_1 + \cdots + B\,\mathrm{d}\,x_n$ 为有限 B-模. □

定义 10.2.1 设 A 为 Noether 环.

(i) 环同态 $A \longrightarrow B$ 称为**光滑的** (**不分歧的**, **平展的**), 如果其为形式光滑的 (形式不分歧的, 形式平展的), 并且 B 为本质有限生成的 A-代数.

(ii) 对环同态 $A \longrightarrow B$, 设 $P \in \operatorname{Spec} B$, $Q = P \cap A$. 我们称 B/A 在 P 点光滑 (不分歧, 平展), 如果局部化同态 $A_Q \longrightarrow B_P$ 为光滑的 (不分歧的, 平展的).

与形式光滑一样, 如果 $A \longrightarrow B$ 是光滑的, 我们也称 B 相对于 A 是光滑的, 或 B/A 是光滑的. 对不分歧和平展同态有类似的记号.

例 10.2.1 多项式环 $A[x_1, \dots, x_n]$ 相对于 A 是光滑的. 这是光滑同态的最基本模型.

命题 10.2.2 设 A 为 Noether 环, $B = A[x_1, \dots, x_n]$ 为多项式环, I 为 B 的理想. 令 $C = B/I$. 则有:

(i) C/A 为光滑的 $\iff$ 基本正合列

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$$

为分裂的短正合列.

(ii) 设 $Q \in \operatorname{Spec} C$, 则 C/A 在 Q 处光滑 $\iff$ (i) 中的基本正合列在 Q 处的局部化

$$(I/I^2)_Q \longrightarrow (\Omega_{B/A} \otimes_B C)_Q \longrightarrow (\Omega_{C/A})_Q \longrightarrow 0$$

为分裂的短正合列.

(iii) C/A 光滑 $\iff$ 对任意 $Q \in \operatorname{Spec} C$, C/A 在 Q 处光滑.

证明 (i): 注意到 C 为有限生成 A-代数, 再利用光滑的定义以及定理 10.1.2 即得.

(ii): 记 $P = Q \cap A$. 则 $C_Q \simeq B_Q/I_Q$ 为本质有限生成的 A_P-代数, B_Q 为光滑 A_P-代数. 注意到有 C_Q-模的同构:$(I/I^2)_Q \simeq I_Q/I_Q^2$, $(\Omega_{B/A} \otimes_B C)_Q \simeq \Omega_{B_Q/A_P} \otimes_{B_Q} C_Q$, 以及 $(\Omega_{C/A})_Q \simeq \Omega_{C_Q/A_P}$, 其中后两个同构由命题 10.1.8 得到. 对 $A_P \longrightarrow B_Q \longrightarrow C_Q$ 应用定理 10.1.2 即可.

(iii): 由 (i), (ii) 和下面的引理 10.2.1 即得. □

引理 10.2.1 设 A 为 Noether 环, $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ 为有限 A-模的右正合列. 则以下两条互相等价:

(i) $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为分裂的短正合列.

(ii) 对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, 在 P 处作局部化得到的复形

$$M_{1P} \longrightarrow M_{2P} \longrightarrow M_{3P} \longrightarrow 0$$

为分裂的短正合列.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 显然. 下面证明 (ii) $\Longrightarrow$ (i). 考虑如下复形

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M_3, M_1) \xrightarrow{\circ\psi} \operatorname{Hom}_A(M_2, M_1) \xrightarrow{\circ\varphi} \operatorname{Hom}_A(M_1, M_1) \longrightarrow 0. \tag{10.2–1}$$

我们只需证明该复形为短正合列, 因为这样就可以得到存在 $\varphi_1 \in \operatorname{Hom}_A(M_2, M_1)$, 使得 $\varphi_1 \circ \varphi = \mathrm{id}$. 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, 由 Hom 与局部化的交换性 (命题 2.3.6), 复形 (10.2–1) 在 P 处作局部化为 $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A_P}(M_{3P}, M_{1P}) \xrightarrow{\circ\psi} \operatorname{Hom}_{A_P}(M_{2P}, M_{1P}) \xrightarrow{\circ\varphi} \operatorname{Hom}_{A_P}(M_{1P}, M_{1P}) \longrightarrow 0$, 而由 (ii), 这是短正合列. 再由命题 2.3.4 即知 (10.2–1) 为短正合列. □

在 Noether 局部环以及 M_2 为自由模的情形, 可以将分裂短正合列的判断进一步约化到剩余类域上, 即有下面的引理.

引理 10.2.2 设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为有限 A-模的右正合列, 并且 M_2 为自由 A-模. 则以下两条互相等价:

(i) $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为分裂的短正合列.

(ii) $M_1 \otimes_A k \xrightarrow{\varphi\otimes 1} M_2 \otimes_A k$ 为 k-线性空间的单同态.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 是显然的. 下面证明 (ii) $\Longrightarrow$ (i). 设 $\overline{\varphi_1}\colon M_2 \otimes_A k \longrightarrow M_1 \otimes_A k$ 为 k-线性空间同态, 并且满足 $\overline{\varphi_1} \circ (\varphi \otimes 1) = \mathrm{id}$. 由于 M_2 为自由 A-模, 可以找到 A-模同态 $\varphi_1\colon M_2 \longrightarrow M_1$, 使得 $\varphi_1 \otimes 1 = \overline{\varphi_1}$. 这样得到 $\varphi_1 \circ \varphi\colon M_1 \longrightarrow M_1$ 满足 $(\varphi_1 \circ \varphi) \otimes 1 = \mathrm{id}\colon M_1 \otimes_A k \longrightarrow M_1 \otimes_A k$. 注意到 $M_1 \otimes_A k = M_1/mM_1$, 由 Nakayama 引理即知 $\varphi_1 \circ \varphi\colon M_1 \longrightarrow M_1$ 为满同态. 再由命题 3.1.1 得到 $\varphi_1 \circ \varphi$ 为同构. 令 $\varphi_2 := (\varphi_1 \circ \varphi)^{-1} \circ \varphi_1 \in \operatorname{Hom}_A(M_2, M_1)$, 则 $\varphi_2 \circ \varphi = \mathrm{id}$. 从而 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$ 为分裂的短正合列. □

在微分流形中一般通过 Jacobian 矩阵的满秩性来得到正则子流形. 这个方法在代数上的类比即为下面的重要定理.

定理 10.2.1 (Jacobian 判据) 设 A 为 Noether 环, $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ 为多项式环, I 为 B 的理想, $C = B/I$ 为商环. 设 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 且 $I \subset Q$. 我们将 C 中的素理想 Q/I

也记为 Q. 记 $k(Q) = B_Q/QB_Q \simeq C_Q/QC_Q$ 为 Q 点的剩余类域. 则以下几条互相等价:

(i) C/A 在点 Q 处光滑.

(ii) $k(Q)$-线性映射

$$\begin{aligned} I \otimes_B k(Q) &\longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B k(Q) = k(Q)\,\mathrm{d}\,x_1 \oplus \cdots \oplus k(Q)\,\mathrm{d}\,x_n \\ f(x_1,\ldots,x_n) \otimes 1 &\longmapsto \mathrm{d}\,f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q)\,\mathrm{d}\,x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(Q)\,\mathrm{d}\,x_n \end{aligned}$$

为单同态.

(iii) I_Q 作为 B_Q 的理想存在一组生成元 $f_1,\ldots,f_m$, 使得在 Q 点的 Jacobian 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(Q) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(Q) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(Q) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(Q) \end{pmatrix}$$

作为 $k(Q)$ 上的 $m \times n$ 矩阵是行满秩的.

证明 由命题 10.2.2 和 引理 10.2.2 知 C/A 在 Q 处光滑等价于 $I/I^2 \otimes_C k(Q) \longrightarrow (\Omega_{B/A} \otimes_B C) \otimes_C k(Q)$ 为单同态. 由于 $I \subset Q$, 可以看到 $I/I^2 \otimes_C k(Q) \simeq I \otimes_B k(Q)$. 这样得到 (i) $\iff$ (ii). 再由 Nakayama 引理, $f_1,\ldots,f_m$ 为 I_Q 的生成元当且仅当其为 $k(Q)$-线性空间 $I \otimes_B k(Q)$ 的一组生成元. 由此不难看到 (ii) $\iff$ (iii). □

例 10.2.2 设 L/K 为域的有限可分扩张. 由于有限可分扩张均为单扩张 ([30, Lemma 030N]), 我们有同构 $L \simeq K[x]/(f(x))$, 其中 $f(x) \in K[x]$ 为不可约首一多项式, 并且 $f'(x)$ 在 $K[x]/(f(x))$ 中非零. 由 Jacobian 判据即知 L/K 光滑. 再由定理 10.1.2 知 $\Omega_{L/K} \simeq \frac{L\,\mathrm{d}\,x}{f'(x)\,\mathrm{d}\,x} = 0$. 故 L/K 也是不分歧的 (命题 10.1.6). 从而 L/K 平展.

命题 10.2.3 设 A 为 Noether 环, C 为有限生成 A-代数, 则

$$U \coloneqq \{Q \in \operatorname{Spec} C \mid C/A \text{ 在} Q \text{ 处光滑}\}$$

为 $\operatorname{Spec} C$ 的开子集.

证明 设 I 为多项式环 $B = A[x_1,\ldots,x_n]$ 的理想, 使得 $C \simeq B/I$. 设 $Q \in U$. 由 Jacobian 判据, 存在理想 I_Q 的一组生成元 $f_1,\ldots,f_m$, 使得在 Q 点的 Jacobian 矩阵 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(Q)\right)$ 是行满秩的. 通过将 B 在一个元素处作局部化, 我们不妨设 $f_1,\ldots,f_m$ 为理想 I 的生成元. 还不妨设 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(Q)\right)$ 的前 m 列线性无关, 即 $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(Q)\right)_{1\le i,j\le m} \neq 0$. 令 $g \coloneqq \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le m} \in B$, 则对于 $P \in \operatorname{Spec} C$, 如果 $g(P) \neq 0$, 则在 P 点的

Jacobian 矩阵 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)$ 是行满秩的, 从而 C/A 在 P 处光滑. 这样即可看到 U 为 $\operatorname{Spec} C$ 的开子集. □

推论 10.2.1 设 k 为完美域 (perfect field, [30, Section 05DU]), C 为有限生成 k-代数, 并且 C 为整环. 则 $U \coloneqq \{Q \in \operatorname{Spec} C \mid C/k \text{ 在 } Q \text{ 处光滑}\}$ 为 $\operatorname{Spec} C$ 的非空开子集.

证明 由命题 10.2.3 知 U 为开子集, 故只需证 U 非空. 考虑 C 的素理想 (0). C 在 (0) 处的局部化为分式域 $\operatorname{Frac}(C)$. 由于 $\operatorname{Frac}(C)$ 为完美域 k 的有限生成扩张 ([30, Definition 09FZ]), 可知 $\operatorname{Frac}(C)/k$ 为可分生成扩张 ([26, Theorem 26.2]), 即存在 $\operatorname{Frac}(C)$ 的元素 $x_1, \ldots, x_s$, 使得 $x_1, \ldots, x_s$ 在 k 上代数无关, 并且 $\operatorname{Frac}(C)/k(x_1, \ldots, x_s)$ 为有限可分扩张. 不难看到 $k(x_1, \ldots, x_s)/k$ 是光滑的. 由例 10.2.2 知 $\operatorname{Frac}(C)/k(x_1, \ldots, x_s)$ 也是光滑的. 从而 $\operatorname{Frac}(C)/k$ 光滑. 故 $(0) \in U$. □

对于代数封闭域上的有限生成代数, 其光滑性与正则性是等价的, 即有下面的命题.

命题 10.2.4 设 k 为代数封闭域, C 为有限生成 k 代数. 则 C/k 光滑 $\iff$ C 为正则环.

证明 由 C/k 的光滑点是开子集, 以及正则局部环的局部化还是正则局部环 (推论 9.2.1), 我们只需证明: 对 C 的任意极大理想 m, C/k 在 m 处光滑等价于 C_m 为正则局部环. 设 $C \simeq B/I$, 其中 $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ 为多项式环, 而 I 为 B 的理想. 根据 Hilbert 零点定理 3.6.1, 存在 $a_1, \ldots, a_n \in k$, 使得 $m = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, 故 m 点的剩余类域 $k(m) \simeq k$. 由推论 10.1.1, $\Omega_{B/k} \otimes_B k(m) \simeq m/m^2$. 从而由 Jacobian 判据, C/k 在 m 处光滑等价于 I_m 存在生成元 $f_1, \ldots, f_s$, 使得 $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_s}$ 在 m/m^2 中 k-线性无关. 而由命题 5.5.3, 这也等价于 $C_m = B_m/I_m$ 为正则局部环. 这样命题证毕. □

例 10.2.3 设 $k = \mathbb{F}_p(t)$ 为有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的一元有理函数域, 设 $K \coloneqq k[x]/(x^p - t)$ 为 k 的有限扩域. 则 K 为正则环. 另一方面, 由于 $\frac{\partial(x^p - t)}{\partial x} = 0$, K/k 不是光滑的. 这说明命题 10.2.4 中代数封闭域的条件是不能随意去掉的.

下面是光滑同态的另一个等价刻画.

定理 10.2.2 设 A 为 Noether 环, C 为有限生成 A-代数. 则以下两条互相等价:

(i) C/A 光滑.

(ii) $A \longrightarrow C$ 为平坦同态, 并且对任意 $P \in \operatorname{Spec} A$, $C \otimes_A \overline{k(P)}$ 为正则环.

证明 通过在 A 的素理想处作局部化不难看到, 我们不妨设 (A, m, k) 为 Noether 局部环, 并且只需证明如下两条互相等价:

(1) 对任意 $n \in \operatorname{Spec} C$ 满足 $n \cap A = m$, 都有 C/A 在 n 处光滑.

(2) $A \longrightarrow C$ 为平坦同态, 并且 $C \otimes_A \overline{k}$ 为正则环.

再设 $C \simeq B/I$, 其中 $B = A[x_1, \ldots, x_r]$ 为多项式代数, I 为 B 的理想. 令 B_k, C_k 分别为 $B \otimes_A k$, $C \otimes_A k$. 令 $B_{\overline{k}}$, $C_{\overline{k}}$ 分别为 $B \otimes_A \overline{k}$, $C \otimes_A \overline{k}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2): 由 Jacobian 判据可知 C_k/k 光滑, 再由光滑性的基变换性质 (命题 10.1.7) 可知 $\overline{k} \longrightarrow C_{\overline{k}}$ 为光滑同态, 从而 $C_{\overline{k}}$ 为正则环. 下面证明 $A \longrightarrow C$ 平坦. 由 Jacobian 判据, 通过对 B 作局部化, 不妨设 $I = (f_1, \ldots, f_s)$, 使得对任意 $n \in \operatorname{Spec} C$ 并且 $n \cap A = m$, 都有 $\mathrm{d}\, f_1, \ldots, \mathrm{d}\, f_s$ 在 $\Omega_{B/A} \otimes_B k(n) \simeq \Omega_{B_k/k} \otimes_{B_k} k(n)$ 中线性无关. 由于 $\Omega_{B_{\overline{k}}/\overline{k}} \simeq \Omega_{B_k/k} \otimes_{B_k} B_{\overline{k}}$, 可以看到对 $\operatorname{Spec} B_{\overline{k}}$ 的任意极大理想 $\overline{n}$, $\mathrm{d}\, f_1, \ldots, \mathrm{d}\, f_s$ 在 $\Omega_{B_{\overline{k}}/\overline{k}} \otimes_{B_{\overline{k}}} k(\overline{n}) \simeq \overline{n}/\overline{n}^2$ 中也线性无关. 由于 $B_{\overline{k}}$ 为正则环, 这说明 $(f_1, \ldots, f_s)$ 为 $B_{\overline{k}}$ 中的正则序列, 从而也为 $B_k = B/mB$ 中的正则序列. 再利用命题 7.2.1 即知 $C \simeq B/(f_1, \ldots, f_s)$ 为平坦 A-代数.

(2) $\Longrightarrow$ (1): 由命题 10.2.4 知 $\overline{k} \longrightarrow C_{\overline{k}}$ 为光滑同态. 我们希望对这个同态应用 Jacobian 判据, 因此需要确定满同态 $B_{\overline{k}} \longrightarrow C_{\overline{k}}$ 的核. 由于 $A \longrightarrow C$ 平坦, 对短正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

应用函子 $\cdot \otimes_A \overline{k}$ 得到短正合列

$$0 \longrightarrow I \otimes_A \overline{k} \longrightarrow B_{\overline{k}} \longrightarrow C_{\overline{k}} \longrightarrow 0.$$

设 $n \in \operatorname{Spec} C$ 满足 $n \cap A = m$. 取 $\overline{n} \in \operatorname{Spec} C_{\overline{k}}$ 使得 $\overline{n} \cap C = n$. 对光滑同态 $\overline{k} \longrightarrow C_{\overline{k}}$ 应用 Jacobian 判据, 得到单同态 $(I \otimes_A \overline{k}) \otimes_{B_{\overline{k}}} k(\overline{n}) \hookrightarrow \Omega_{B_{\overline{k}}/\overline{k}} \otimes_{B_{\overline{k}}} k(\overline{n})$. 注意到同构

$$I \otimes_A \overline{k} \simeq I \otimes_B B \otimes_A \overline{k} \simeq I \otimes_B B_{\overline{k}},$$

以及 $\Omega_{B_{\overline{k}}/\overline{k}} \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B B_{\overline{k}}$, 可得单同态 $I \otimes_B k(\overline{n}) \hookrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B k(\overline{n})$. 而又有同构

$$I \otimes_B k(\overline{n}) \simeq I \otimes_B k(n) \otimes_{k(n)} k(\overline{n}), \quad \Omega_{B/A} \otimes_B k(\overline{n}) \simeq \Omega_{B/A} \otimes_B k(n) \otimes_{k(n)} k(\overline{n}).$$

故知 $I \otimes_B k(n) \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B k(n)$ 也为单同态. 由 Jacobian 判据即知 C/A 在点 n 处光滑. □

回忆对环同态 $A \longrightarrow C$, 对 $P \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Spec}(C \otimes_A k(P))$ 为素谱空间映射 $\operatorname{Spec} C \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在点 P 处的纤维. 上面定理中出现的素谱空间 $\operatorname{Spec}(C \otimes_A \overline{k(P)})$ 称为点 P 处的几何纤维. 例 10.2.3 说明纤维正则并不蕴含几何纤维正则. 另一方面, 命题 9.2.1说明由几何纤维正则可以得到纤维正则. 这说明几何纤维正则是一个更强的条件.

至此, 对于 Noether 环 A 上的有限生成代数 C, 我们有了 C/A 光滑的三个等价定义: 形式光滑性, Jacobian 判据 (定理 10.2.1), 以及平坦加几何纤维正则 (定理 10.2.2).

对光滑同态, 其微分模是局部自由模, 这是下面的命题.

命题 10.2.5 *设 A 为 Noether 环, C 为有限生成 A-代数, 且 C/A 是光滑的. 则 $\Omega_{C/A}$ 为有限局部自由的 C-模.*

证明 设 $C \simeq B/I$, 其中 $B = A[x_1, \dots, x_n]$, I 为 B 的理想. 由命题 10.2.2, (i), 有分裂的短正合列: $0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$. 从而 $\Omega_{B/A} \otimes_B C \simeq I/I^2 \oplus \Omega_{C/A}$. 再由 $\Omega_{B/A} \otimes_B C \simeq C\,\mathrm{d}\,x_1 \oplus \cdots \oplus C\,\mathrm{d}\,x_n$ 为秩有限的自由 C-模即知 $\Omega_{C/A}$ 为投射模, 从而也为有限局部自由模 (命题 7.1.7). □

注记 10.2.1 几何上看, 满同态 $B \longrightarrow C$ 对应着闭嵌入 $\operatorname{Spec} C \longrightarrow \operatorname{Spec} B$, 其给出的余切丛的短正合列即为上面的基本正合列 $0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C/A} \longrightarrow 0$. 在这个意义下, I/I^2 可看作 $\operatorname{Spec} C$ 在 $\operatorname{Spec} B$ 中的余法丛 (conormal bundle).

10.3 平展同态

我们应用上节关于光滑性的等价定义来考察平展同态. 首先刻画平展的域扩张.

引理 10.3.1 *设 L/K 为域的有限扩张. 则以下几条互相等价:*

(i) *L/K 为有限可分扩张.*

(ii) *L/K 为平展的.*

(iii) $\Omega_{L/K} = 0$.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由例 10.2.2 即得.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 由命题 10.1.6 即得.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 我们有中间域 L_{sep}, 使得 L/L_{sep} 为纯不可分扩张, 而 L_{sep}/K 为可分扩张 ([30, Lemma 030K]). 由微分模的基本正合列 (定理 10.1.1), $\Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/L_{sep}}$ 为满同态. 从而 $\Omega_{L/L_{sep}} = 0$. 假设 $L_{sep} \subsetneq L$, 可以找到 L 的子域 L_1, 使得 $L_{sep} \subset L_1 \subsetneq L$, $L = L_1(a)$, 并且 $a^p = t \in L_1$. 其中 $p = \mathrm{char}.K$ 为 K 的特征. 这样得到 $L \simeq L_1[x]/(x^p - t)$. 由例 10.1.4 知 $\Omega_{L/L_1} \simeq \frac{L\,\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}(x^p - t)} = L\,\mathrm{d}\,x \neq 0$. 另一方面, 由 $\Omega_{L/L_{sep}} = 0$ 可知 $\Omega_{L/L_1} = 0$. 这个矛盾说明 $L_{sep} = L$, 从而 L/K 为可分扩张. □

更进一步, 下面的引理说明我们可以在有限生成域扩张情形刻画平展性.

引理 10.3.2 *设 L/K 为有限生成的域扩张. 则以下几条互相等价:*

(i) *L/K 为有限可分扩张.*

(ii) *L/K 为平展的.*

(iii) $\Omega_{L/K} = 0$.

证明 由引理 10.3.1, 只需证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i). 设 $\Omega_{L/K} = 0$. 通过取一组超越基, 我们可以找到 L/K 的中间域 $E = K(x_1, \dots, x_n)$, 使得 $x_1, \dots, x_n$ 在 K 上代数无关, 并且 L/E 为有限扩张. 由微分模的基本正合列 (定理 10.1.1) 知 $\Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/E}$ 为满同态, 从而 $\Omega_{L/E} = 0$. 由引理 10.3.1 知 L/E 为平展的, 从而也是光滑的. 再由定理 10.1.1 即得短正合列

$$0 \longrightarrow \Omega_{E/K} \otimes_E L \longrightarrow \Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/E} \longrightarrow 0.$$

故 $\Omega_{E/K}=\Omega_{K(x_1,\dots,x_n)/K}=0$. 由于 $K(x_1,\dots,x_n)$ 为多项式环 $K[x_1,\dots,x_n]$ 的分式域, 可知 $\Omega_{K(x_1,\dots,x_n)/K}$ 是以 $\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n$ 作为一组基的 $K(x_1,\dots,x_n)$-线性空间. 由此知 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 为空集, 即 $K(x_1,\dots,x_n)=K$. 从而 L/K 为有限扩张, 再由引理 10.3.1 即知 L/K 为有限可分扩张. □

现在可以给出不分歧同态的一些等价刻画.

命题 10.3.1 设 $(A,m)\longrightarrow(B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, 并且 B 为本质有限生成的 A-代数. 则以下几条互相等价:

(i) B/A 不分歧.

(ii) $\Omega_{B/A}=0$.

(iii) $n=mB$, 并且剩余类域扩张 $k(n)/k(m)$ 是有限可分扩张.

证明 由命题 10.1.6 知 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

令 $k:=k(m)$ 为 m 的剩余类域, 再令 $B_k:=B\otimes_A k$. 则 $\overline{n}:=n/mB$ 为局部环 B_k 的极大理想. 再由 $k(n)\simeq B_k/\overline{n}$ 和定理 10.1.2 得到右正合列

$$\overline{n}/\overline{n}^2\longrightarrow\Omega_{B_k/k}\otimes_{B_k}k(n)\longrightarrow\Omega_{k(n)/k}\longrightarrow 0. \tag{10.3–1}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 由微分模的基变换性质 (命题 10.1.2) 知 $\Omega_{B_k/k}=0$. 故右正合列 (10.3–1) 给出 $\Omega_{k(n)/k}=0$. 对域的有限生成扩张 $k(n)/k$ 应用引理 10.3.2 得到 $k(n)/k$ 为有限可分扩张, 也是平展的, 再由定理 10.1.2 即知 (10.3–1) 为分裂短正合列. 特别地, $\overline{n}/\overline{n}^2=0$. 由 Nakayama 引理又得到 $\overline{n}=0$, 故 $n=mB$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): $n=mB$ 给出 $\overline{n}/\overline{n}^2=0$. 由 $k(n)/k(m)$ 是有限可分扩张得到 $\Omega_{k(n)/k}=0$. 再由右正合列 (10.3–1) 得到 $\Omega_{B_k/k}\otimes_{B_k}k(n)=0$. 而 $\Omega_{B_k/k}\simeq\Omega_{B/A}\otimes_B B_k$, 故 $\Omega_{B/A}\otimes_B k(n)=0$. 因为 B 为本质有限生成的 A-代数, 可知 $\Omega_{B/A}$ 为有限 B-模 (命题 10.2.1). 从而由 Nakayama 引理即得 $\Omega_{B/A}=0$. □

有了以上准备, 现在可以给出平展态射的一些等价定义, 将其总结为下面的定理.

定理 10.3.1 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数. 则以下几条互相等价:

(i) B/A 平展.

(ii) $A\longrightarrow B$ 为平坦同态, 并且 $\Omega_{B/A}=0$.

(iii) $A\longrightarrow B$ 为平坦同态, 并且对任意 $Q\in\operatorname{Spec}B$, 如果记 $P=Q\cap A$, 那么有 B_Q 中的等式 $QB_Q=PB_Q$, 并且域扩张 $k(Q)/k(P)$ 为有限可分的.

(iv) $A\longrightarrow B$ 为平坦同态, 并且对任意 $P\in\operatorname{Spec}A$, 有 $k(P)$-代数同构 $B\otimes_A k(P)\simeq\prod_{i=1}^{n}L_i$, 其中 $n\geq 1$, 每个 L_i 均为 $k(P)$ 的有限可分扩域.

(v) B/A 为光滑的, 并且对任意 $P\in\operatorname{Spec}A$, $\operatorname{Spec}B\longrightarrow\operatorname{Spec}A$ 在 P 点的纤维是零维的.

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii): 注意到平展等价于光滑加不分歧. 由光滑性得到平坦性 (定理 10.2.2). 由不分歧得到 $\Omega_{B/A}=0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 对局部同态 $A_P\longrightarrow B_Q$ 应用 命题 10.3.1 即得.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): 对零维 Noether 环 $B\otimes_A k(P)$ 应用命题 1.4.7 即得.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): 由定理 10.2.2 即得.

(v) $\Longrightarrow$ (i): 通过在素理想处作局部化, 不妨设 A,B 均为局部环, 且 $A\longrightarrow B$ 为局部同态. 设 m, n 分别为 A, B 的极大理想, 则 (v) 给出的条件为 B/A 光滑, 并且 $\dim B/mB=0$. 由命题 10.2.5可以得到 $\Omega_{B/A}$ 为有限秩的自由 B-模. 设其秩为 r. 从而 $\Omega_{B_{\overline{k}}/\overline{k}}\simeq\Omega_{B/A}\otimes_B B_{\overline{k}}$ 为秩 r 的自由 $B_{\overline{k}}$-模. 其中 $\overline{k}$ 为 $k(m)$ 的代数闭包, $B_{\overline{k}}\coloneqq B\otimes_A\overline{k}$. 由 $B/mB=B\otimes_A k(m)\longrightarrow B_{\overline{k}}$ 为整扩张知 $\dim B_{\overline{k}}=0$. 由 B/A 光滑知 $B_{\overline{k}}/\overline{k}$ 光滑, 从而 $B_{\overline{k}}$ 为正则环 (命题 10.2.4). 再由推论 10.1.1 知自由 $B_{\overline{k}}$-模 $\Omega_{B_{\overline{k}}/\overline{k}}$ 的秩 r 等于 $\dim B_{\overline{k}}$, 从而为 0. 这样得到 $\Omega_{B/A}=0$. 故 B/A 不分歧. 从而再由其光滑知 B/A 平展. □

例 10.3.1 设 A 为 Noether 环, $f(x)\in A[x]$ 为多项式, $C=\left(\frac{A[x]}{(f(x))}\right)_{f'(x)}$ 为商环 $\frac{A[x]}{(f(x))}$ 在导数 $f'(x)$ 处的局部化. 由 Jacobian 判据知 C/A 为光滑的. 直接验证可知 $\Omega_{C/A}=0$. 故 C/A 为平展的.

定义 10.3.1 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 B/A 为光滑同态. 称 $b_1,\dots,b_n\in B$ 为 B/A 的一组**平展坐标系**, 如果 $\Omega_{B/A}$ 为自由 B-模, 并且 $\mathrm{d}\,b_1,\dots,\mathrm{d}\,b_n$ 为 $\Omega_{B/A}$ 的一组基.

由于 $\Omega_{B/A}$ 是有限局部自由模 (命题 10.2.5), 从而平展坐标系局部上总是存在的.

命题 10.3.2 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 B/A 为光滑同态. 设 $b_1,\dots,b_n\in B$ 为 B/A 的一组平展坐标系. 则 A-代数同态 $A[x_1,\dots,x_n]\longrightarrow B$, $x_i\longmapsto b_i$ 为平展同态.

证明 对所给同态 $A[x_1,\dots,x_n]\longrightarrow B$ 应用微分模的基本正合列 (定理 10.1.1) 得到如下右正合列:

$$\Omega_{A[x_1,\dots,x_n]/A}\otimes_{A[x_1,\dots,x_n]}B\longrightarrow\Omega_{B/A}\longrightarrow\Omega_{B/A[x_1,\dots,x_n]}\longrightarrow 0.$$

根据 b_i 的取法, 可以看到 $\Omega_{A[x_1,\dots,x_n]/A}\otimes_{A[x_1,\dots,x_n]}B\longrightarrow\Omega_{B/A}$ 为同构, 这样得到 $\Omega_{B/A[x_1,\dots,x_n]}=0$, 并且上述右正合列是分裂短正合的. 再由定理 10.1.1 即知 $B/A[x_1,\dots,x_n]$ 是光滑的. $\Omega_{B/A[x_1,\dots,x_n]}=0$ 蕴含 $B/A[x_1,\dots,x_n]$ 还是不分歧的, 从而 $B/A[x_1,\dots,x_n]$ 是平展的. □

利用平展坐标系, 我们可以给出光滑同态的另一个刻画.

定理 10.3.2 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 B/A 为光滑同态. 则对任

意 $P \in \operatorname{Spec} B$, 存在 $f \in B$, 使得 $P \in D(f)$, 并且 $A \longrightarrow B_f$ 可分解为复合同态

$$A \longrightarrow A[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow B_f,$$

使得 $B_f/A[x_1, \ldots, x_n]$ 为平展的.

证明 由命题 10.2.5, $\Omega_{B/A}$ 是有限局部自由 B-模. 从而由命题 7.1.6, 可以找到 $f \in B$, 使得 $P \in D(f)$, 并且 $\Omega_{B_f/A}$ 为自由 B_f-模. 设 $b_1, \ldots, b_n \in B_f$, 使得 $\mathrm{d}\, b_1, \ldots, \mathrm{d}\, b_n$ 为 $\Omega_{B_f/A}$ 的一组基. 则 $b_1, \ldots, b_n$ 为 B_f/A 的一组平展坐标系. 从而由命题 10.3.2 知 A-代数同态 $A[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow B_f$, $x_i \longmapsto b_i$ 为平展同态. 这样得到 $A \longrightarrow B_f$ 的分解

$$A \longrightarrow A[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow B_f.$$

□

上述命题说明在相差一个平展同态的情况下, 任何光滑同态在局部上都和最标准的光滑同态 $A \longrightarrow A[x_1, \ldots, x_n]$ 是一样的. 类似地, 以下命题说明任何平展同态局部上均为例 10.3.1 的形状.

命题 10.3.3 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数. 设 B/A 在 $Q \in \operatorname{Spec} B$ 处平展. 则存在 $g \in B$, 使得 $Q \in D(g)$, 并且有 A-代数同构 $B_g \simeq C_h$, 其中 $C = (A[x]/(F(x)))_{F'(x)}$, $F(x) \in A[x]$ 为首一多项式, $h \in C$.

证明 利用 Zariski 主定理 5.3.1, 不妨设 $A \longrightarrow B$ 为有限扩张. 再由命题 1.3.15, 通过局部化, 不妨设 A 为 Noether 局部环, 并且 $m \coloneqq Q \cap A$ 为 A 的唯一极大理想. 记 $k = A/m$ 为剩余类域. 设 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 在点 m 处的纤维是 $\{Q = Q_1, Q_2 \ldots, Q_n\}$, 则 Q_i 均为 B 的极大理想. 由 B/A 在 Q 处平展, 可知 $k \longrightarrow B/Q$ 为域的有限可分扩张, 从而存在 $b \in B$, 使得 $B/Q = k[\bar{b}]$. 利用中国剩余定理, 我们选取这样的 b 使其还满足 $b \not\equiv 0 \bmod Q$, $b \equiv 0 \bmod Q_i$, $\forall\, i = 2, \ldots, n$. 令 $B' \coloneqq A[b]$ 为 B 的子环, 则 $Q \cap A \neq Q_i \cap A, \forall\, i = 2, \ldots, n$. 由于 $B' \hookrightarrow B$ 为有限扩张, 不难看到 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} B'$ 在 $Q' \coloneqq Q \cap B'$ 处的纤维只有 Q, 从而 Q 为 $B_{Q'}$ 的唯一极大理想, 故 $B_{Q'} = B_Q$. 注意到由平展性知 $QB_Q = mB_Q$, 从而 $B_{Q'}/Q'B_{Q'} \simeq B/Q \simeq k[\bar{b}] \simeq B'_{Q'}/Q'B'_{Q'}$. 这说明 $B_{Q'} = Q'B_{Q'} + B'_{Q'}$. 对局部环 $B'_{Q'}$ 上的有限模 $B_{Q'}$ 应用 Nakayama 引理即得 A-代数同构 $B'_{Q'} \simeq B_Q$. 再由命题 1.3.15, 不妨设 $B = B' = A[b]$.

由于 $k \longrightarrow B/mB = k[\bar{b}]$ 为有限扩张, 令首一多项式 $f(x) \in k[x]$ 为 $\bar{b} \in B/mB$ 在 k 上的极小多项式, 可得 k-代数同构 $B/mB \simeq k[x]/(f(x))$. 设 $d = \deg f(x)$, 则 $B = mB + \sum_{i=0}^{d-1} Ab^i$. 由 Nakayama 引理得到 $B = \sum_{i=0}^{d-1} Ab^i$. 故存在 d 次首一多项式 $F(x) \in A[x]$, 使得 $F(b) = 0$. 从而 $x \mapsto b$ 给出的 A-代数同态 $\varphi\colon A[x]/(F(x)) \longrightarrow B$ 是

满的. 由 $f(x)$ 的极小性可知在 $k[x]$ 中有 $\overline{F(x)} = f(x)$. 故有 k-代数同构

$$\varphi \otimes 1 \colon \frac{A[x]}{(F(x))} \otimes_A k \xrightarrow{\sim} B \otimes_A k = B/mB.$$

令 $Q_1 \coloneqq \varphi^{-1}(Q) \in \operatorname{Spec} A[x]/(F(x))$, 则上述同构 $\varphi \otimes 1$ 给出了剩余类域的同构 $k(Q_1) \simeq k(Q)$. 由于 B/A 在 Q 处平展蕴含 $k \longrightarrow B/mB \simeq k[x]/(f(x))$ 在 Q/mB 处平展, 故在 $k(Q)$ 中有 $f'(x) \neq 0$. 从而在 $k(Q_1)$ 中也有 $F'(x) \neq 0$. 这说明 C/A 在 Q_1 处平展. 令 $C \coloneqq (A[x]/(F(x)))_{F'(x)}$, 则 $Q_1 \in \operatorname{Spec} C$, 并且 φ 诱导的 A-代数同态 $\varphi_1 \colon C_{Q_1} \longrightarrow B_Q$ 是满的. 由于 $A \longrightarrow C_{Q_1}$ 和 $A \longrightarrow B_Q$ 均为平展的, 故 φ_1 也是平展的 (命题 10.1.7), 特别地 φ_1 是平坦的. 又由于 φ_1 为局部环之间的局部同态, 故 φ_1 还是忠实平坦的, 从而是单的 (命题 7.3.5). 因此 φ_1 为 A-代数同构. 再次利用命题 1.3.15 即可找到 $h \in C$, $g \in B$ 使得 $Q_1 \in D(h)$, $Q \in D(g)$, 并且有 A-代数同构 $C_h \simeq B_g$. □

例 10.3.2 设 k 为域, B 为有限生成 k-代数. 设 G 为 k-代数自同构群 $\operatorname{Aut}_k(B)$ 的有限子群, 并且 G 在 B 的极大理想集合上的作用是自由的, 即对 B 的任意极大理想 m, 稳定子群 $\{g \in G \mid gm = m\}$ 均为平凡子群 $\{1\}$. 则 $A \coloneqq B^G \hookrightarrow B$ 为平展的. 这是因为任取 B 的极大理想 Q, 令 $P = Q \cap A$. 由命题 3.7.3, (iv) 和 G 作用的自由性得到同构 $\widehat{A_P} \simeq \widehat{B_Q}$. 由此可知 $A_P \longrightarrow B_Q$ 为平坦的, 并且 $k(P) = k(Q)$. 再由 $P\widehat{B_Q} = Q\widehat{B_Q}$ 可知 $PB_Q = QB_Q$. 故 B_Q/A_P 平坦并且不分歧. 从而 B_Q/A_P 平展.

10.4 相对 Frobenius 同态

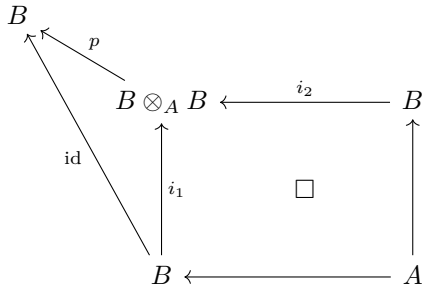
Frobenius 同态和相对 Frobenius 同态是特征 p 情形特有的重要同态. 本节给出这两个同态的基本性质, 并在光滑 A- 代数的情形给出相对 Frobenius 同态的平展局部模型. 首先证明下面的命题, 从中可以看出平展同态与同构的差距.

命题 10.4.1 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 B/A 为平展的. 设 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为同胚, 并且 $\forall\, Q \in \operatorname{Spec} B$, 记 $P = Q \cap A$, 均有 $k(P) \longrightarrow k(Q)$ 为同构. 则 $A \longrightarrow B$ 为同构.

证明 由于 $A \longrightarrow B$ 平坦并且 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为满射, 则 $A \longrightarrow B$ 为忠实平坦的 (命题 7.3.3). 由命题 7.3.5 知 $A \longrightarrow B$ 为单同态.

另一方面, 由命题 2.2.11 可知对任意 A-代数 C, 同态 $C \longrightarrow B \otimes_A C$, $c \mapsto 1 \otimes c$ 诱导的素谱空间映射 $\operatorname{Spec} B \otimes_A C \longrightarrow \operatorname{Spec} C$ 为同胚. 特别地, 取 $C = B$, 则 $B \xrightarrow{i_1} B \otimes_A B$,

$b \mapsto b \otimes 1$ 诱导素谱空间的同胚 $i_1^*\colon \operatorname{Spec} B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} B$. 考虑如下交换图表:



其中 $p\colon B \otimes_A B \longrightarrow B$ 为乘积同态 $b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 b_2$. 由 $A \longrightarrow B$ 平展可知 i_1 平展, 进而由 $p \circ i_1 = \mathrm{id}$ 可知 p 也为平展同态. 同时由 i_1 诱导素谱空间同胚知 p 也诱导素谱空间同胚. 故 p 为忠实平坦的, 从而 p 为单同态. 显然 p 也是满同态, 故 p 为同构. 这样得到 i_1 为同构. 记 N 为 A-模同态 $A \longrightarrow B$ 的余核. 则 $A \longrightarrow B \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 为 A-模右正合列. 由 B 为平坦 A-代数知 $N \otimes_A B$ 为 i_1 的余核, 故 $N \otimes_A B = 0$. 而 B 还是忠实平坦的 A-代数, 故 $N = 0$. 这样得到 $A \longrightarrow B$ 为满同态. 结合前面已证其为单同态, 我们最终得到 $A \longrightarrow B$ 为同构. □

设 p 为素数, 我们称环 A 的**特征**为 p, 如果 $\forall\, a \in A$, $pa = 0$. 这等价于说 A 是一个 $\mathbb{F}_p$-代数.

定义 10.4.1 (Frobenius 同态) 设环 A 的特征为 p, 显然映射 $F_A\colon A \longrightarrow A$, $a \longmapsto a^p$ 为环同态, 称为 A 的 **Frobenius 同态**.

命题 10.4.2 设 A 为特征 p 的环. 则有:

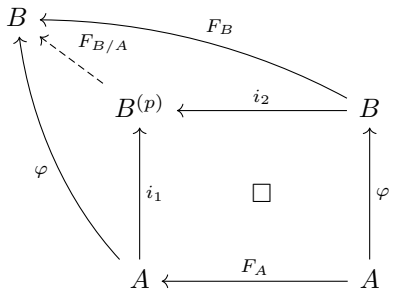
(i) Frobnenius 同态诱导的素谱空间映射 $F_A^*\colon \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为恒等映射.
(ii) 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态, 那么有如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{F_B} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} \\ A & \xleftarrow{F_A} & A \end{array}$$

证明 由定义直接验证即可. □

下面设 A 为特征 p 的环, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为环同态. 令 $B^{(p)} \coloneqq A \otimes_A B$ 为张量积, 其中 $A \longrightarrow A$ 为 Frobenius 同态 F_A. 则有如下环同态的交换图表 (回忆符号 "□" 代表卡

式图):



(10.4–1)

其中 A-代数同态 $F_{B/A}\colon B^{(p)} \longrightarrow B$ 由张量积的万有性质给出, 称为**相对 Frobenius 同态**.

例 10.4.1 设 A 为特征 p 的环. 对于 $f = \sum C_{a_1,\dots,a_n} X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n} \in A[X_1,\dots,X_n]$, 令 $f^{(p)} := \sum C_{a_1,\dots,a_n}^p X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}$. 设 I 为 $A[X_1,\dots,X_n]$ 的理想. 令 $I^{(p)}$ 为 $\{f^{(p)} \mid f \in I\}$ 在 $A[X_1,\dots,X_n]$ 中生成的理想. 考虑有限生成 A-代数 $B := A[X_1,\dots,X_n]/I$. 则有 A-代数同构 $B^{(p)} \simeq A[X_1,\dots,X_n]/I^{(p)}$, 并且在这个同构下, 相对 Frobenius 同态 $F_{B/A}$ 为 $A[X_1,\dots,X_n]/I^{(p)} \longrightarrow A[X_1,\dots,X_n]/I$, $X_i \longmapsto X_i^p$.

命题 10.4.3 (i) 自然同态 $\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{B/B^{(p)}}$, $\mathrm{d}\,b \longmapsto \mathrm{d}\,b$ 为 B-模同构.

(ii) $F_{B/A}$ 诱导的素谱空间映射 $F_{B/A}^*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} B^{(p)}$ 为同胚.

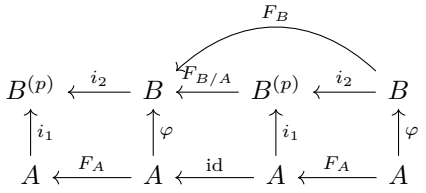
(iii) 如果 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为平展同态, 则 $F_{B/A}$ 为同构.

证明 (i): 对同态 $A \xrightarrow{i_1} B^{(p)} \xrightarrow{F_{B/A}} B$ 应用微分模的基本正合列 (定理 10.1.1), 得到如下右正合列:

$$\Omega_{B^{(p)}/A} \otimes_{B^{(p)}} B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{B/B^{(p)}} \longrightarrow 0.$$

作为 $B^{(p)}$-模, $\Omega_{B^{(p)}/A}$ 由 $\{\mathrm{d}(1\otimes b) \mid b \in B\}$ 生成. 而对于 $b \in B$, $\mathrm{d}(1\otimes b)\otimes 1$ 在同态 $\Omega_{B^{(p)}/A} \otimes_{B^{(p)}} B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ 下的像为 $\mathrm{d}\,b^p = p\,\mathrm{d}\,b^{p-1} = 0$. 故 $\Omega_{B^{(p)}/A} \otimes_{B^{(p)}} B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ 为零同态, 从而 $\Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{B/B^{(p)}}$ 为同构.

(ii): 考虑如下交换图表

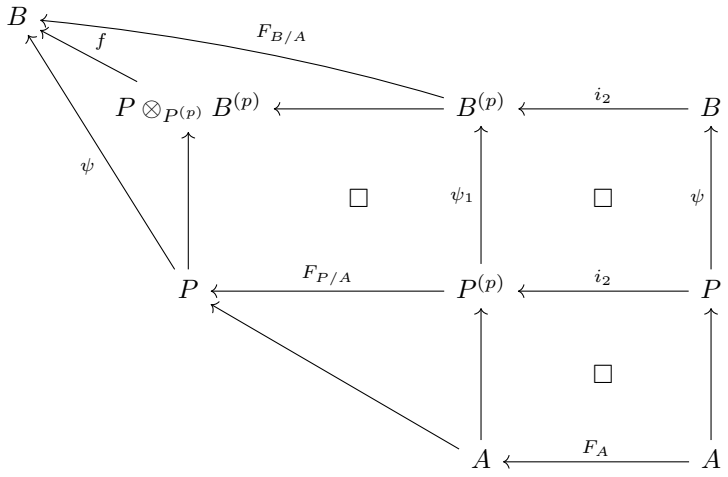


由 $F_{B/A} \circ i_2 = F_B$ 知 $i_2^* \circ F_{B/A}^* = F_B^* = \mathrm{id}$. 设 $x = a\otimes b \in B^{(p)}$, 其中 $a \in A$, $b \in B$.

直接验证可知 $F_{B/A}(x)=\varphi(a)b^p$, $i_2\circ F_{B/A}(x)=1\otimes\varphi(a)b^p=a^p\otimes b^p=x^p$. 由此知复合同态 $i_2\circ F_{B/A}$ 恰为 $B^{(p)}$ 的 Frobenius 同态 $F_{B^{(p)}}$. 从而 $F_{B/A}^*\circ i_2^*=F_{B^{(p)}}^*=\mathrm{id}$. 综上可知 $F_{B/A}^*$ 为同胚, 并且其逆映射为 i_2^*.

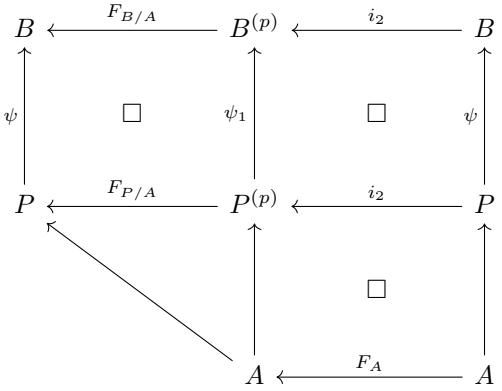
(iii): 在交换图表 (10.4–1) 中, 由 φ 平展以及平展同态的基变换性质可知 i_1 平展. 再由 $F_{B/A}\circ i_1=\varphi$ 平展不难看到 $F_{B/A}$ 也为平展同态. 特别地, $F_{B/A}$ 诱导的剩余类域扩张为可分的. 而根据 $F_{B/A}\circ i_2=F_B$ 又可看到 $F_{B/A}$ 诱导的剩余类域扩张均为纯不可分的. 这说明 $F_{B/A}$ 诱导剩余类域之间的同构. 从而由命题 10.4.1 知 $F_{B/A}$ 为同构.□

进一步假设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 $A\xrightarrow{\varphi}B$ 为光滑同态. 设 $b_1,\dots,b_r\in B$ 为一组平展坐标系, 从而 A-代数同态 $P\coloneqq A[x_1,\dots,x_r]\xrightarrow{\psi}B$, $x_i\mapsto b_i$ 为平展同态. 令 $F_{B/A}\colon B^{(p)}\longrightarrow B$ 和 $F_{P/A}\colon P^{(p)}\longrightarrow P$ 为相对于 A 的相对 Frobenius 同态. 我们有如下交换图表 (“□” 指示的三个方块为卡式图):



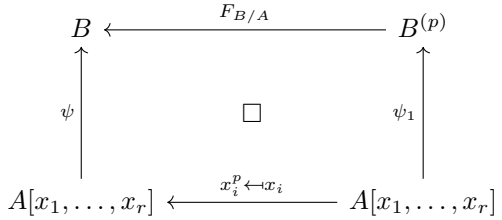
其中 f 为张量积的万有性质诱导的同态. 由于 $F_{B/A}\circ i_2=F_B$, $F_{P/A}\circ i_2=F_P$, 可以看到 $f\colon P\otimes_{P^{(p)}}B^{(p)}\longrightarrow B$ 实际上为 B 相对于 P 的相对 Frobenius 同态, 从而由命题 10.4.3 知 f 为同构. 这样可以得到如下交换图表, 其中 “□” 指示的三个方块均为卡

式图:



由于上图中 ψ, ψ_1 均为平展同态, 很多情况下可以利用这个交换图将 $F_{B/A}$ 的问题转化为 $F_{P/A}$ 的问题. 而 $P = A[x_1, \dots, x_r]$ 为多项式环, 具体计算可知有环同构 $P^{(p)} \simeq P$, 并且在这个同构下 $F_{P/A}$ 可以等同为 A-代数同态 $P \longrightarrow P$, $x_i \longmapsto x_i^p$. 因此, 我们已经证明了如下命题:

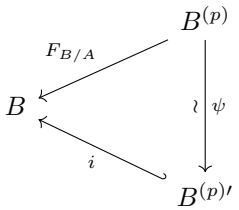
命题 10.4.4 设 A 为特征 p 的 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 为光滑同态. 设 $b_1, \dots, b_r \in B$ 为 B/A 的一组平展坐标系. 则有如下卡式图:



其中 A-代数同态 ψ, ψ_1 均为平展同态, 满足 $\psi(x_i) = b_i$, $\psi_1(x_i) = 1 \otimes b_i$.

以下命题更具体地描述了 $B^{(p)}$.

命题 10.4.5 设 A 为特征 p 的 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 为光滑同态. 令 $B^{(p)'}$ 为 $\left\{b^p \mid b \in B\right\}$ 生成的 B 的 A-子代数. 则存在 A-代数同构 $\psi\colon B^{(p)} \xrightarrow{\sim} B^{(p)'}$, 使得如下图表交换:



其中 i 为自然的包含同态.

证明 由交换图表 (10.4–1) 知 $\operatorname{Im} F_{B/A} = B^{(p)'}$. 故只需再证明 $F_{B/A}$ 是单同态. 通过对 B 作局部化, 不妨假设 B/A 存在一组平展坐标系. 由命题 10.4.4 可知 $F_{B/A}$ 是忠实平坦的, 从而是单的 (命题 7.3.5). □

习题

1. 设 $A \longrightarrow B$, $A \longrightarrow C$ 为环同态. 证明有 $B \otimes_A C$-模同构

$$\Omega_{B\otimes_A C/A} \simeq (\Omega_{B/A} \otimes_B (B \otimes_A C)) \oplus (\Omega_{C/A} \otimes_C (B \otimes_A C)).$$

2. 设 K/k 为有限生成域扩张. 证明 K/k 光滑 $\iff$ K/k 为可分生成扩张.

3. 设 R 为完美 $\mathbb{F}_p$-代数 (即 Frobenius 同态 $F\colon R \longrightarrow R$, $x \longmapsto x^p$ 为同构), 证明 $R/\mathbb{F}_p$ 为形式平展的.

4. 分析命题 10.2.5 中微分模 $\Omega_{C/A}$ 在一点 $Q \in \operatorname{Spec} C$ 处的秩与纤维维数的关系.

5. 设 k 为代数封闭域, A, B 均为有限生成 k-代数, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 k-代数同态. 设 n 为 B 的极大理想, $m = n \cap A$ 为 A 的极大理想. 我们记 $T_m := \operatorname{Hom}_k(m/m^2, k)$, $T_n := \operatorname{Hom}_k(n/n^2, k)$ 分别为 m, n 点的切空间. 设 A/k 在点 m 处光滑, B/k 在点 n 处光滑, 并且 φ 诱导的切空间映射 $T_n \longrightarrow T_m$ 为满射. 证明 B_n/A_m 为光滑的. 这是微分流形中的淹没 (submersion) 在光滑代数簇情形的类比.

6. 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 且 B/A 光滑. 设 I 为 B 的理想, 满足 $A \longrightarrow B/I$ 光滑. 证明: 对任意 $P \in \operatorname{Spec} B$, 存在 $f \in B$, 以及 $b_1, \dots, b_n \in B_f$, 使得

(i) $P \in D(f)$.
(ii) $b_1, \dots, b_n$ 为 B_f/A 的一组平展坐标系.
(iii) $IB_f = (b_1, \dots, b_i)$ 对某个 $i \le n$ 成立.

由此得到如下卡式图:

$$\begin{array}{ccc} B_f & \longrightarrow & (B/I)_f \\ \uparrow & \square & \uparrow \\ A[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\pi} & A[x_{i+1}, \dots, x_n] \end{array}$$

其中两个竖直同态是平展的, π 为如下自然的 A-代数同态:

$$\pi(x_j) = \begin{cases} 0, & j \le i; \\ x_j, & j \ge i+1. \end{cases}$$

这是微分流形中子流形局部坐标表示的代数类比.

7. 设 k 为域, C 为有限生成 k-代数, 并且 C/k 是光滑的. 证明 C 为正则环.

8. 设 A 为正则环, C 为有限生成 A-代数, 并且 C/A 是光滑的. 证明 C 为正则环.

9. 设 k 为代数封闭域, A 和 B 均为有限生成 k-代数. 设 A/k, B/k 均光滑, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为光滑同态. 记 $X \coloneqq \mathrm{Spec}_m\, B$ 为 $\mathrm{Spec}\, B$ 的所有闭点形成的集合, $Y \coloneqq \mathrm{Spec}_m\, A$ 为 $\mathrm{Spec}\, A$ 的所有闭点形成的集合. 设 $\varphi^*\colon X \longrightarrow Y$, $m \longmapsto m \cap A$ 为满射.

(i) 证明: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} B \otimes_A B$ 为 Abel 群的左正合列. 其中 $\psi\colon B \longrightarrow B \otimes_A B$ 为 Abel 群同态: $b \longmapsto 1 \otimes b - b \otimes 1$.

(ii) 设 $b \in B$, 记 $f_b\colon X \longrightarrow k$, $m \longmapsto b(m)$ 为 b 对应的 X 上的 k-值函数. 如果 f_b 在 φ^* 的每个纤维上都是常值, 证明: 存在唯一的 $a \in A$, 使得 $f_b = f_a \circ \varphi *$, 其中 $f_a\colon Y \longrightarrow k$, $m \longmapsto a(m)$ 为 a 对应的 Y 上的 k-值函数.

注记 10.4.1 该习题的结论可用于构造线性代数群 G 的陪集空间 G/H, 见 [20, §12.3].

10. 设 $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态, 并且 B/A 是平展的. 证明:

(i) $\dim A = \dim B$.

(ii) $\mathrm{depth}\, A = \mathrm{depth}\, B$.

(iii) A 为 CM 环 (正则环, 整闭整环) $\iff$ B 为 CM 环 (正则环, 整闭整环).

11. 设 $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为 Noether 环之间的平展同态. 如果 A 为整闭整环, 证明存在环同构 $B \xrightarrow{\sim} B_1 \times \cdots \times B_n$, 使得每个 B_i 均为整闭整环.

习题提示

2. 在推论 10.2.1 已证 $\Longleftarrow$. 为证 $\Longrightarrow$, 设 K/k 光滑, 则存在平展坐标系 $x_1,\dots,x_r\in K$. 往证 $x_1,\dots,x_r$ 在 k 上代数无关, 而 $K/k(x_1,\dots,x_r)$ 为有限可分扩张 (定理 10.3.2).

3. 给定交换图表:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\beta} & C/N \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{F}_p & \longrightarrow & C \end{array}$$

其中 $C\longrightarrow C/N$ 为一阶加厚 ($N^2=0$). 对 $x\in R$, 设 $x_1\in R$ 满足 $x_1^p=x$. 任取 $c_1\in C$ 满足 $\overline{c_1}=\beta(x_1)\in C/N$. 验证 $c_1^p\in C$ 由 x 唯一确定, 不依赖于 c_1 的选取. 令 $\tilde{\beta}(x)=c_1^p$, 验证 $\tilde{\beta}\colon R\longrightarrow C$ 为 β 的提升. 提升的唯一性可以直接验证.

5. 利用微分模的第一个基本正合列分裂来判断光滑性 (定理 10.1.1和引理 10.2.2).

6. 利用微分模的第二个基本正合列 (定理 10.1.2), 找到 $b_1,\dots,b_n\in B_P$, 使得 $b_1,\dots,b_i$ 为 $I\otimes_B k(P)$ 的一组基, $\mathrm{d}\,b_1,\dots,\mathrm{d}\,b_n$ 为 $\Omega_{B/A}\otimes_B k(P)$ 的一组基.

7. 利用 $C\otimes_k\overline{k}$ 正则, 对平坦同态 $C\longrightarrow C\otimes_k\overline{k}$ 应用命题 9.2.1.

8. 利用命题 9.2.1 和习题7.

9. (i): 由条件知 $A\longrightarrow B$ 为忠实平坦的, 再利用 Amitsur 复形的正合性 (推论 7.4.1).

(ii): $B\otimes_A B$ 为光滑 k-代数, 从而 $B\otimes_A B$ 为约化的有限生成 k-代数. 特别地, 若 $f\in B\otimes_A B$ 在 $B\otimes_A B$ 的每个极大理想上取值全为零, 则 $f=0$.

10. (ii): 对 $\operatorname{depth}A$ 归纳, 只需证明 $\operatorname{depth}A=0\implies\operatorname{depth}B=0$. 当 $\operatorname{depth}A=0$ 时, $m\in\operatorname{Ass}(A)$. 设 $0\neq x\in A$, 使得 $m=\operatorname{ann}(x)$. 则由 $n=mB$ 知 $nx=0$. 同时 $A\longrightarrow B$ 为忠实平坦保证了 x 在 B 中不为 0. 故 $n=\operatorname{ann}(x)$, $n\in\operatorname{Ass}(B)$. 从而 $\operatorname{depth}B=0$.

(iii): 利用 Serre 判据 (定理 8.5.1) 考察整闭整环性质.

11. 利用习题10, (iii), B 在每个素理想处的局部化都是整闭整环. 由此得到所要结论.

第十一章 可积联络与下降

由命题 10.1.5, 微分模 $\Omega_{B/A}$ 和 B 到 $(B\otimes_A B)/I^2$ 的两个 A-代数同态 i_1, i_2 有密切联系. 当 $I=0$ 时, 我们已经看到这两个同态在忠实平坦下降理论中起着重要作用. 本章通过考虑类似的下降问题, 将下降资料表述为一组算子的形式, 从而与 D-模联系起来. 在特征零的情形, D-模结构与可积联络一一对应. 在正特征情形, D-模结构对应到 Frobenius 同态下的下降资料, 从而与 F-可除模结构对应起来.

11.1 联络与 p-曲率

本节引入联络及相关概念. 为此, 先作一些代数上的准备. 以下设 $A\longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模. 二次外积 $\wedge^2 M$ 定义为商模 $(M\otimes_B M)/K$, 其中 K 为 $\{x\otimes x \mid x\in M\}$ 生成的 B-子模. 对 $x,y\in M$, 记 $x\wedge y\in\wedge^2 M$ 为 $x\otimes y$ 代表的等价类.

命题 11.1.1 存在唯一的 A-模同态 $\mathrm{d}\colon \Omega_{B/A}\longrightarrow \wedge^2\Omega_{B/A}$ 满足: $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}\,b)=\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,b$, $\forall\ f,b\in B$.

证明 $\Omega_{B/A}$ 作为 B-模由 $\mathrm{d}\,b$ $(b\in B)$ 生成, 据此可得唯一性. 下面证明存在性. 回忆 $\Omega_{B/A}\simeq\widetilde{\Omega}_{B/A}/F$, 其中 $\widetilde{\Omega}_{B/A}$ 为 $\left\{\tilde{\mathrm{d}}b \mid b\in B\right\}$ 作为基生成的自由 B-模, F 为以下三类元素生成的 B-子模:

(i) $\tilde{\mathrm{d}}(b_1+b_2)-\tilde{\mathrm{d}}b_1-\tilde{\mathrm{d}}b_2,\ \forall\ b_1,b_2\in B.$

(ii) $\tilde{\mathrm{d}}(b_1b_2)-b_1\tilde{\mathrm{d}}b_2-b_2\tilde{\mathrm{d}}b_1,\ \forall\ b_1,b_2\in B.$

(iii) $\tilde{\mathrm{d}}a,\ \forall\ a\in A.$

由于 $\widetilde{\Omega}_{B/A}$ 为自由模, $\mathrm{d}\colon\widetilde{\Omega}_{B/A}\longrightarrow\wedge^2\Omega_{B/A}$, $f\tilde{\mathrm{d}}b\longmapsto\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,b$ 给出一个良好定义的 Abel 群同态. 直接验证可知这个同态将 F 中的元素都映为 0, 从而给出 Abel 群同态

$\mathrm{d}\colon \Omega_{B/A} \longrightarrow \wedge^2\Omega_{B/A}$. 再由 $\mathrm{d}\,a = 0,\ \forall\, a \in A$ 可知这是一个 A-模同态. □

定义 11.1.1 设 M 为 B-模. M 的一个 A-**联络**是指一个满足如下 Leibniz 法则的 A-模同态 $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$: $\forall\, b \in B, \forall\, x \in M$, $\nabla(bx) = b\nabla x + x \otimes \mathrm{d}\,b$. 在环 A 明确的情况下我们也直接说 ∇ 为 M 的联络.

对于联络 $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$, 直接验证可知其诱导如下良好定义的 A-模同态: $M \otimes_B \Omega_{B/A} \xrightarrow{\nabla} M \otimes_A \wedge^2\Omega_{B/A}$, $x \otimes \omega \longmapsto \nabla x \wedge \omega + x \otimes \mathrm{d}\,\omega$. 我们将复合同态 $M \xrightarrow{\nabla} M \otimes_B \Omega_{B/A} \xrightarrow{\nabla} M \otimes_B \wedge^2\Omega_{B/A}$ 记为 ∇^2, 称为联络 ∇ 的**曲率**. 直接验证可知 ∇^2 为 B-模同态. 若 $\nabla^2 = 0$, 则称 ∇ 是一个**可积联络**.

例 11.1.1 微分 $\mathrm{d}\colon B \longrightarrow \Omega_{B/A} = B \otimes_B \Omega_{B/A}$ 是 B 的一个联络. 直接验证可知这是一个可积联络.

将 B 本身看作 B-模, 将 A-导子的集合 $\mathrm{Der}_A(B, B)$ 简记为 $\mathrm{Der}_A(B)$. 对一个 A-导子 $\partial \in \mathrm{Der}_A(B)$, 通过微分模的万有性质 (命题 10.1.1) 给出的双射 $\mathrm{Der}_A(B) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, B)$, 我们可以将 ∂ 看作一个 B-模同态 $\Omega_{B/A} \longrightarrow B$. 因此对任意 $f \in B$, 有 $\partial f = \partial(\mathrm{d}\,f)$ 成立. 这样对于联络 $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$, 可以定义如下复合映射

$$\nabla(\partial)\colon M \xrightarrow{\nabla} M \otimes_B \Omega_{B/A} \xrightarrow{1\otimes\partial} M \otimes_B B = M. \tag{11.1–1}$$

一般来说, $\nabla(\partial)$ 不是 B-模同态, 其行为类似于一个导子, 即对于 $f \in B$, $x \in M$, 有 $\nabla(\partial)(fx) = (\partial f)x + f\nabla(\partial)(x)$. 更一般地, 通过归纳可以验证, 对 $m \geq 0$, 有以下等式成立:

$$\nabla(\partial)^m(fx) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot (\partial^{m-i} f) \cdot (\nabla(\partial)^i(x)).$$

当环 A 的特征为 p 时, 上述等式简化为:

$$\nabla(\partial)^p(fx) = (\partial^p f) \cdot x + f \cdot \nabla(\partial)^p(x). \tag{11.1–2}$$

另一方面, 当环 A 的特征为 p 时, 利用 Leibniz 法则也可以验证, 对任意 A-导子 $\partial \in \mathrm{Der}_A(B)$, ∂^p 也为 A-导子.

定义–命题 11.1.1 设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为 B-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 为 A-联络. 设 A 的特征为 p. 则对 A-导子 $\partial \in \mathrm{Der}_A(B)$, 映射 $\psi_\nabla(\partial) := \nabla(\partial)^p - \nabla(\partial^p)$ 为 B-模同态. 由此给出的映射 $\psi_\nabla\colon \mathrm{Der}_A(B) \longrightarrow \mathrm{End}_B(M)$ 称为 ∇ 的 p-**曲率**.

证明 对 $f \in B$, $x \in M$, $\nabla(\partial^p)(fx) = (\partial^p f) \cdot x + f \cdot \nabla(\partial^p)(x)$. 再利用 (11.1–2) 即得

$$\psi_\nabla(\partial)(fx) = f\psi_\nabla(\partial)(x).$$

因此 $\psi_\nabla(\partial)$ 为 B-模同态. □

我们希望将可积联络描述为更具体的形式. 从此直到本节结束我们总是作以下设定: A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, $\Omega_{B/A}$ 为自由 B-模, 并且 $b_1,\dots,b_r \in B$ 满足 $\mathrm{d}\,b_1,\dots,\mathrm{d}\,b_r$ 为 $\Omega_{B/A}$ 的一组基. M 为 B-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M\otimes_B \Omega_{B/A}$ 为联络.

由于 $\mathrm{d}\,b_1,\dots,\mathrm{d}\,b_r$ 为自由 B-模 $\Omega_{B/A}$ 的一组基, 我们可以找到 $\mathrm{Der}_A(B) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A},B)$ 的一组对偶基 $\partial_1,\dots,\partial_r \in \mathrm{Der}_A(B)$, 其满足 $\forall\ 1\le i,j\le r$,

$$\partial_i b_j = \partial_i(\mathrm{d}\,b_j) = \begin{cases} 1, & i=j;\\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{11.1–3}$$

.

命题 11.1.2 $\partial_1,\dots,\partial_r \in \mathrm{Der}_A(B)$ 两两交换.

证明 任取 i,j, 令 $[\partial_i,\partial_j] \coloneqq \partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i$ 为换位子. 直接验证可知 $[\partial_i,\partial_j]\in\mathrm{Der}_A(B)$. 对任意 k, 由 (11.1–3) 可知 $[\partial_i,\partial_j]b_k = 0$. 故将 $[\partial_i,\partial_j]$ 看作 $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A},B)$ 中的元素有 $[\partial_i,\partial_j](\mathrm{d}\,b_k)=0$. 由于 $\mathrm{d}\,b_k$ $(1\le k\le r)$ 为 $\Omega_{B/A}$ 的一组基, 故 $[\partial_i,\partial_j]=0$. 即得 $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$. □

由于 $\mathrm{d}\,b_1,\dots,\mathrm{d}\,b_r$ 为自由 B-模 $\Omega_{B/A}$ 的一组基, 我们有 $\nabla = \sum\limits_{i=1}^{r}\theta_i\otimes\mathrm{d}\,b_i$, 其中 $\theta_1,\dots,\theta_r$ 为 M 到自身的映射. 由 $\nabla(\partial)$ 的定义, 可以看到 $\theta_i = \nabla(\partial_i)$, $\forall\ i$. 由此可知对任意 $x\in M$, 有 $\nabla(x) = \sum\limits_{i=1}^{r}\nabla(\partial_i)(x)\otimes\mathrm{d}\,b_i$.

命题 11.1.3 ∇ 可积 $\iff$ $\nabla(\partial_1),\dots,\nabla(\partial_r)$ 两两交换.

证明 注意到 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,b_i=0$, $\mathrm{d}\,b_i\wedge\mathrm{d}\,b_i=0$, 以及 $\mathrm{d}\,b_i\wedge\mathrm{d}\,b_j = -\mathrm{d}\,b_j\wedge\mathrm{d}\,b_i$. 对任意 $x\in M$,

$$\begin{aligned}
\nabla^2(x) &= \nabla\Big(\sum_{i=1}^{r}\nabla(\partial_i)(x)\otimes\mathrm{d}\,b_i\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{r}\nabla(\nabla(\partial_i)(x))\wedge\mathrm{d}\,b_i\\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\nabla(\partial_j)\circ\nabla(\partial_i)(x)\otimes\mathrm{d}\,b_j\wedge\mathrm{d}\,b_i\\
&= \sum_{1\le j<i\le r}\left(\nabla(\partial_j)\circ\nabla(\partial_i)-\nabla(\partial_i)\circ\nabla(\partial_j)\right)(x)\otimes\mathrm{d}\,b_j\wedge\mathrm{d}\,b_i.
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{d}\,b_j\wedge\mathrm{d}\,b_i$ $(1\le j<i\le r)$ 为自由 B-模 $\wedge^2\Omega_{B/A}$ 的一组基, 我们看到 $\nabla^2=0$ $\iff$ 对任意 i,j, 有 $\nabla(\partial_j)\circ\nabla(\partial_i)-\nabla(\partial_i)\circ\nabla(\partial_j)=0$. 故命题得证 □

一般来说, 当 A 的特征为 p 时, p-曲率 $\psi_\nabla\colon \mathrm{Der}_A(B)\longrightarrow\mathrm{End}_B(M)$ 并不是 B-模

同态, 但当 ∇ 可积时, 其仍然满足一定的线性性质. 即有如下命题.

命题 11.1.4 设 A 的特征为 p, 并且 ∇ 可积. 则 $\psi_\nabla\colon \mathrm{Der}_A(B) \longrightarrow \mathrm{End}_B(M)$ 为 p-线性同态, 即同时满足如下两条:

(i) $\forall\, D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_A(B)$, 有 $\psi_\nabla(D_1+D_2) = \psi_\nabla(D_1)+\psi_\nabla(D_2)$.

(ii) $\forall\, D \in \mathrm{Der}_A(B)$, $\forall\, g \in B$, 有 $\psi_\nabla(gD) = g^p\psi_\nabla(D)$.

证明 注意到 $\mathrm{Der}_A(B) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, B)$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\partial_1, \ldots, \partial_r$. 任取 $D \in \mathrm{Der}_A(B)$, 则有表达式 $D = f_1\partial_1 + \ldots f_r\partial_r$, 其中 $f_i \in B$. 直接计算可知

$$D^p = \sum_{i=1}^r f_i^p\partial_i^p + \sum_{i=1}^r P_i\partial_i + \sum_{2\le k_1+\cdots+k_r\le p-1} f_{k_1\ldots k_r}\partial_1^{k_1}\ldots\partial_r^{k_r}.$$

其中 $P_i, f_{k_1\ldots k_r} \in B$, 并且均为 $\partial_1^{i_1}\ldots\partial_r^{i_r}f_j$ $(0 \le i_1, \ldots, i_r \le p-1,\ 1 \le j \le r)$ 的整系数多项式. 同理, 由 $\nabla(D) = f_1\nabla(\partial_1) + \ldots f_r\nabla(\partial_r)$ 可知

$$\nabla(D)^p = \sum_{i=1}^r f_i^p\nabla(\partial_i)^p + \sum_{i=1}^r P_i\nabla(\partial_i) + \sum_{2\le k_1+\cdots+k_r\le p-1} f_{k_1\ldots k_r}\nabla(\partial_1)^{k_1}\ldots\nabla(\partial_r)^{k_r}.$$

注意 D^p 和 $\nabla(D)^p$ 展开式中出现的系数 P_i 和 $f_{k_1\ldots k_r}$ 相同.

由于 D^p, $\sum\limits_{i=1}^r f_i^p\partial_i^p$ 和 $\sum\limits_{i=1}^r P_i\partial_i$ 均为 A-导子, 故 $\sum\limits_{2\le k_1+\cdots+k_r\le p-1} f_{k_1\ldots k_r}\partial_1^{k_1}\ldots\partial_r^{k_r}$ 也为 A-导子. 由下面的引理 11.1.1 即知每个 $f_{k_1\ldots k_r}$ 均为 0. 这样 D^p 和 $\nabla(D)^p$ 的展开式简化为

$$D^p = \sum_{i=1}^r f_i^p\partial_i^p + \sum_{i=1}^r P_i\partial_i.$$
$$\nabla(D)^p = \sum_{i=1}^r f_i^p\nabla(\partial_i)^p + \sum_{i=1}^r P_i\nabla(\partial_i).$$

故 $\psi_\nabla(D) = \nabla(D)^p - \nabla(D^p) = \sum\limits_{i=1}^r f_i^p(\nabla(\partial_i)^p - \nabla(\partial_i^p)) = \sum\limits_{i=1}^r f_i^p\psi_\nabla(\partial_i)$. 由这个表达式不难得到 (i), (ii). □

引理 11.1.1 设 A 的特征为 p. 设 $P \coloneqq \sum\limits_{2\le k_1+\cdots+k_r\le p-1} f_{k_1\ldots k_r}\partial_1^{k_1}\ldots\partial_r^{k_r}\colon B \longrightarrow B$ 为 B 的 A-导子, 其中每个 $f_{k_1\ldots k_r} \in B$. 则 $P = 0$, 即对任意 $(k_1, \ldots, k_r)$, 均有 $f_{k_1\ldots k_r} = 0$.

证明 对 $k_1 + \cdots + k_r$ 进行归纳. 设 $2 \le m \le p-1$, 并且假设对任意满足 $2 \le k_1 + \cdots + k_r \le m-1$ 的 $(k_1, \ldots, k_r)$ 均有 $f_{k_1\ldots k_r} = 0$. 现在任取 $(k_1, \ldots, k_r)$ 满足 $k_1 + \cdots + k_r = m$, 只需证明 $f_{k_1\ldots k_r} = 0$. 令 $b \coloneqq b_1^{k_1}\ldots b_r^{k_r} \in B$. 由 P 的表达式直接计算可知 $P(b) = (\prod\limits_{i=1}^r k_i!)f_{k_1\ldots k_r}$. 由于 P 为 A-导子, 故 $P(b) = g_1P(b_1) + \cdots + g_rP(b_r)$, 其

中 $g_i \in B$ 满足: 若 $k_i = 0$, 则 $g_i = 0$; 若 $k_i \geq 1$, 则 $g_i = k_i b_1^{k_1} \dots b_{i-1}^{k_{i-1}} b_i^{k_i - 1} b_{i+1}^{k_{i+1}} \dots b_r^{k_r}$. 由 $k_1 + \dots + k_r \geq 2$ 和 (11.1–3) 可知 $P(b_i) = 0, \forall\, 1 \leq i \leq r$. 从而 $P(b) = 0$. 这样得到 $(\prod_{i=1}^{r} k_i!) f_{k_1 \dots k_r} = 0$. 由于 B 的特征也为 p, 可知 $(\prod_{i=1}^{r} k_i!)$ 在 B 中为可逆元, 从而得到 $f_{k_1 \dots k_r} = 0$. □

命题 11.1.5 设 A 的特征为 p, 则对任意 $i = 1, \dots, r$, 有 $\partial_i^p = 0$.

证明 任取 i, 有 $\partial_i^p \in \mathrm{Der}_A(B) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, B)$. 由 (11.1–3) 可知对任意 j, 均有 $\partial_i^p(b_j) = 0$. 从而将 ∂_i^p 看作 $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, B)$ 中元素时有 $\partial_i^p(\mathrm{d}\, b_j) = 0, \forall\, j$. 由于 $\mathrm{d}\, b_1, \dots, \mathrm{d}\, b_r$ 为 $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, B)$ 的一组基, 我们看到 $\partial_i^p = 0$. □

命题 11.1.6 设 A 的特征为 p, 并且 ∇ 可积. 则 $\psi_\nabla = 0 \iff \nabla(\partial_i)^p = 0, \forall\, 1 \leq i \leq r$.

证明 对任意 i, 由命题 11.1.5知 $\psi_\nabla(\partial_i) = \nabla(\partial_i)^p$. 任取 $D \in \mathrm{Der}_A(B)$, 则有表达式 $D = f_1 \partial_1 + \dots + f_r \partial_r$, 其中 $f_i \in B$. 由命题 11.1.4 可知 $\psi_\nabla(D) = \sum_{i=1}^{r} f_i^p \psi_\nabla(\partial_i) = \sum_{i=1}^{r} f_i^p \nabla(\partial_i)^p$. 由此即知命题成立. □

我们将上述讨论总结为如下两个命题.

命题 11.1.7 将 M 上的可积联络 $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 的形成的集合记为 $\mathcal{C}$. 记 $\mathcal{T}$ 为满足如下条件的 r 元有序组 $(\theta_1, \dots, \theta_r)$ 形成的集合:

(i) $\forall\, 1 \leq i \leq r$, $\theta_i\colon M \longrightarrow M$ 为加法群同态, 并且 $\forall\, b \in B$, $\forall\, x \in M$, 有 $\theta_i(bx) = (\partial_i b)x + b\theta_i(x)$.

(ii) $\theta_1, \dots, \theta_r$ 两两交换.

则 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{T}$ 存在双射, 并且该双射及其逆映射由以下方式给出:

$$\nabla \longmapsto (\nabla(\partial_1), \dots, \nabla(\partial_r))$$
$$(\theta_1, \dots, \theta_r) \longmapsto \theta_1 \otimes \mathrm{d}\, b_1 + \dots + \theta_r \otimes \mathrm{d}\, b_r.$$

证明 利用命题 11.1.3直接验证即可. □

命题 11.1.8 记号同命题 11.1.7, 并设 A 的特征为 p. 分别定义 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{T}$ 的如下子集:

$$\mathcal{C}_0 \coloneqq \{\nabla \in \mathcal{C} \mid \psi_\nabla = 0\},$$
$$\mathcal{T}_0 \coloneqq \{(\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathcal{T} \mid \theta_i^p = 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq r\}.$$

则命题 11.1.7 中的双射诱导了 $\mathcal{C}_0$ 和 $\mathcal{T}_0$ 之间的双射.

证明 由命题 11.1.7和命题 11.1.6 即得. □

11.2 下降资料的重新表述

设 $A \longrightarrow B$ 为环同态. 设 I 为 $B \otimes_A B$ 的真理想, J 为 $B \otimes_A B \otimes_A B$ 的真理想, 使得如下 A-代数同态是良好定义的:

$$
\begin{aligned}
i_1 &\colon\ B \longrightarrow (B \otimes_A B)/I,\ b \longmapsto b \otimes 1\\
i_2 &\colon\ B \longrightarrow (B \otimes_A B)/I,\ b \longmapsto 1 \otimes b\\
i_{12} &\colon\ (B \otimes_A B)/I \longrightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 \otimes b_2 \otimes 1\\
i_{23} &\colon\ (B \otimes_A B)/I \longrightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto 1 \otimes b_1 \otimes b_2\\
i_{13} &\colon\ (B \otimes_A B)/I \longrightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\ b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 \otimes 1 \otimes b_2\\
j_1 &\colon\ B \longrightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\ b \longmapsto b \otimes 1 \otimes 1\\
j_2 &\colon\ B \longrightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\ b \longmapsto 1 \otimes b \otimes 1\\
j_3 &\colon\ B \longrightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\ b \longmapsto 1 \otimes 1 \otimes b.
\end{aligned}
$$

设 B 中存在一组元素 $b_1, \ldots, b_r$, 并引入如下记号: 对 $i = 1, \ldots, r$,

$$
\begin{aligned}
\xi_i &\coloneqq b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i \in (B \otimes_A B)/I,\\
\zeta_i &\coloneqq b_i \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes b_i \otimes 1 \in (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\\
\zeta_i' &\coloneqq 1 \otimes b_i \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes b_i \in (B \otimes_A B \otimes_A B)/J,\\
\zeta_i'' &\coloneqq b_i \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes b_i \in (B \otimes_A B \otimes_A B)/J.
\end{aligned}
$$

在本节, 如不特别说明, 我们总是假设这些元素满足如下条件:

条件 11.2.1 (i) 对任意 $i = 1, \ldots, r$, ξ_i 为 $(B \otimes_A B)/I$ 中的幂零元, ζ_i, ζ_i', ζ_i'' 为 $(B \otimes_A B \otimes_A B)/J$ 中的幂零元.

(ii) 指标集 $S_1 \coloneqq \left\{K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid \xi^K \neq 0\right\}$ 为有限集. 对 $k = 1, 2$, 通过 i_k 将 $(B \otimes_A B)/I$ 看作 B-模, 那么 $(B \otimes_A B)/I$ 为自由 B-模, 并且 $\left\{\xi^K \mid K \in S_1\right\}$ 为一组基.

(iii) 令指标集 $S_2 \coloneqq \left\{(K, K') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid \zeta^K \zeta'^{K'} \neq 0\right\}$. 通过 j_3 将 $(B \otimes_A B \otimes_A B)/J$ 看作 B-模, 那么 $(B \otimes_A B \otimes_A B)/J$ 为自由 B-模, 并且 $\left\{\zeta^K \zeta'^{K'} \mid (K, K') \in S_2\right\}$ 为一组基.

这里及以后我们使用如下多重指标记号的约定:

记号 11.2.1 记 $\xi \coloneqq (\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $\zeta \coloneqq (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$, $\zeta' \coloneqq (\zeta_1', \ldots, \zeta_r')$, 以及 $\zeta'' \coloneqq (\zeta_1'', \ldots, \zeta_r'')$. 对于 r 重指标 $K = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, 记 $|K| \coloneqq a_1 + \cdots + a_r$, $K! \coloneqq a_1! \ldots a_r!$, $\xi^K \coloneqq \prod_{i=1}^r \xi_i^{a_i}$, $\zeta^K \coloneqq \prod_{i=1}^r \zeta_i^{a_i}$, $\zeta'^K \coloneqq \prod_{i=1}^r \zeta_i'^{a_i}$, 以及 $\zeta''^K \coloneqq \prod_{i=1}^r \zeta_i''^{a_i}$. 对

于 $L=(b_1,\dots,b_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 如果对每个 i 均有 $b_i\geq a_i$, 则记 $\binom{L}{K}:=\frac{L!}{K!(L-K)!}=\prod_{i=1}^{r}\binom{b_i}{a_i}$, 否则就记 $\binom{L}{K}=0$.

注意在条件 11.2.1下, $0\in S_1$, $(0,0)\in S_2$, 并且 $S_2\subset S_1\times S_1$. 从而 S_2 也为有限集.

以下对形如 f_*M 和 $f_*\varphi$ 符号的使用遵循约定 7.4.1的解释.

设 M 为 B-模, 设 $\epsilon\colon i_{1*}M\longrightarrow i_{2*}M$ 为 $(B\otimes_A B)/I$-模同态. 由于 $(B\otimes_A B)/I$ 通过 i_2 为自由 B-模, 可知有 B-模同构 $i_{2*}M\simeq\bigoplus_{K\in S_1}M$. 从而对每个 $K\in S_1$, 有加法群同态 $\theta_K\colon M\longrightarrow M$, 使得对 $x\in M$, 有展开式

$$\epsilon(x\otimes 1)=\sum_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes\xi^K.$$

由 ϵ 为 $(B\otimes_A B)/I$-模同态可知在 $i_{2*}M$ 中有如下等式成立:

$$\forall\, x\in M,\ \forall\, b\in B,\ \sum_{K\in S_1}\theta_K(bx)\otimes\xi^K=\sum_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes(\xi^K(b\otimes 1)).$$

其中 $\xi^K(b\otimes 1)$ 为 $(B\otimes_A B)/I$ 中的乘法.

命题 11.2.1 *ϵ 为同构 $\iff$ $\theta_0\colon M\longrightarrow M$ 为双射.*

证明 $\Longrightarrow$: 设 $\epsilon'\colon i_{2*}M\longrightarrow i_{1*}M$ 为 ϵ 的逆. 则也有展开式

$$\forall\, x\in M,\ \epsilon'(x\otimes 1)=\sum_{K\in S_1}\theta'_K(x)\otimes\xi^K.$$

考虑 $\epsilon\circ\epsilon'$ 和 $\epsilon'\circ\epsilon$ 的展开, 即可得到 θ_0 与 θ'_0 为互逆的映射.

$\Longleftarrow$: 设 θ_0 为双射. 由 ξ^K $(K\neq 0)$ 均为幂零元, 以及 S_1 有限, 可以直接验证 ϵ 为双射, 从而为同构. □

下面将 ϵ 的相容性条件重新表述为 θ_K 满足的条件.

命题 11.2.2 *ϵ 满足相容性条件 $i_{13*}\epsilon=i_{23*}\epsilon\circ i_{12*}\epsilon$ 当且仅当诸 θ_K 满足如下条件:*

$$\forall\, x\in M,\ \sum_{K''\in S_1}\theta_{K''}(x)\otimes\zeta^{''K''}=\sum_{K\in S_1}\sum_{K'\in S_1}\theta_{K'}(\theta_K(x))\otimes(\zeta^K\zeta'^{K'}).$$

其中 $\zeta^K\zeta'^{K'}$ 是在环 $(B\otimes_A B\otimes_A B)/J$ 中相乘, 而上述等式是在 $j_{3*}M$ 中的等式.

证明 由定义直接验证即得. □

总结以上讨论, 我们得到如下关于下降资料的重新表述.

命题 11.2.3 在条件 11.2.1 下, 对 B-模 M, 给一个满足相容性条件 $i_{13*}\epsilon = i_{23*}\epsilon \circ i_{12*}\epsilon$ 的 $(B\otimes_A B)/I$-模同构 $\epsilon\colon i_{1*}M \xrightarrow{\sim} i_{2*}M$ 等价于给一族满足如下条件的加法群同态 $\theta_K\colon M \longrightarrow M$ $(K\in S_1)$:

(1) $\theta_0 = \mathrm{id}$.

(2) $\forall\, x\in M$, $\forall\, b\in B$, 在 $i_{2*}M$ 中有 $\sum\limits_{K\in S_1}\theta_K(bx)\otimes\xi^K = \sum\limits_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes(\xi^K(b\otimes 1))$.

(3) $\forall\,(K,K')\in S_2$, 如果 $K+K'\in S_1$, 则 $\binom{K+K'}{K}\theta_{K+K'} = \theta_{K'}\circ\theta_K$; 如果 $K+K'\notin S_1$, 则 $\theta_{K'}\circ\theta_K = 0$.

上述等价由展开式 $\epsilon(x\otimes 1) = \sum\limits_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes\xi^K$ 确定.

证明 给了 ϵ, 设 θ_K 由展开式 $\epsilon(x\otimes 1) = \sum\limits_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes\xi^K$ 给出. 由上面的讨论知 (2) 成立. 在命题 11.2.2中, 等式左边为:

$$\begin{aligned}\sum_{K''\in S_1}\theta_{K''}(x)\otimes\zeta''^{K''} &= \sum_{K''\in S_1}\theta_{K''}(x)\otimes(\zeta+\zeta')^{K''}\\ &= \sum_{(K,K')\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0},K+K'\in S_1}\theta_{K+K'}(x)\otimes\binom{K+K'}{K}\zeta^K\zeta^{K'}\\ &= \sum_{(K,K')\in S_2,K+K'\in S_1}\theta_{K+K'}(x)\otimes\binom{K+K'}{K}\zeta^K\zeta^{K'}\end{aligned}$$

而等式右边为:

$$\sum_{K\in S_1}\sum_{K'\in S_1}\theta_{K'}(\theta_K(x))\otimes(\zeta^K\zeta'^{K'}) = \sum_{(K,K')\in S_2}\theta_{K'}(\theta_K(x))\otimes(\zeta^K\zeta'^{K'}).$$

由此知 (3) 成立. 由命题 11.2.1 得到 θ_0 为双射. 而在 (3) 中, 取 $K = K' = 0$, 可知 $\theta_0\circ\theta_0 = \theta_0$. 故 $\theta_0 = \mathrm{id}$. 这就得到了 (1).

反之, 给了一族满足 (1), (2), (3) 的加法群同态 $\theta_K\colon M\longrightarrow M$ $(K\in S_1)$, 则 $x\longmapsto\sum\limits_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes\xi^K$ 为一个 B-模同态 $M\longrightarrow i_{2*}M$. 再由命题 2.2.5 或直接验证, 即可得到良好定义的 $(B\otimes_A B)/I$-模同态 $\epsilon\colon i_{1*}M\longrightarrow i_{2*}M$, $x\otimes t\longmapsto\sum\limits_{K\in S_1}\theta_K(x)\otimes(\xi^K t)$, 其中 $x\in M$, $t\in(B\otimes_A B)/I$. 由命题 11.2.1 知 ϵ 为同构. 由命题 11.2.2 知 $i_{13*}\epsilon = i_{23*}\epsilon\circ i_{12*}\epsilon$. □

由条件 11.2.1, 通过 i_2, $(B\otimes_A B)/I$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{\xi^K\mid K\in S_1\}$. 从而有一族映射 $D_K\colon B\longrightarrow B$ $(K\in S_1)$, 使得对任意 $b\in B$, 在 $(B\otimes_A B)/I$ 中有:

$$b\otimes 1 = \sum_{K\in S_1}\xi^K\cdot(1\otimes D_K(b)). \tag{11.2–1}$$

形式上, 我们可以将上式类比为 b 的 “Taylor 展开”, 而 $D_K(b)$ 为相应的展开系数.

现在可以将本节讨论总结为如下命题.

定理 11.2.1　在条件 11.2.1 下, 对 B-模 M, 给一个满足相容性条件 $i_{13*}\epsilon = i_{23*}\epsilon \circ i_{12*}\epsilon$ 的 $(B \otimes_A B)/I$-模同构 $\epsilon\colon i_{1*}M \xrightarrow{\sim} i_{2*}M$ 等价于给一族满足如下条件的加法群同态 $\theta_K\colon M \longrightarrow M$ $(K \in S_1)$:

(1) $\theta_0 = \mathrm{id}$.

(2) $\forall\ K'' \in S_1$, $\forall\ b \in B$, $\forall\ x \in M$, 有 $\theta_{K''}(bx) = \sum\limits_{(K,K')\in S} D_{K'}(b)\theta_K(x)$, 其中 $S \coloneqq \{(K,K') \in S_1 \times S_1 \mid K + K' = K''\}$.

(3) $\forall\,(K,K') \in S_2$, 如果 $K+K' \in S_1$, 则 $\binom{K+K'}{K}\theta_{K+K'} = \theta_{K'} \circ \theta_K$; 如果 $K+K' \notin S_1$, 则 $\theta_{K'} \circ \theta_K = 0$.

上述等价由展开式 $\epsilon(x \otimes 1) = \sum\limits_{K\in S_1} \theta_K(x) \otimes \xi^K$ 确定.

证明　利用展开式 (11.2–1), 可以将命题 11.2.3 中的 (2) 改写为: $\forall\ x \in M$, $\forall\ b \in B$, 在 $i_{2*}M$ 中有 $\sum\limits_{K\in S_1} \theta_K(bx) \otimes \xi^K = \sum\limits_{K\in S_1}\sum\limits_{K'\in S_1} (D_{K'}(b)\theta_K(x)) \otimes \xi^{K+K'}$. 比较等式两边 ξ^K 的系数, 可知这又等价于本定理的 (2). □

注记 11.2.1　由定义不难看到, 每个 D_K 均为 A-线性映射, 并且对任意 $a \in A$,

$$D_K(a) = \begin{cases} a, & \text{如果 } K = 0; \\ 0, & \text{如果 } K \neq 0. \end{cases}$$

由此知满足定理 11.2.1 的条件 (2) 的加法群同态 θ_K 均为 A-模同态.

在定理 11.2.1 中, 取 $M = B$, 令 ϵ 为自然同构 $i_{1*}B = i_{2*}B = (B \otimes_A B)/I$, 则其满足相容性条件 $i_{13*}\epsilon = i_{23*}\epsilon \circ i_{12*}\epsilon$. 此时 $\theta_K = D_K$. 因此我们得到如下命题.

命题 11.2.4　在条件 11.2.1 下, 我们有:

(i) $D_0 = \mathrm{id}$.

(ii) $\forall\ K'' \in S_1$, $\forall\ x, y \in B$, 有 $D_{K''}(xy) = \sum\limits_{(K,K')\in S} D_{K'}(x)D_K(y)$, 其中 $S \coloneqq \{(K,K') \in S_1 \times S_1 \mid K + K' = K''\}$.

(iii) $\forall\,(K,K') \in S_2$, 如果 $K + K' \in S_1$, 则 $\binom{K+K'}{K} D_{K+K'} = D_{K'} \circ D_K$; 如果 $K + K' \notin S_1$, 则 $D_{K'} \circ D_K = 0$.

11.3 无穷小扩张与下降

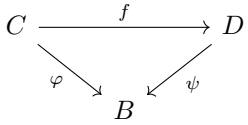
…Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la rigidité, et la faculté de croître, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de soufre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs, etc.

Grothendieck (letter to Tate in 1968)

在本节中我们固定以下记号: A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 并且 B/A 是光滑的. 对于 B-模 M, 即使 M 无法下降到 A 上, 但是我们希望考察何时 M 可以下降到 B 的幂零加厚上. 为此, 需要和平坦下降类似的一些构造. 记 I 为环同态 $B\otimes_A B\longrightarrow B$, $x\otimes y\longmapsto xy$ 的核, J 为环同态 $B\otimes_A B\otimes_A B\longrightarrow B$, $x\otimes y\otimes z\longmapsto xyz$ 的核. 对 $n\geq 0$, 定义如下 A-代数同态:

$$
\begin{aligned}
p^{(n)}&\colon\ (B\otimes_A B)/I^{n+1}\longrightarrow B,\ b_1\otimes b_2\longmapsto b_1b_2\\
i_1^{(n)}&\colon\ B\longrightarrow (B\otimes_A B)/I^{n+1},\ b\longmapsto b\otimes 1\\
i_2^{(n)}&\colon\ B\longrightarrow (B\otimes_A B)/I^{n+1},\ b\longmapsto 1\otimes b\\
i_{12}^{(n)}&\colon\ B\otimes_A B\longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1},\ b_1\otimes b_2\longmapsto b_1\otimes b_2\otimes 1\\
i_{23}^{(n)}&\colon\ B\otimes_A B\longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1},\ b_1\otimes b_2\longmapsto 1\otimes b_1\otimes b_2\\
i_{13}^{(n)}&\colon\ B\otimes_A B\longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1},\ b_1\otimes b_2\longmapsto b_1\otimes 1\otimes b_2\\
j_1^{(n)}&\colon\ B\longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1},\ b\longmapsto b\otimes 1\otimes 1\\
j_2^{(n)}&\colon\ B\longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1},\ b\longmapsto 1\otimes b\otimes 1\\
j_3^{(n)}&\colon\ B\longrightarrow (B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1},\ b\longmapsto 1\otimes 1\otimes b.
\end{aligned}
$$

11.3.1 晶体与分层 称一个 A-代数同态 $C\xrightarrow{\varphi}B$ 为 B 的一个**幂零加厚**, 记为 (C,φ), 如果 φ 为满同态, 并且存在 $n\geq 1$, 使得 $(\operatorname{Ker}\varphi)^n=0$. 对 B 的两个幂零加厚 $C\xrightarrow{\varphi}B$ 和 $D\xrightarrow{\psi}B$, 记 $\operatorname{Mor}((C,\varphi),(D,\psi))$ 为所有使得如下图表交换的 A-代数同态 f 形成的集合:



定义 11.3.1 一个 B/A-**晶体** $\mathcal{F}$ 是指对每个 B 的幂零加厚 (C,φ), 指定一个 C-模 $\mathcal{F}(C,\varphi)$, 对每个 $f\in\operatorname{Mor}((C,\varphi),(D,\psi))$ (其中 (C,φ) 和 (D,ψ) 均为 B 的幂零加厚), 指定一个 Abel 群同态 $\mathcal{F}(f)\colon\mathcal{F}(C,\varphi)\longrightarrow\mathcal{F}(D,\psi)$, 并且满足如下条件的一组数据:

(i) 对 B 的每个幂零加厚 (C,φ), 有 $\mathcal{F}(\mathrm{id})=\mathrm{id}$. 其中 $\mathrm{id}\in\mathrm{Mor}((C,\varphi),(C,\varphi))$ 为恒等同态.

(ii) 对 B 的任意三个幂零加厚 (C_1,φ_1), (C_2,φ_2), (C_3,φ_3), 以及任意的同态 $f\in\mathrm{Mor}((C_1,\varphi_1),(C_2,\varphi_2))$, $g\in\mathrm{Mor}((C_2,\varphi_2),(C_3,\varphi_3))$, 均有 $\mathcal{F}(g\circ f)=\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(f)$.

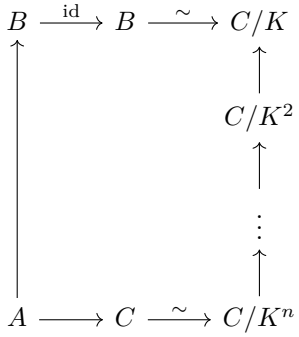
(iii) 对 B 的任意两个幂零加厚 (C,φ), (D,ψ), 以及任意 $f\in\mathrm{Mor}((C,\varphi),(D,\psi))$, $\mathcal{F}(f)$ 满足 $\mathcal{F}(f)(cx)=f(c)\mathcal{F}(f)(x)$, $\forall\, c\in C, x\in\mathcal{F}(C,\varphi)$, 即通过 $C\xrightarrow{f}D$ 将 D 看作 C-代数之后, $\mathcal{F}(f)$ 为 C-模同态. 并且 $\mathcal{F}(f)$ 诱导的 D-模同态 $\mathcal{F}(C,\varphi)\otimes_C D\longrightarrow\mathcal{F}(D,\psi)$, $x\otimes d\longmapsto d\mathcal{F}(f)(x)$ 为 D-模同构. 该同构仍记为 $\mathcal{F}(f)$.

设 M 为 B-模, 下面考察 M 满足什么条件时可以扩张为一个 B/A-晶体.

B 的幂零加厚 $C\xrightarrow{\varphi}B$ 的一个**截面**是指一个 A-代数同态 $s\colon B\longrightarrow C$, 使得 $\varphi\circ s=\mathrm{id}$.

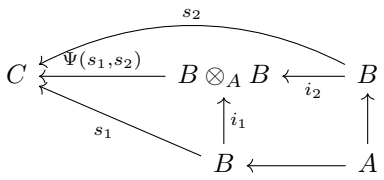
引理 11.3.1 *B 的任何幂零加厚 $C\xrightarrow{\varphi}B$ 均存在截面.*

证明 设 $K=\mathrm{Ker}\,\varphi$, 并且 $K^n=0$. 考察如下交换图表:



注意到每个自然的商同态 $C/K^{i+1}\longrightarrow C/K^i$ 均为一阶加厚, 故由 B/A 光滑可知每个 A-代数同态 $B\longrightarrow C/K^i$ 均可提升为 A-代数同态 $B\longrightarrow C/K^{i+1}$. 由此可以找到 $B\xrightarrow{\mathrm{id}}B\xrightarrow{\sim}C/K$ 的提升 $s\colon B\longrightarrow C$, 这就是一个截面. □

对 B 的幂零加厚 $C\xrightarrow{\varphi}B$ 以及任意两个截面 s_1,s_2, 由张量积的万有性质可得如下 A-代数的交换图表:



可以看到复合同态 $\varphi\circ\Psi(s_1,s_2)$ 为同态 $B\otimes_A B\longrightarrow B$, $x\otimes y\longmapsto xy$. 故 $\Psi(s_1,s_2)(I)\subset\mathrm{Ker}\,\varphi$. 如果 $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^{n+1}=0$, 则 $\Psi(s_1,s_2)(I^{n+1})=0$, 这时 $\Psi(s_1,s_2)$ 诱导了 A-代数同

态 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}\longrightarrow C$. 以上说明 B 的幂零加厚 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}\xrightarrow{p^{(n)}}B$ $(n\geq 0)$ 以及两个截面 $i_1^{(n)}, i_2^{(n)}$ 在分析一般的幂零加厚的两个截面时具有某种万有性质. 为了使通过截面将 B-模 M 转化为 C-模这个过程不依赖于截面的选取, 我们有如下定义 (这里及以后遵循约定 7.4.1来使用形如 f_*M 和 $f_*\varphi$ 的符号).

定义 11.3.2 B-模 M 的一个**分层**是指一族 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$-模同构 $\epsilon_n\colon i_{1*}^{(n)}M\xrightarrow{\sim} i_{2*}^{(n)}M$ $(n\geq 0)$, 满足:

(i) $\epsilon_0=\mathrm{id}$ 为恒等同构. 这里将 $(B\otimes_A B)/I$ 通过同构 $x\otimes y\mapsto xy$ 等同到 B.

(ii) 对任意 $m\leq n$, ϵ_m 和 ϵ_n 是相容的, 即 $\pi_*\epsilon_n=\epsilon_m$. 其中 π 为如下自然的商同态:

$$\pi\colon (B\otimes_A B)/I^{n+1}\longrightarrow (B\otimes_A B)/I^{m+1}.$$

(iii) 对任意 n, 相容性条件 $i_{13*}^{(n)}\epsilon_n=i_{23*}^{(n)}\epsilon_n\circ i_{12*}^{(n)}\epsilon_n$ 成立.

与平坦下降的情形类似 (命题 7.4.3), 我们有以下命题:

命题 11.3.1 设 M 为 B-模. 则以下两类对象存在 (同构意义下的) 一一对应:

(i) 满足 $\mathcal{F}(B,\mathrm{id})\simeq M$ 的 B/A-晶体 $\mathcal{F}$.

(ii) M 的分层 ϵ_n $(n\geq 0)$.

证明 给定满足 $\mathcal{F}(B,\mathrm{id})\simeq M$ 的 B/A-晶体 $\mathcal{F}$, 不妨设 $\mathcal{F}(B,\mathrm{id})=M$. 注意到 $B\xrightarrow{\mathrm{id}}B$ 和 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}\xrightarrow{p^{(n)}}B$ 均为 B 的幂零加厚. 并且 $i_1^{(n)}, i_2^{(n)}$ 为 $p^{(n)}$ 的两个截面. 从而

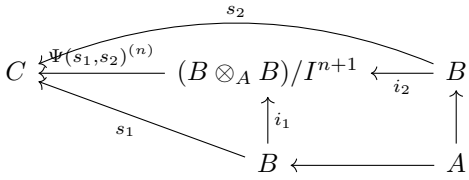
$$i_1^{(n)}, i_2^{(n)}\in \mathrm{Mor}((B,\mathrm{id}),((B\otimes_A B)/I^{n+1},p^{(n)})).$$

由 B/A-晶体的定义可知 $i_1^{(n)}, i_2^{(n)}$ 分别诱导同构

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(i_1^{(n)})\colon\quad & i_{1*}^{(n)}M=i_{1*}^{(n)}\mathcal{F}(B,\mathrm{id})\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}((B\otimes_A B)/I^{n+1},p^{(n)})),\\ \mathcal{F}(i_2^{(n)})\colon\quad & i_{2*}^{(n)}M=i_{2*}^{(n)}\mathcal{F}(B,\mathrm{id})\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}((B\otimes_A B)/I^{n+1},p^{(n)})).\end{aligned}$$

令 $\epsilon_n:=\mathcal{F}(i_2^{(n)})^{-1}\circ\mathcal{F}(i_1^{(n)})\colon i_{1*}^{(n)}M\xrightarrow{\sim}i_{2*}^{(n)}M$. 直接验证知这些 ϵ_n 为 M 的一个分层.

给定 M 的分层 $\epsilon_n(n\geq 0)$. 设 (C,φ) 为 B 的一个幂零加厚, 并且 $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^{n+1}=0$. 设 $s_1,s_2\colon B\longrightarrow C$ 为两个截面, 则由前面的讨论得到如下 A-代数同态的交换图表



如果还有 $(\operatorname{Ker}\varphi)^{m+1}=0$, 并且 $m\leq n$, 则有交换图表

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{\Psi(s_1,s_2)^{(m)}} & (B\otimes_A B)/I^{m+1} \\ & \nwarrow^{\Psi(s_1,s_2)^{(n)}} & \uparrow{\scriptstyle \pi} \\ & & (B\otimes_A B)/I^{n+1} \end{array}$$

其中 π 为自然商同态. 这样由 B/A-晶体的定义可知

$$\Psi(s_1,s_2)_*^{(n)}\epsilon_n=\Psi(s_1,s_2)_*^{(m)}\epsilon_m\colon s_{1*}M\xrightarrow{\sim}s_{2*}M.$$

我们将这个不依赖于 n 的同构记为 $\Psi(s_1,s_2)_*\epsilon$. 由分层的定义可知对 (C,φ) 的任意三个截面 s_1,s_2,s_3, 有交换图表:

$$\begin{array}{ccc} & s_{1*}M & \\ {\scriptstyle \Psi(s_1,s_2)_*\epsilon}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \Psi(s_1,s_3)_*\epsilon} \\ s_{2*}M & \xrightarrow{\Psi(s_2,s_3)_*\epsilon} & s_{3*}M \end{array}$$

现在对 B 的每个幂零加厚 (C,φ), 我们选取一个截面 $s_{(C,\varphi)}\colon B\longrightarrow C$, 并定义 $\mathcal{F}(C,\varphi)\coloneqq s_{(C,\varphi)*}M$. 对两个幂零加厚 $(C,\varphi),(D,\psi)$ 以及任意 $g\in\operatorname{Mor}((C,\varphi),(D,\psi))$, $g\circ s_{(C,\varphi)}$ 和 $s_{(D,\psi)}$ 均为 (D,ψ) 的截面. 从而有 D-模同构

$$\Psi(g\circ s_{(C,\varphi)},s_{(D,\psi)})_*\epsilon\colon g_*\mathcal{F}(C,\varphi)=g_*s_{(C,\varphi)*}M\xrightarrow{\sim}s_{(D,\psi)*}M=\mathcal{F}(D,\psi).$$

这个 D-模同构和自然同态 $\mathcal{F}(C,\varphi)\longrightarrow g_*\mathcal{F}(C,\varphi)=\mathcal{F}(C,\varphi)\otimes_C D$, $x\longmapsto x\otimes 1$ 的复合诱导了同态 $\mathcal{F}(g)\colon\mathcal{F}(C,\varphi)\longrightarrow\mathcal{F}(D,\psi)$. 直接验证可知 $\mathcal{F}$ 为一个 B/A-晶体, 并且 $\mathcal{F}(B,\mathrm{id})\simeq M$. □

下面的命题说明了分层结构和平坦下降的联系.

命题 11.3.2 *设 $A=k$ 为域, M 为有限 B-模, 并且 M 存在一个分层. 则 M 为有限局部自由 B-模.*

证明 任取 B 的极大理想 m, 只需证明 M_m 为自由 B_m-模. 由命题 7.1.5, 只需证明 M_m 为平坦 B_m-模. 再根据平坦性的局部判别法 (定理 7.2.1), 又只需证明对任意 $i\geq 1$, M/m^iM 为平坦的 B/m^i-模. 为此, 我们考虑 B/m^i-模 M/m^i 在忠实平坦同态 $k\longrightarrow B/m^i$ 下的下降.

对 $i\geq 1$, 考虑同态 $\pi_2\colon B\otimes_k B\longrightarrow(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$, $x\otimes y\longmapsto\bar{x}\otimes\bar{y}$, 以及同态 $\pi_3\colon B\otimes_k B\otimes_k B\longrightarrow(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$, $x\otimes y\otimes z\longmapsto\bar{x}\otimes\bar{y}\otimes\bar{z}$. 由于 $k\longrightarrow B/m$ 为有限扩张 (定理 3.6.3), 可知 $(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$ 和 $(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$ 作为 k-线性空间均为有限维的. 从而可以找到充分大的 n, 使得 $\pi_2(I^{n+1})=0$,

$\pi_3(J^{n+1})=0$. 这样 π_2 和 π_3 分别诱导同态 $(B\otimes_k B)/I^{n+1}\xrightarrow{\pi_2}(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$ 和 $(B\otimes_k B\otimes_k B)/J^{n+1}\xrightarrow{\pi_3}(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$. 故 ϵ_n 诱导同构

$$\pi_{2*}i_{1*}^{(n)}M\xrightarrow{\sim}\pi_{2*}i_{2*}^{(n)}M.$$

将 $x\longmapsto x\otimes 1$ 和 $x\longmapsto 1\otimes x$ 给出的两个同态 $B/m^i\longrightarrow(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$ 分别记为 $\tilde{i}_1$, $\tilde{i}_2$, 则 $\pi_{2*}i_{1*}^{(n)}M\simeq\tilde{i}_{1*}(M/m^iM)$, $\pi_{2*}i_{2*}^{(n)}M\simeq\tilde{i}_{2*}(M/m^iM)$. 这样我们得到 $(B/m^i)\otimes_k(B/m^i)$-模同构 $\varphi\colon\tilde{i}_{1*}(M/m^iM)\xrightarrow{\sim}\tilde{i}_{2*}(M/m^iM)$. 由分层所满足的相容性条件 $i_{13*}^{(n)}\epsilon_n=i_{23*}^{(n)}\epsilon_n\circ i_{12*}^{(n)}\epsilon_n$ 可知 φ 满足忠实平坦下降定理 7.4.2 中的条件, 从而应用该定理可知存在 k-线性空间 V, 使得 $M/m^iM\simeq V\otimes_k(B/m^i)$. 故 M/m^iM 为平坦 B/m^i-模. □

注记 11.3.1 从证明过程可以看到, 命题 11.3.2 成立的条件并不要求 B/A 光滑, 只需 B 为有限生成 A-代数即可.

为了利用11.2 节的框架进一步考察分层结构, 我们需要分析 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 和 $(B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1}$ 的结构并验证其满足条件 11.2.1. 从现在起直到本节结束, 我们设 B/A 存在一组平展坐标系 $b_1,\dots,b_r$, 并引入如下记号: 对 $i=1,\dots,r$,

$$\begin{aligned}
\xi_i &\coloneqq b_i\otimes 1-1\otimes b_i\in B\otimes_A B,\\
\zeta_i &\coloneqq b_i\otimes 1\otimes 1-1\otimes b_i\otimes 1\in B\otimes_A B\otimes_A B,\\
\zeta_i' &\coloneqq 1\otimes b_i\otimes 1-1\otimes 1\otimes b_i\in B\otimes_A B\otimes_A B,\\
\zeta_i'' &\coloneqq b_i\otimes 1\otimes 1-1\otimes 1\otimes b_i\in B\otimes_A B\otimes_A B.
\end{aligned}$$

命题 11.3.3 (i) 对任意 $n\geq 0$, 对任意 $k=1,2$, 通过 $i_k^{(n)}\colon B\longrightarrow(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 将 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 看作 B-模, 则 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 是自由 B-模, 并且一组基为 $\left\{\xi_1^{a_1}\dots\xi_r^{a_r}\mid a_j\geq 0,\sum_{j=1}^r a_j\leq n\right\}$.

(ii) 对任意 $n\geq 0$, 对任意 $k=1,2,3$, 通过 $j_k^{(n)}\colon B\longrightarrow(B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1}$ 将 $(B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1}$ 看作 B-模, 则 $(B\otimes_A B\otimes_A B)/J^{n+1}$ 是自由 B-模, 并且一组基为 $\left\{\zeta_1^{a_1}\dots\zeta_r^{a_r}\zeta_1'^{c_1}\dots\zeta_r'^{c_r}\mid a_j\geq 0,c_j\geq 0,\sum_{j=1}^r(a_j+c_j)\leq n\right\}$.

证明 令 $\tilde{B}\coloneqq A[x_1,\dots,x_r]$ 为多项式环. 记 $\tilde{I}$ 为 A-代数同态 $\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}\longrightarrow\tilde{B}$, $x\otimes y\longmapsto xy$ 的核, $\tilde{J}$ 为 A-代数同态 $\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}\longrightarrow\tilde{B}$, $x\otimes y\otimes z\longmapsto xyz$ 的核. 定

义如下记号: 对 $i=1,\dots,r$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_i &\coloneqq x_i\otimes 1-1\otimes x_i\in \tilde{B}\otimes_A \tilde{B},\\
\tilde{\zeta}_i &\coloneqq x_i\otimes 1\otimes 1-1\otimes x_i\otimes 1\in \tilde{B}\otimes_A \tilde{B}\otimes_A \tilde{B},\\
\tilde{\zeta}'_i &\coloneqq 1\otimes x_i\otimes 1-1\otimes 1\otimes x_i\in \tilde{B}\otimes_A \tilde{B}\otimes_A \tilde{B},\\
\tilde{\zeta}''_i &\coloneqq x_i\otimes 1\otimes 1-1\otimes 1\otimes x_i\in \tilde{B}\otimes_A \tilde{B}\otimes_A \tilde{B}.
\end{aligned}$$

在 A-代数同构 $\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}\xrightarrow{\sim} A[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]$, $x_i\otimes 1\mapsto x_i$, $1\otimes x_i\mapsto y_i$ 下, $\tilde{I}$ 对应到 $A[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]=A[x_1,\dots,x_r,x_1-y_1,\dots,x_r-y_r]$ 中的理想 $(x_1-y_1,\dots,x_r-y_r)$. 由此可以看到, $\tilde{I}$ 作为 $\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}$-模由 $\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_r$ 生成, 并且对任意 $i\geq 0$, $\tilde{I}^i/\tilde{I}^{i+1}$ 为自由 $(\tilde{B}\otimes_A\tilde{B})/\tilde{I}=\tilde{B}$-模, 一组基为 $\left\{\tilde{\xi}_1^{a_1}\dots\tilde{\xi}_r^{a_r}\mid a_j\geq 0,\sum\limits_{j=1}^r a_j=i\right\}$. 同理可知 $\tilde{J}$ 作为 $\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}$-模由 $\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r,\tilde{\zeta}'_1,\dots,\tilde{\zeta}'_r$ 生成, 并且对任意 $i\geq 0$, $\tilde{J}^i/\tilde{J}^{i+1}$ 是自由 $(\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}\otimes_A\tilde{B})/\tilde{J}=\tilde{B}$-模, 一组基为 $\left\{\tilde{\zeta}_1^{a_1}\dots\tilde{\zeta}_r^{a_r}\tilde{\zeta}_1'^{c_1}\dots\tilde{\zeta}_r'^{c_r}\mid a_j\geq 0,c_j\geq 0,\sum\limits_{j=1}^r(a_j+c_j)=i\right\}$. 由命题 10.3.2, A-代数同态 $\tilde{B}\xrightarrow{\varphi} B$, $x_i\longmapsto b_i$ 为平展同态, 并且 $\varphi(\tilde{\xi}_i)=\xi_i$, $\varphi(\tilde{\zeta}_i)=\zeta_i$, $\varphi(\tilde{\zeta}'_i)=\zeta'_i$, $\varphi(\tilde{\zeta}''_i)=\zeta''_i$, $\forall\, i=1,\dots,r$.

(i): 记 $P=B\otimes_A B$, $\tilde{P}=\tilde{B}\otimes_A\tilde{B}$. 则有交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & P & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0\\
 & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{I} & \longrightarrow & \tilde{P} & \longrightarrow & \tilde{B} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 φ_2 为同态 $\tilde{P}\longrightarrow P$, $x\otimes y\longmapsto\varphi(x)\otimes\varphi(y)$. 由 φ 平展可以看到 φ_2 也是平展同态.

由命题 10.1.5 中的计算可以看到 I/I^2 作为 B-模由 $\xi_1,\dots,\xi_r$ 生成. 任取 P 的包含 I 的素理想 m, 并令 $\tilde{m}\coloneqq m\cap\tilde{P}=\varphi_2^{-1}(m)$. 则在局部环 P_m 中,

$$IP_m=(\xi_1,\dots,\xi_r)+I^2P_m\subset(\xi_1,\dots,\xi_r)+mIP_m.$$

从而由 Nakayama 引理和 $\tilde{I}=(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_r)$ 知 $IP_m=(\xi_1,\dots,\xi_r)P_m=\tilde{I}P_m$. 再由 $\tilde{P}_{\tilde{m}}\longrightarrow P_m$ 平坦知对任意 $i\geq 0$, $(\tilde{I}P_m)^i\simeq(\tilde{I}\tilde{P}_{\tilde{m}})^i\otimes_{\tilde{P}_{\tilde{m}}}P_m$, 从而有同构

$$\frac{(IP_m)^i}{(IP_m)^{i+1}}\simeq\frac{(\tilde{I}\tilde{P}_{\tilde{m}})^i}{(\tilde{I}\tilde{P}_{\tilde{m}})^{i+1}}\otimes_{\tilde{P}_{\tilde{m}}}P_m\simeq\frac{(\tilde{I}\tilde{P}_{\tilde{m}})^i}{(\tilde{I}\tilde{P}_{\tilde{m}})^{i+1}}\otimes_{\tilde{P}_{\tilde{m}}/\tilde{I}P_m}(P_m/IP_m).$$

再由 $\tilde{I}^i/\tilde{I}^{i+1}$ 为自由 $\tilde{B}$-模, 并且一组基为 $\left\{\tilde{\xi}_1^{a_1}\dots\tilde{\xi}_r^{a_r}\mid a_j\geq 0,\sum\limits_{j=1}^r a_j=i\right\}$, 可知

$(IP_m)^i/(IP_m)^{i+1}$ 为自由 $P_m/IP_m = B_m$-模, 并且一组基为 $\left\{\xi_1^{a_1}\dots\xi_r^{a_r} \mid a_j \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{r} a_j = i\right\}$. 利用短正合列

$$0 \longrightarrow (IP_m)^i/(IP_m)^{i+1} \longrightarrow P_m/(IP_m)^{i+1} \longrightarrow P_m/(IP_m)^i \longrightarrow 0,$$

并对 i 从 0 开始进行归纳, 不难得到对任意 $n \geq 0$, $P_m/(IP_m)^{n+1}$ 是自由 B_m-模 (通过 $i_1^{(n)}$ 或 $i_2^{(n)}$), 并且一组基为 $\left\{\xi_1^{a_1}\dots\xi_r^{a_r} \mid a_j \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{r} a_j \leq n\right\}$. 由于 m 可以任取 P 中包含 I 的素理想 (一一对应于 $P/I = B$ 的素理想), 可知 (i) 成立.

(ii): 与 (i) 的证明类似, 利用 $\tilde{J}^i/\tilde{J}^{i+1}$ 是自由 $\tilde{B}$-模, 并且一组基为

$$\left\{\tilde{\zeta}_1^{a_1}\dots\tilde{\zeta}_r^{a_r}\tilde{\zeta}_1'^{c_1}\dots\tilde{\zeta}_r'^{c_r} \mid a_j \geq 0, c_j \geq 0, \sum_{j=1}^{r}(a_j + c_j) = i\right\},$$

再利用平展同态 $\tilde{B} \longrightarrow B$ 即可得到 B 上相应的结果. □

上述命题说明通过 $i_2^{(n)}$, $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{\xi^K :\mid K \mid\leq n\}$. 这样有映射 $D_K^{(n)}\colon B \longrightarrow B$ ($\mid K \mid\leq n$), 使得对任意 $b \in B$, 在 $(B \otimes_A B)/I^{n+1}$ 中有:

$$b \otimes 1 = \sum_{|K|\leq n} \xi^K \cdot (1 \otimes D_K^{(n)}(b)). \tag{11.3–1}$$

同时不难看到, 对 $m \leq n$, 对任意 K 满足 $\mid K \mid\leq m$, 有 $D_K^{(m)} = D_K^{(n)}$. 这样得到 $D_K^{(n)}$ 不依赖于 n, 从而我们将其直接记为 D_K. 由定义可知这与 (11.2–1) 是一致的. 利用定理 11.2.1, 可以得到如下命题.

命题 11.3.4 设 M 为 B-模. 则 M 上的分层结构 $\epsilon_n (n \geq 0)$ 一一对应到满足如下条件的一族加法群同态 $\theta_K\colon M \longrightarrow M$, 其中 K 遍历 r 重指标集 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r \coloneqq \{(a_1,\dots,a_r) \mid a_j \geq 0, \forall\, j = 1,\dots,r\}$:

(i) $\theta_0 = \mathrm{id}$.

(ii) $\forall\, K'' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\forall\, x \in M$, $\forall\, b \in B$, 有 $\theta_{K''}(bx) = \sum\limits_{(K,K')\in S} D_{K'}(b)\theta_K(x)$, 其中 $S \coloneqq \{(K,K') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid K + K' = K''\}$.

(iii) $\forall\, K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\forall\, K' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\binom{K+K'}{K}\, \theta_{K+K'} = \theta_{K'} \circ \theta_K$.

并且该对应由下式确定: $\forall\, n \geq 0$, $\forall\, x \in M$, $\epsilon_n(x \otimes 1) = \sum\limits_{|K|\leq n} \theta_K(x) \otimes \xi^K$.

证明 给定 M 上的分层 $\epsilon_n (n \geq 0)$, 对 $x \in M$, 展开式 $\epsilon_n(x \otimes 1) = \sum\limits_{|K|\leq n} \theta_K^{(n)}(x) \otimes \xi^K$ 给出了映射 $\theta_K^{(n)}\colon M \longrightarrow M$. 对 $m \leq n$, 由分层定义中 ϵ_m 和 ϵ_n 的相容性不难看到当 $\mid K \mid\leq m$ 时有 $\theta_K^{(m)} = \theta_K^{(n)}$. 从而 $\theta_K^{(n)}$ 不依赖于 n 的选取, 我们将其直接记为 θ_K. 由

命题 11.3.3 可知对每个 $n \geq 0$, 条件 11.2.1 均成立, 从而应用定理 11.2.1 即知 θ_K 满足 (i), (ii), (iii).

反之, 给定满足 (i), (ii), (iii) 的一族加法群同态 $\theta_K \colon M \longrightarrow M$. 对每个 $n \geq 0$, 我们定义如下映射

$$\begin{aligned} \epsilon_n \colon i_{1*}^{(n)} M &\longrightarrow i_{2*}^{(n)} M \\ x \otimes t &\longmapsto \sum_{|K| \leq n} \theta_K(x) \otimes (\xi^K t) \end{aligned}$$

其中 $x \in M$, $t \in (B \otimes_A B)/I^{n+1}$. 再利用定理 11.2.1可以看到这些 ϵ_n $(n \geq 0)$ 给出了 M 的一个分层. □

11.3.2 微分算子

下面更加详细地研究算子 D_K.

命题 11.3.5 D_K 满足如下关系:

(i) $D_0 = \mathrm{id}$.

(ii) $\forall\, K'' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\forall\, x, y \in B$, 有 $D_{K''}(xy) = \sum\limits_{K+K'=K''} D_{K'}(x) D_K(y)$.

(iii) $\forall\, (K, K') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, 有 $\binom{K+K'}{K} D_{K+K'} = D_{K'} \circ D_K$.

证明 由命题 11.2.4 即得. □

设 $\partial_1, \ldots, \partial_r \in \mathrm{Der}_A(B) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, B)$ 为自由 B-模 $\Omega_{B/A}$ 的基 $\mathrm{d}\, b_1, \ldots, \mathrm{d}\, b_r$ 的对偶基, 即其满足 (11.1–3). 以下命题说明: 对于 $K = (a_1, \ldots, a_r)$, 可以将 D_K 理解为微分算子 $\frac{1}{K!}\partial_1^{a_1} \cdots \partial_r^{a_r}$, 或者说 Taylor 展开的系数.

命题 11.3.6 记 e_i 为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ 中第 i 位是 1, 其它位置是 0 的元素. 则

(i) $\forall\, 1 \leq i \leq r$, 有 $D_{e_i} = \partial_i$.

(ii) $\forall\, 1 \leq i, j \leq r$, 有 $D_{e_i} D_{e_j} = D_{e_j} D_{e_i}$.

(iii) $\forall\, K = (a_1, \ldots, a_r)$, $L = (c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, 有 $D_K(\prod\limits_{i=1}^r b_i^{c_i}) = \binom{L}{K} \prod\limits_{i=1}^r b_i^{c_i - a_i}$.

(iv) 设 $K = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, 并且 $a_1! \cdots a_r! \in A^*$, 则

$$D_K = \frac{1}{a_1! \cdots a_r!} \partial_1^{a_1} \cdots \partial_r^{a_r}.$$

证明 (i): 任取 $b \in B$. 在 $\Omega_{B/A}$ 中有 $\mathrm{d}\, b = \sum\limits_{i=1}^r (\partial_i b)\, \mathrm{d}\, b_i$. 注意到 $\Omega_{B/A} \xrightarrow{\sim} I/I^2$, $\mathrm{d}\, b \longmapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$ 为同构 (命题 10.1.5), 从而得到 $I/I^2 = \bigoplus\limits_{i=1}^r B\xi_i$ 中的展开式 $b \otimes 1 - 1 \otimes b = \sum\limits_{i=1}^r (\partial_i b)\xi_i$. 再利用 D_K 的定义即得 $D_{e_i} = \partial_i$.

(ii): 在命题 11.3.5 中取 $K = e_i$, $K' = e_j$, $i \neq j$, 则得到 $\binom{e_i + e_j}{e_i} D_{e_i + e_j} = D_{e_i} D_{e_j}$.

由 $\binom{e_i+e_j}{e_i}=1$ 知 $D_{e_i+e_j}=D_{e_i}D_{e_j}$. 同理 $D_{e_i+e_j}=D_{e_j}D_{e_i}$. 故 $D_{e_i}D_{e_j}=D_{e_j}D_{e_i}$. 再由 (i) 即得.

(iii): 由 D_K 的定义(11.3–1) 以及在环 $B\otimes_A B$ 中的如下计算即得:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^r b_i^{c_i}\otimes 1&=\prod_{i=1}^r(b_i\otimes 1)^{c_i}=\prod_{i=1}^r(\xi_i+1\otimes b_i)^{c_i}=\prod_{i=1}^r\sum_{j=0}^{c_i}\binom{c_i}{j}\xi_i^j\cdot(1\otimes b_i^{c_i-j})\\&=\sum_{j_1=0}^{c_1}\cdots\sum_{j_r=0}^{c_r}\xi_1^{j_1}\dots\xi_r^{j_r}\binom{c_1}{j_1}\dots\binom{c_r}{j_r}\cdot 1\otimes(b_1^{c_1-j_1}\dots b_r^{c_r-j_r}).\end{aligned}$$

(iv): 注意到 $D_{e_1},\dots,D_{e_r}$ 两两交换, 并且 $K=\sum_{i=1}^r a_ie_i$. 由命题 11.3.5, (iii) 可知 $D_K=\frac{1}{a_1!\cdots a_r!}D_{e_1}^{a_1}\cdots D_{e_r}^{a_r}$. 再由 (i) 即得 $D_K=\frac{1}{a_1!\cdots a_r!}\partial_1^{a_1}\cdots\partial_r^{a_r}$. □

注记 11.3.2 设 A 为 $\mathbb{C}$-代数, $B=A[x_1,\dots,x_r]$ 为多项式环. 取 $b_i=x_i$, 则上述命题说明对任意 $K=(a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, 有 $D_K=\frac{1}{a_1!\cdots a_r!}\frac{\partial^{|K|}}{\partial {x_1}^{a_1}\dots\partial {x_r}^{a_r}}$ 为偏微分算子. 由此, B 相对于 A 的 n 阶偏微分算子均可表示为

$$P=\sum_{|K|\leq n}f_KD_K\colon B\longrightarrow B.$$

其中 $f_K\in B$. 由展开式 (11.3–1), 这个偏微分算子 $B\xrightarrow{P}B$ 等同于如下复合映射:

$$B\xrightarrow{i_1^{(n)}}(B\otimes_A B)/I^{n+1}\xrightarrow{\psi_P}B.$$

其中 ψ_P 为通过 $i_2^{(n)}$ 将 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 看作自由 B-模之后, 由 $\xi^K\longmapsto f_K$ 决定的 B-模同态.

通过上面例子的讨论, 我们可以给出微分算子的定义.

定义 11.3.3 一个映射 $P\colon B\longrightarrow B$ 称为 (相对于 A 的) 阶不超过 n 的**微分算子**, 如果 P 可以写为如下复合映射:

$$B\xrightarrow{i_1^{(n)}}(B\otimes_A B)/I^{n+1}\xrightarrow{\psi_P}B.$$

其中 ψ_P 为通过 $i_2^{(n)}$ 将 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 看作 B-模之后的一个 B-模同态.

注记 11.3.3 上述微分算子的定义中并不需要 A 为 Noether 环以及 B/A 光滑的假设. 对于更一般的模之间的微分算子, 见 [10, §16] 或 [5, §2].

记全体微分算子的集合为 $\mathrm{Diff}_{B/A}$. 不难验证, 对每个 $f\in B$, 映射 $\varphi_f\colon B\longrightarrow B$, $x\longmapsto fx$ 是零阶微分算子, 并且任意零阶微分算子都是这样的形式. 由 B-模的直和分

解 $(B\otimes_A B)/I^2\simeq I/I^2\oplus B$ 可以看到, 一阶微分算子的全体恰为 A-导子集合 $\mathrm{Der}_A(B)$. 由定义, 每个微分算子 P 均为 A-线性映射, 并且对 $f\in B$, 复合映射 $fP\colon B\longrightarrow B$, $x\longmapsto fP(x)$ 还是微分算子. 由此, 通过 $P\longmapsto fP$, $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 成为 B-模. 如不特别说明, 我们总是用这种方式将 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 看作 B-模.

命题 11.3.7 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{D_K\mid K\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}\}$.

证明 对任意 n, 由命题 11.3.3, $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 通过 $i_2^{(n)}$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{\xi^K\mid K\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0},\ |K|\leq n\}$. 设 $\{u_K\colon (B\otimes_A B)/I^{n+1}\longrightarrow B\mid K\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0},\ |K|\leq n\}$ 为对偶基, 即每个 u_K 均为 B-模同态, 并且对任意 $K'\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, $|K'|\leq n$, 有

$$u_K(\xi^{K'})=\begin{cases}1, & K=K';\\ 0, & K\neq K'.\end{cases}$$

设 P 为阶不超过 n 的微分算子, 则 $P=\psi_P\circ i_1^{(n)}$, 其中 $\psi_P\colon (B\otimes_A B)/I^{n+1}\longrightarrow B$ 为 B-模同态. 故存在唯一的一组系数 $f_K\in B$, 使得 $\psi_P=\sum\limits_{|K|\leq n} f_K u_K$. 从而得到 $P=\sum\limits_{|K|\leq n} f_K D_K$. 这就证明了 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 作为 B-模可以由 $\{D_K\mid K\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}\}$ 生成.

另一方面, 对任意 n, 设 $f_K\in B$ 使得 $\sum\limits_{|K|\leq n} f_K D_K$ 作为微分算子为 0. 注意到 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 通过 $i_2^{(n)}$ 作为 B-模的一组生成元是 $\mathrm{Im}\, i_1^{(n)}$, 由此可知 $\sum\limits_{|K|\leq n} f_K u_K=0$, 故 $f_K=0$, $\forall\ |K|\leq n$. 这就证明了 $\{D_K\mid K\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}\}$ 是 B-线性无关的, 因此是一组基. □

命题 11.3.8 设 P_1 为阶不超过 n 的微分算子, P_2 为阶不超过 m 的微分算子, 则复合算子 $P_1\circ P_2$ 为阶不超过 $m+n$ 的微分算子.

证明 由命题 11.3.7, 存在 f_K, $g_L\in B$, 使得

$$P_1=\sum_{|K|\leq n} f_K D_K,\quad P_2=\sum_{|L|\leq m} g_L D_L.$$

由命题 11.3.5, 每个 $D_K\circ g_L$ 为阶不超过 $|K|$ 的微分算子, 每个 $D_K\circ D_L$ 为阶不超过 $|K|+|L|$ 的微分算子. 由此即得结论. □

由此命题, $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 在算子的复合下成为一个 (不一定交换的) 环. 通过将 B 中的元素看作 0 阶微分算子, 我们有单的环同态 $B\hookrightarrow\mathrm{Diff}_{B/A}$. 下面的万有性质说明, 命题 11.3.5 中的关系可以生成 D_K 之间的所有关系.

命题 11.3.9 设 C 是一个不一定交换的环, 并且给定一个环同态 $B\longrightarrow C$. 对每个 $K\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, 给定一个元素 $c_K\in C$, 使其满足如下关系:

(i) $c_0 = \mathrm{id}$.
(ii) $\forall\ K'' \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0},\ \forall\ b \in B$, 有 $c_{K''} \cdot b = \sum\limits_{K+K'=K''} D_K(b) \cdot c_{K'}$.
(iii) $\forall\ (K, K') \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, 有 $\binom{K+K'}{K} c_{K+K'} = c_{K'} \cdot c_K$.
那么存在唯一的环同态 $\psi\colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow C$, 使得 $\forall\ K \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, $\psi(D_K) = c_K$, 并且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{B/A} & \xrightarrow{\ \psi\ } & C \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & B & \end{array}$$

证明 由命题 11.3.7, 每个 $P \in \mathrm{Diff}_{B/A}$ 都能用唯一的方式写为有限和 $P = \sum\limits_K f_K D_K$, 其中 $f_K \in B$. 令 $\psi(P) := \sum\limits_K f_K c_K$, 则得到良好定义的映射 $\psi\colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow C$. 利用命题 11.3.5 不难看到 ψ 为满足要求的环同态. 其唯一性是显然的. □

定义 11.3.4 设 M 为一个 B-模. M 的一个 D-模结构是指一个环同态 $\psi\colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{B/A} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathrm{End}_A(M) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & B & \end{array}$$

带一个 D-模结构的 M 也称为一个 **D-模**.

现在可以将以上讨论总结为如下命题.

定理 11.3.1 设 M 为 B-模. 则以下结构存在 (同构意义下的) 一一对应:
(i) 满足 $\mathcal{F}(B, \mathrm{id}) \simeq M$ 的 B/A-晶体 $\mathcal{F}$.
(ii) M 的分层 ϵ_n $(n \geq 0)$.
(iii) 满足如下条件的一族加法群同态 $\theta_K\colon M \longrightarrow M$, 其中 K 遍历 $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$:
  (1) $\theta_0 = \mathrm{id}$.
  (2) $\forall\ K'' \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, $\forall\ x \in M$, $\forall\ b \in B$, 有 $\theta_{K''}(bx) = \sum\limits_{(K,K')\in S} D_{K'}(b)\theta_K(x)$, 其中 $S := \{(K, K') \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \mid K + K' = K''\}$.
  (3) $\forall\ K \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0},\ \forall\ K' \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, $\binom{K+K'}{K} \theta_{K+K'} = \theta_{K'} \circ \theta_K$.
(iv) M 的 D-模结构.
其中 (ii) 和 (iii) 的对应由下式确定: $\forall\ n \geq 0$, $\forall\ x \in M$, $\epsilon_n(x \otimes 1) = \sum\limits_{|K|\leq n} \theta_K(x) \otimes \xi^K$.
(iii) 和 (iv) 的对应为: 给定 (iii) 中的 θ_K, 那么 D-模结构为 $\psi\colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$, $D_K \longmapsto \theta_K$.

证明　(i) 和 (ii) 的对应由命题 11.3.1 给出. (ii) 和 (iii) 的对应由命题 11.3.4 得到. 在命题 11.3.9 中取 $C = \mathrm{End}_A(M)$, 即得到 (iii) 和 (iv) 的对应. □

例 11.3.1　设 $B \longrightarrow \tilde{B}$ 为平展同态, 则 $\tilde{B}/A$ 也是光滑的, 并且 $b_1, \ldots, b_r$ 看作 $\tilde{B}$ 中的元素时也是 $\tilde{B}/A$ 的一组平展坐标系. 对 $K \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, 记 $\tilde{D}_K \in \mathrm{Diff}_{\tilde{B}/A}$ 为相应的微分算子. 由展开式 (11.3–1) 不难看到, 对任意 $b \in B$, 在 $\tilde{B}$ 中成立 $\tilde{D}_K(b) = D_K(b)$. 再由命题 11.3.9 可知 $D_K \longmapsto \tilde{D}_K$ 给出了一个环同态 $\mathrm{Diff}_{B/A} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Diff}_{\tilde{B}/A}$. 通过该同态, 每个 $\tilde{B}$-模 $\tilde{M}$ 的 D-模结构 $\mathrm{Diff}_{\tilde{B}/A} \xrightarrow{\psi} \mathrm{End}_A(\tilde{M})$ 均给出一个其作为 B-模的 D-模结构 $\mathrm{Diff}_{B/A} \xrightarrow{\psi\circ\varphi} \mathrm{End}_A(\tilde{M})$. 特别地, $\tilde{B}$ 作为 B-模有一个自然的 D-模结构: $\mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow \mathrm{End}_A(\tilde{B})$, $D \longmapsto \varphi(D)$.

11.3.3 特征 0 情形

当 A 为 $\mathbb{Q}$-代数时, 上一小节的一些命题可以得到简化.

命题 11.3.10　设 A 为 $\mathbb{Q}$-代数, C 是一个不一定交换的环, 并且给定一个环同态 $B \longrightarrow C$. 给定两两交换的元素 $c_1, \ldots, c_r \in C$, 满足 $\forall\, 1 \leq i \leq r$, $\forall\, b \in B$, $c_i b = b c_i + \partial_i(b)$. 则存在唯一的环同态 $\psi\colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow C$, 使得 $\forall\, i$, $\psi(\partial_i) = c_i$, 并且下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{B/A} & \xrightarrow{\ \psi\ } & C \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & B & \end{array}$$

证明　对每个 $K = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, 令 $c_K \coloneqq \frac{1}{K!} \prod_{i=1}^{r} c_i^{a_i} \in C$. 可以验证这些 c_K 满足命题 11.3.9 中的关系, 由此即得 ψ, 使得 $\psi_K(D_K) = c_K$. 这就证明了存在性. 由 $D_K = \frac{1}{K!} \prod_{i=1}^{r} \partial_i^{a_i}$, 唯一性是显然的. □

此时 D-模结构等价于可积联络结构, 即有下面的命题.

命题 11.3.11　设 A 为 $\mathbb{Q}$-代数, M 为 B-模. 则 M 的 D-模结构一一对应到 M 的可积联络. 对应方式为: 给一个 D-模结构 $\psi\colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$, 那么相应的可积联络 $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 为 $\nabla(x) = \sum_{i=1}^{r} \psi(\partial_i)(x) \otimes \mathrm{d}\, b_i$, $\forall\, x \in M$.

证明　由命题 11.1.7, M 的可积联络与满足如下条件的 r 元有序组 $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ 一一对应:

(i) $\forall\, 1 \leq i \leq r$, $\theta_i \in \mathrm{End}_A(M)$, 并且 $\forall\, b \in B$, $\forall\, x \in M$, 有 $\theta_i(bx) = (\partial_i b)x + b\theta_i(x)$.

(ii) $\theta_1, \ldots, \theta_r$ 两两交换.

在命题 11.3.10 中取 $C = \mathrm{End}_A(M)$, 则 M 的 D-模结构也一一对应到上述 r 元有序组. 由此即得结论. □

作为命题 11.3.2, 定理 11.3.1 和命题 11.3.11 的直接推论, 我们得到如下命题. 其几何意义是说具有可积联络的凝聚模层存在充分多的平坦截面.

推论 11.3.1 设 $A=k$ 为特征 0 的域, M 为有限 B-模, 并且 M 存在一个可积联络. 则 M 为有限局部自由的 B-模.

Grothendieck 从晶体和可积联络出发, 发展出了晶体上同调理论. 在该理论中为了处理特征 p 的情形, 需要对形如 $\frac{x^n}{n!}$ 的符号给出合理定义. 具体可见 [5, 17, 30].

11.3.4 特征 p 情形 本小节我们继续保持前面的设定和记号 (B/A 光滑, $b_1,\dots,b_r$ 为一组平展坐标等), 同时我们设 A 为特征 p 的环. 对每个 $n\geq 0$, 定义指标集 $T_n := \{(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid 0\leq k_i\leq p^n-1,\ \forall\ 1\leq i\leq r\}$. 令 B_n 为 B 的由 $\{b^{p^n}\mid b\in B\}$ 生成的 A-子代数. 则 $B_0=B$, 根据命题 10.4.5, 对每个 $n\geq 1$, 有 A-代数同构 $B_n\simeq B_{n-1}^{(p)}$, 并且在这个同构下, 自然的包含同态 $B_{n-1}\hookrightarrow B_n$ 等同到相对 Frobenius 同态 $F_{B_{n-1}/A}$. 因此 (命题 10.4.4), B_n/A 光滑, 并且一组平展坐标为 $b_1^{p^n},\dots,b_r^{p^n}$. 这样得到如下卡氏图表:

$$\begin{array}{ccc} B & \hookleftarrow & B_n \\ \uparrow{\scriptstyle\psi} & \square & \uparrow{\scriptstyle\psi_1} \\ A[x_1,\dots,x_r] & \xleftarrow{x_i^{p^n}\leftarrow x_i} & A[x_1,\dots,x_r] \end{array} \tag{11.3–2}$$

其中 A-代数同态 ψ, ψ_1 均为平展同态, 满足 $\psi(x_i)=b_i$, $\psi_1(x_i)=b_i^{p^n}$. 由此知 $B_n\hookrightarrow B$ 是忠实平坦的. 为了具体写出 B 到 B_n 的下降资料, 我们考察 $B\otimes_{B_n}B$ 和 $B\otimes_{B_n}B\otimes_{B_n}B$ 的结构.

命题 11.3.12 设 $n\geq 0$, 则:

(i) $\forall\ i=1,\dots,r$, 在 $B\otimes_{B_n}B$ 中有 $\xi_i^{p^n}=0$, 在 $B\otimes_{B_n}B\otimes_{B_n}B$ 中有 $\zeta_i^{p^n}=\zeta_i'^{p^n}=\zeta_i''^{p^n}=0$.

(ii) 对 $k=1,2$, 通过 i_k 将 $B\otimes_{B_n}B$ 看作 B-模, 那么 $B\otimes_{B_n}B$ 为自由 B-模, 并且 $\{\xi^K\mid K\in T_n\}$ 为一组基.

(iii) 对 $k=1,2,3$, 通过 j_k 将 $B\otimes_{B_n}B\otimes_{B_n}B$ 看作 B-模, 那么 $B\otimes_{B_n}B\otimes_{B_n}B$ 为自由 B-模, 并且 $\{\zeta^K\zeta'^{K'}\mid (K,K')\in T_n\times T_n\}$ 为一组基.

证明 由卡氏图表(11.3–2) 可得 B_n-代数同构

$$B_n[x_1,\dots,x_r]/(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n})\xrightarrow{\sim}B,\quad x_i\longmapsto b_i.$$

这给出 B_n-代数同构 $\varphi\colon B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]/I\xrightarrow{\sim}B\otimes_{B_n}B$, 其中

$$I=(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n},y_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,y_r^{p^n}-b_r^{p^n}),$$

并且该同构满足 $\varphi(x_i)=b_i\otimes 1$, $\varphi(y_i)=1\otimes b_i$. 由 A 的特征为 p 可知

$$I=(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n},(x_1-y_1)^{p^n},\dots,(x_r-y_r)^{p^n}).$$

由于对每个 $i=1,\dots,r$, $\varphi(x_i-y_i)=\xi_i$, 故知在 $B\otimes_{B_n}B$ 中有 $\xi_i^{p^n}=0$. 注意到 $B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]/I$ 可以写作

$$B_n[x_1,\dots,x_r,x_1-y_1,\dots,x_r-y_r]/(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n},(x_1-y_1)^{p^n},\dots,(x_r-y_r)^{p^n}),$$

不难看到 $B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]/I$ 为自由 $B_n[x_1,\dots,x_r]/(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n})$-模, 并且一组基为 $\left\{\prod_{i=1}^r(x_i-y_i)^{c_i}\mid 0\leq c_i\leq p^n-1,\forall\ i\right\}$. 利用同构 φ 即知, 通过 i_1, $B\otimes_{B_n}B$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{\xi^K\mid K\in T_n\}$.

另一方面, 理想 I 也等于 $(y_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,y_r^{p^n}-b_r^{p^n},(x_1-y_1)^{p^n},\dots,(x_r-y_r)^{p^n})$, 多项式环 $B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]$ 也可写作 $B_n[y_1,\dots,y_r,x_1-y_1,\dots,x_r-y_r]$, 从而 $B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r]/I$ 也为自由 $B_n[y_1,\dots,y_r]/(y_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,y_r^{p^n}-b_r^{p^n})$-模, 并且一组基为 $\left\{\prod_{i=1}^r(x_i-y_i)^{c_i}\mid 0\leq c_i\leq p^n-1,\forall\ i\right\}$. 再利用同构 φ, 即知通过 i_2, $B\otimes_{B_n}B$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{\xi^K\mid K\in T_n\}$.

同理, 我们有 B_n-代数同构

$$\psi\colon B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_r]/J\xrightarrow{\sim}B\otimes_{B_n}B\otimes_{B_n}B,$$

其中 $J=(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n},y_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,y_r^{p^n}-b_r^{p^n},z_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,z_r^{p^n}-b_r^{p^n})$, 并且该同构满足 $\psi(x_i)=b_i\otimes 1\otimes 1$, $\psi(y_i)=1\otimes b_i\otimes 1$, $\psi(z_i)=1\otimes 1\otimes b_i$. 通过 J 的以下三个表达式

$$\begin{aligned}J&=(x_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n},(x_1-y_1)^{p^n},\dots,(x_r-y_r)^{p^n},(y_1-z_1)^{p^n},\dots,(y_r-z_r)^{p^n})\\&=(y_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,y_r^{p^n}-b_r^{p^n},(x_1-y_1)^{p^n},\dots,(x_r-y_r)^{p^n},(y_1-z_1)^{p^n},\dots,(y_r-z_r)^{p^n})\\&=(z_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,z_r^{p^n}-b_r^{p^n},(x_1-y_1)^{p^n},\dots,(x_r-y_r)^{p^n},(y_1-z_1)^{p^n},\dots,(y_r-z_r)^{p^n})\end{aligned}$$

以及多项式环的等式

$$\begin{aligned}&B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_r]\\&=B_n[x_1,\dots,x_r,x_1-y_1,\dots,x_r-y_r,y_1-z_1,\dots,y_r-z_r]\\&=B_n[y_1,\dots,y_r,x_1-y_1,\dots,x_r-y_r,y_1-z_1,\dots,y_r-z_r]\\&=B_n[z_1,\dots,z_r,x_1-y_1,\dots,x_r-y_r,y_1-z_1,\dots,y_r-z_r]\end{aligned}$$

不难看到, 将 $B_n[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_r]/J$ 分别看作三个环 $B_n[x_1,\dots,x_r]/(x_1^{p^n}-$

$b_1^{p^n},\dots,x_r^{p^n}-b_r^{p^n})$, $B_n[y_1,\dots,y_r]/(y_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,y_r^{p^n}-b_r^{p^n})$ 和 $B_n[z_1,\dots,z_r]/(z_1^{p^n}-b_1^{p^n},\dots,z_r^{p^n}-b_r^{p^n})$ 上的模时, 均为自由模, 并且一组基均可取为

$$\left\{\prod_{i=1}^{r}(x_i-y_i)^{c_i}(y_i-z_i)^{c_i'} \mid 0\le c_i,c_i'\le p^n-1,\forall\ i\right\}.$$

再利用同构 ψ 即知 (iii) 成立.

注意到对任意 $i=1,\dots,r$, $(x_i-y_i)^{p^n}$, $(y_i-z_i)^{p^n}$ 以及 $(x_i-z_i)^{p^n}=(x_i-y_i)^{p^n}+(y_i-z_i)^{p^n}$ 均在 J 中. 由同构 ψ 即知在 $B\otimes_{B_n}B\otimes_{B_n}B$ 中有 $\zeta_i^{p^n}=\zeta_i'^{p^n}=\zeta_i''^{p^n}=0$.□

命题 11.3.13 设 $n\ge 0$, 则在 $B\otimes_{B_n}B$ 中, 以下等式成立:

$$b\otimes 1=\sum_{K\in T_n}\xi^K\cdot(1\otimes D_K(b)),\ \forall\ b\in B. \tag{11.3–3}$$

证明 自然同态 $B\otimes_A B\xrightarrow{\varphi}B\otimes_{B_n}B$, $x\otimes y\longmapsto x\otimes y$ 为满同态, 其核理想 Ker 由集合

$$\left\{x^{p^n}\otimes 1-1\otimes x^{p^n}\mid x\in B\right\}$$

生成. 另一方面, 同态 $B\otimes_A B\longrightarrow B$, $x\otimes y\longmapsto xy$ 的核理想 I 由 $\left\{x\otimes 1-1\otimes x\mid x\in B\right\}$ 生成. 注意到对任意 $x\in B$, 在 $B\otimes_A B$ 中有 $x^{p^n}\otimes 1-1\otimes x^{p^n}=(x\otimes 1-1\otimes x)^{p^n}\in I^{p^n}$. 再由 Noether 性即知存在正整数 N, 使得 $I^{N+1}\subset Ker$. 这样 φ 诱导了同态

$$\psi\colon (B\otimes_A B)/I^{N+1}\longrightarrow B\otimes_{B_n}B,\ x\otimes y\longmapsto x\otimes y.$$

注意到 $\forall\ K\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^r$, 如果 $K\notin T_n$, 则 $\psi(\xi^K)=0$. 根据 D_K 的定义(11.3–1), 在 $(B\otimes_A B)/I^{N+1}$ 中成立如下等式:

$$b\otimes 1=\sum_{|K|\le N}\xi^K\cdot(1\otimes D_K(b)),\ \forall\ b\in B.$$

将 ψ 作用到该等式即得. □

由命题 11.3.12, 我们看到对于环同态 $B_n\hookrightarrow B$, 条件 11.2.1 成立 (取 $I=0$, $J=0$). 此时定理 11.2.1 转化为如下命题.

命题 11.3.14 设 $n\ge 0$, M 为 B-模. 给一个满足相容性条件 $i_{13*}\epsilon=i_{23*}\epsilon\circ i_{12*}\epsilon$ 的 $B\otimes_{B_n}B$-模同构 $\epsilon\colon i_{1*}M\xrightarrow{\sim}i_{2*}M$ 等价于给一族满足如下条件的加法群同态 $\theta_K\colon M\longrightarrow M$ $(K\in T_n)$:

(1) $\theta_0=\mathrm{id}$.

(2) $\forall\ K''\in T_n$, $\forall\ b\in B$, $\forall\ x\in M$, 有 $\theta_{K''}(bx)=\sum\limits_{K+K'=K''}D_{K'}(b)\theta_K(x)$.

(3) $\forall\ (K,K')\in T_n\times T_n$, 如果 $K+K'\in T_n$, 则 $\binom{K+K'}{K}\ \theta_{K+K'}=\theta_{K'}\circ\theta_K$, 如果 $K+K'\notin T_n$, 则 $\theta_{K'}\circ\theta_K=0$.

上述等价由展开式 $\epsilon(x\otimes 1)=\sum\limits_{K\in T_n}\theta_K(x)\otimes\xi^K$ 确定.

证明 对环同态 $B_n\hookrightarrow B$, 将条件 11.2.1 中的指标集 S_1 取为 T_n, S_2 取为 $T_n\times T_n$, 再应用定理 11.2.1 即得. □

与特征零的情形类似, 上述命题中的条件可以用 D-模的语言重新表述. 为此, 我们分析特征 p 时 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 的结构. 对任意 $n\geq 0$, 定义 $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 为 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 的由所有阶不超过 p^n-1 的微分算子生成的 A-子代数. 与 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 一样, $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 也是不一定交换的 A-代数, 并且 $B\longrightarrow\Omega_{B/A}$ 诱导了环同态 $B\longrightarrow\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$. 故 $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 也是 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 的 B-子模. 容易验证, $\mathrm{Diff}^{<0}_{B/A}=B$ 为零阶微分算子的全体, $\mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}$ 由 B 和所有导子 $\mathrm{Der}_A(B)$ 生成, 并且 $\mathrm{Diff}^{<0}_{B/A}\subset\mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}\subset\cdots\subset\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}\subset\mathrm{Diff}^{<n+1}_{B/A}\subset\ldots$, 以及 $\mathrm{Diff}_{B/A}=\bigcup\limits_{n\geq 0}\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$.

命题 11.3.15 设 $n\geq 0$.

(i) 任意 $K,K'\in T_n$, $D_{K'}\circ D_K=\begin{cases}\binom{K+K'}{K}D_{K+K'}, & \text{如果}\quad K+K'\in T_n,\\ 0, & \text{如果}\quad K+K'\notin T_n.\end{cases}$

(ii) $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 为自由 B-模, 并且一组基为 $\{D_K\mid K\in T_n\}$.

(iii) 设 $P\in\mathrm{Diff}_{B/A}$, 则 P 是 B_n-线性的 (即 $\forall\ x\in B$, $\forall\ y\in B_n$, $P(xy)=P(x)y$) $\iff P\in\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$.

证明 (i): 不难验证如下初等数论中的事实: $\forall\ K,K'\in T_n$, 如果 $K+K'\notin T_n$, 则 p 整除 $\binom{K+K'}{K}$. 从而由命题 11.3.5 即得.

(ii): 定义 $M_n:=\bigoplus\limits_{K\in T_n}B\cdot D_K\subset\mathrm{Diff}_{B/A}$. 对任意 $K=(a_1,\ldots,a_r)\in T_n$, 记 $K_i:=(0,\ldots,0,a_i,0,\ldots,0)\in T_n$ 为第 i 个位置是 a_i, 其它位置是 0 的指标. 则 $K=K_1+\cdots+K_r$, 并且由命题 11.3.5, (iii) 不难看到 $D_K=D_{K_1}\circ\cdots\circ D_{K_r}$. 由于每个 D_{K_i} 均在 $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 中, 故 $D_K\in\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$. 这说明 $M_n\subset\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$. 再由命题 11.3.7 可知 $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 作为 A-代数由 M_n 生成. 另一方面, 由 (i) 知 M_n 为 $\mathrm{Diff}_{B/A}$ 的 A-子代数. 故 $M_n=\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$.

(iii): 设 $P\in\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$, 为了证明 P 是 B_n-线性的, 由 (ii) 和命题 11.3.5, 只需证明对任意 $K\in T_n\setminus\{0\}$, 对任意 $b\in B$, 均有 $D_K(b^{p^n})=0$. 由(11.3–3) 得到 $B\otimes_{B_n}B$ 中的展开式 $b^{p^n}\otimes 1=\sum\limits_{K\in T_n}\xi^K\cdot(1\otimes D_K(b^{p^n}))$. 另一方面, $b^{p^n}\otimes 1=1\otimes b^{p^n}=\xi^0\cdot(1\otimes b^{p^n})$. 比较这两个等式即得 $D_K(b^{p^n})=0,\ \forall\ K\in T_n\setminus\{0\}$.

反之, 设 $P\in\mathrm{Diff}_{B/A}$ 是 B_n-线性的. 定义如下映射:

$$\begin{aligned}u_P\colon B\otimes_{B_n}B&\longrightarrow B\\ x\otimes y&\longmapsto P(x)y\end{aligned}$$

则通过 i_2 将 $B\otimes_{B_n}B$ 看作 B-模之后, u_P 为 B-模同态. 对任意 $x\in B$, 由命题 11.3.13 知 $x\otimes 1=\sum\limits_{K\in T_n}\xi^K\cdot(1\otimes D_K(x))$. 从而 $P(x)=u_P(x\otimes 1)=\sum\limits_{K\in T_n}u_P(\xi^K)D_K(x)$. 这说明 $P=\sum\limits_{K\in T_n}u_P(\xi^K)D_K\in \mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$. □

与命题 11.3.9 类似, $\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 满足如下万有性质.

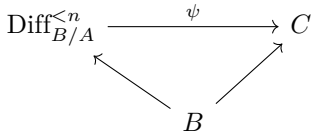
命题 11.3.16 设 $n\geq 0$, C 是一个不一定交换的环, 并且给定一个环同态 $B\longrightarrow C$. 对每个 $K\in T_n$, 给定一个元素 $c_K\in C$, 使其满足如下关系:

(i) $c_0=\mathrm{id}$.

(ii) $\forall\ K''\in T_n,\ \forall\ b\in B$, 有 $c_{K''}\cdot b=\sum\limits_{K+K'=K''}D_K(b)\cdot c_{K'}$.

(iii) $\forall\ (K,K')\in T_n\times T_n$, 有 $c_{K'}\cdot c_K=\begin{cases}\binom{K+K'}{K}\,c_{K+K'}, & \text{如果 } K+K'\in T_n,\\ 0, & \text{如果 } K+K'\notin T_n.\end{cases}$

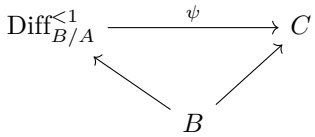
那么存在唯一的环同态 $\psi\colon \mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}\longrightarrow C$, 使得 $\forall\ K\in T_n$, $\psi(D_K)=c_K$, 并且下图交换:



证明 先证 ψ 的存在性. 由命题 11.3.15, (ii), 每个 $P\in\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$ 都能用唯一的方式写为有限和 $P=\sum\limits_{K\in T_n}f_KD_K$, 其中 $f_K\in B$. 令 $\psi(P)\coloneqq\sum\limits_{K\in T_n}f_Kc_K$, 则得到良好定义的映射 $\psi\colon \mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}\longrightarrow C$. 利用命题 11.3.5 和命题 11.3.15, (i) 不难看到 ψ 为满足要求的环同态. ψ 的唯一性是显然的. □

与特征零的情况类似, $\mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}$ 的万有性质可以简化如下.

命题 11.3.17 设 C 是一个不一定交换的环, 并且给定一个环同态 $B\longrightarrow C$. 给定两两交换的元素 $c_1,\dots,c_r\in C$, 满足 $\forall\ 1\leq i\leq r$, $\forall\ b\in B$, $c_ib=bc_i+\partial_i(b)$, 并且 $c_i^p=0$. 则存在唯一的环同态 $\psi\colon \mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}\longrightarrow C$, 使得 $\forall\ i$, $\psi(\partial_i)=c_i$, 并且下图交换:

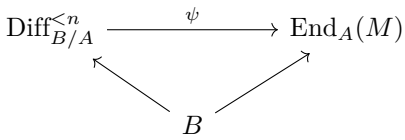


证明 对任意 $K=(a_1,\dots,a_r)\in T_1$. 由于 $0\leq a_i\leq p-1$, 故 $a_1!\dots a_r!\in A^*$. 由命题 11.3.6, (iv) 即知 $D_K=\frac{1}{a_1!\cdots a_r!}\partial_1^{a_1}\cdots\partial_r^{a_r}$. 再由 $D_K(K\in T_1)$ 为 $\mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}$ 作为 B-模的一组基可得 ψ 的唯一性.

下面再证 ψ 的存在性. 给定满足条件的 $c_i\in C$, 由于每个 $P\in\mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}$ 均唯一表

达为 $P=\sum_{K\in T_1} f_K D_K$, 其中 $f_K\in B$. 我们令 $\psi(P):=\sum_{K\in T_1} f_K \frac{1}{a_1!\cdots a_r!}c_1^{a_1}\cdots c_r^{a_r}$. 则不难验证 ψ 为满足条件的环同态. □

定义 11.3.5　设 M 为一个 B-模. M 的一个 $D^{<n}$-模结构是指一个环同态 $\psi\colon \mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}\longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$, 使得如下图表交换:

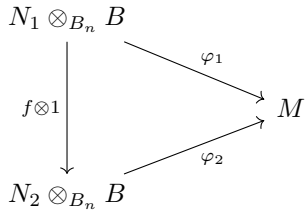


利用忠实平坦下降, 现在可以将命题 11.3.14 翻译为如下形式.

定理 11.3.2　设 $n\geq 0$, M 为 B-模. 则以下三类对象存在 (同构意义下的) 一一对应:

(i) 满足相容性条件 $i_{13*}\epsilon = i_{23*}\epsilon\circ i_{12*}\epsilon$ 的 $B\otimes_{B_n}B$-模同构 $\epsilon\colon i_{1*}M\xrightarrow{\sim} i_{2*}M$.

(ii) 二元组 (N,φ), 其中 N 为 B_n-模, $\varphi\colon N\otimes_{B_n}B\xrightarrow{\sim} M$ 为 B-模同构. 两个这样的二元组 (N_1,φ_1) 和 (N_2,φ_2) 同构定义为存在 B_n-模同构 $f\colon N_1\xrightarrow{\sim} N_2$, 使得如下图表交换:



(iii) M 的 $D^{<n}$-模结构 $\psi\colon \mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}\longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$.

(i) 和 (iii) 的对应由展开式 $\epsilon(x\otimes 1)=\sum_{K\in T_n}\psi(D_K)(x)\otimes\xi^K$ 确定. (ii) 和 (iii) 的对应为: 给定 $D^{<n}$-模结构 ψ, 则 $N=\left\{x\in M\mid \psi(P-P(1))(x)=0,\ \forall\, P\in\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}\right\}$, φ 由自然包含同态 $N\hookrightarrow M$ 诱导. 反之, 给定 (N,φ), 并且通过 φ 将 M 等同到 $N\otimes_{B_n}B$, 则 ψ 由 $\forall\, P\in\mathrm{Diff}^{<n}_{B/A}$, $\forall\, x\in N$, $\forall\, b\in B$, $\psi(P)(x\otimes b)=x\otimes P(b)$ 确定. 由于 P 是 B_n-线性的, 该定义是良好的.

证明　注意到满足命题 11.3.14 中条件 (1), (2), (3) 的 θ_K 均为 A-线性同态. 因此在命题 11.3.16 中取 $C=\mathrm{End}_A(M)$ 即得到这样的 $(\theta_K)_{K\in T_n}$ 和 M 的 $D^{<n}$-模结构的一一对应. 再由命题 11.3.14 可得 (i) 与 (iii) 的对应. (i) 与 (ii) 的对应由忠实平坦下降给出 (定理 7.4.2). 这些对应的具体描述通过追踪相应命题中给出的对应描述即得. □

当 $n=1$ 时, M 的 $\mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}$-模结构有更简单的表达.

命题 11.3.18　设 M 为 B-模. 则 M 的 $D^{<1}$-模结构 $\psi\colon \mathrm{Diff}^{<1}_{B/A}\longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$ 与 p-曲率为零的可积联络 $\nabla\colon M\longrightarrow M\otimes_B\Omega_{B/A}$ 存在一一对应. 对应方式为: 给定 ψ, 则

∇ 由 $\nabla(x)=\sum\limits_{i=1}\psi(\partial_i)\otimes \mathrm{d}\, b_i$ 确定. 反之, 给定 ∇, 则 ψ 由 $\forall\, K=(a_1,\dots,a_r)\in T_1$, $\psi(D_K)=\frac{1}{a_1!\dots a_r!}\nabla(\partial_1)^{a_1}\dots\nabla(\partial_r)^{a_r}$ 确定. 其中 $\nabla(\partial_i)$ 由(11.1–1) 所定义.

证明 联合命题 11.1.8 和命题 11.3.17 (取 $C=\mathrm{End}_A(M)$) 即得. □

作为定理 11.3.2 和命题 11.3.18 的推论, 我们可以得到如下的 Cartier 下降定理 ([22, Theorem 5.1]).

推论 11.3.2 (Cartier 下降) 设 M 为 B-模, 则以下两类对象之间存在 (同构意义下的) 一一对应:

(i) 二元组 (N,φ), 其中 N 为 B_1-模, $\varphi\colon N\otimes_{B_1}B\xrightarrow{\sim}M$ 为 B-模同构.

(ii) M 的 p-曲率为零的可积联络 $\nabla\colon M\longrightarrow M\otimes_B\Omega_{B/A}$.

并且该对应可以描述为: 给定 (N,φ), 并且通过 φ 将 M 等同到 $N\otimes_{B_1}B$, 则 ∇ 由 $\forall\, x\in N,\ \forall\, b\in B,\ \nabla(x\otimes b)=x\otimes \mathrm{d}\, b$ 给出. 反之, 给定联络 ∇, 则对应的 N 取为 $M^{\nabla}:=\{x\in M\mid \nabla(x)=0\}$, φ 由自然包含同态 $N\hookrightarrow M$ 诱导.

在定理 11.3.2 中令 $n\longrightarrow\infty$, 则得到定理 11.3.1 在特征 p 情形的表现形式. 为了陈述它, 我们还需要引入下面的概念.

定义 11.3.6 设 M 为 B-模. M 的一个 **F-可除模结构**是指一个二元组序列 $(M_n,\varphi_n)_{n\geq 0}$, 使得:

(i) 对任意 $n\geq 0$, M_n 为 B_n-模, 并且 $M_0=M$.

(ii) 对任意 $n\geq 0$, $\varphi_n\colon M_{n+1}\otimes_{B_{n+1}}B_n\xrightarrow{\sim}M_n$ 为 B_n-模同构.

两个 F-可除模结构 $(M_n,\varphi_n)_{n\geq 0}$ 和 $(M'_n,\varphi'_n)_{n\geq 0}$ 称为同构的, 如果对每个 $n\geq 0$, 存在一个 B_n-模同构 f_n, 使得 $f_0=\mathrm{id}$, 并且对每个 $n\geq 0$, 以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xleftarrow[\sim]{\varphi_n} & M_{n+1}\otimes_{B_{n+1}}B_n \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}\otimes 1} \\ M'_n & \xleftarrow[\sim]{\varphi'_n} & M'_{n+1}\otimes_{B_{n+1}}B_n \end{array}$$

给了 M 的一个 F-可除模结构 $(M_n,\varphi_n)_{n\geq 0}$, 则对每个 $n\geq 0$, 通过 φ_n 得到 $M_n\simeq M_{n+1}\otimes_{B_{n+1}}B_n$, 由此得到

$$M=M_0\simeq M_1\otimes_{B_1}B\simeq(M_2\otimes_{B_2}B_1)\otimes_{B_1}B\simeq M_2\otimes_{B_2}B\simeq\cdots\simeq M_n\otimes_{B_n}B.$$

这说明 F-可除模结构 $(M_n,\varphi_n)_{\geq 0}$ 可以确定一个等同 $M=M_n\otimes_{B_n}B$, $\forall\, n\geq 0$.

现在可以得到定理 11.3.1 在特征 p 情形的如下表现形式. 其中 (iv) 和 (v) 的对应为 Katz 的结果 ([16, Theorem 1.3])

定理 11.3.3 设 M 为 B-模. 则以下结构存在 (同构意义下的) 一一对应:

(i) 满足 $\mathcal{F}(B,\mathrm{id})\simeq M$ 的 B/A-晶体 $\mathcal{F}$.

(ii) M 的分层 ϵ_n $(n \geq 0)$.

(iii) 满足如下条件的一族加法群同态 $\theta_K \colon M \longrightarrow M$, 其中 K 遍历 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$:

(1) $\theta_0 = \mathrm{id}$.

(2) $\forall\, K'' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\forall\, x \in M$, $\forall\, b \in B$, 有 $\theta_{K''}(bx) = \sum\limits_{(K,K') \in S} D_{K'}(b)\theta_K(x)$, 其中 $S \coloneqq \{(K, K') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid K + K' = K''\}$.

(3) $\forall\, K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\forall\, K' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $\binom{K+K'}{K} \theta_{K+K'} = \theta_{K'} \circ \theta_K$.

(iv) M 的 D-模结构 $\psi \colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$.

(v) M 的 F-可除模结构 $(M_n, \varphi_n)_{n \geq 0}$.

其中 (i) 和 (ii), (ii) 和 (iii) 以及 (iii) 和 (iv) 的对应已在前面的相应命题中描述. (iv) 和 (v) 的对应为: 给定 M 的 D-模结构 ψ, 则 $\forall\, n \geq 0$, $M_n \coloneqq \left\{x \in M \mid \psi(P - P(1)) = 0,\ \forall\, P \in \mathrm{Diff}_{B/A}^{<n}\right\}$, φ_n 由自然包含同态 $M_{n+1} \hookrightarrow M_n$ 诱导. 反之, 给定 M 的 F-可除模结构 $(M_n, \varphi_n)_{n \geq 0}$, 那么 $\psi \colon \mathrm{Diff}_{B/A} \longrightarrow \mathrm{End}_A(M)$ 定义为: 对任意 $P \in \mathrm{Diff}_{B/A}$, 如果 $P \in \mathrm{Diff}_{B/A}^{<n}$, 则通过这个 F-可除模结构将 M 等同到 $M_n \otimes_{B_n} B$ 之后, $\psi(x \otimes b) = x \otimes P(b)$, $\forall\, x \in M_n$, $\forall\, b \in B$.

证明 (i), (ii), (iii), (iv) 的对应在定理 11.3.1 中已证. 只需再证明上面描述的 (iv) 和 (v) 的对应是一一对应. 而这可以应用定理 11.3.2 得到. 其中唯一不太显然的是: 给定 M 的 D-模结构 ψ, 则自然包含同态 $M_{n+1} \hookrightarrow M_n$ 诱导的 B_n-模同态 $\varphi_n \colon M_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n \longrightarrow M_n$ 是同构. 这是因为通过作用 $\cdot \otimes_{B_n} B$ 基变换到 B 上之后, 我们有 B-模同构 $\varphi_n \otimes 1 \colon M_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B_n \otimes_{B_n} B = M_{n+1} \otimes_{B_{n+1}} B \xrightarrow{\sim} M_n \otimes_{B_n} B$. 再由 $B_n \hookrightarrow B$ 为忠实平坦同态即知 φ_n 为同构. □

再结合命题 11.3.2, 我们得到如下推论.

推论 11.3.3 设 $A = k$ 为特征 p 的域, M 为有限 B-模, 并且 M 存在一个 F-可除模结构 $(M_n, \varphi_n)_{n \geq 0}$, 则 M 为有限局部自由 B-模.

习题

1. 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 并且 B/A 是光滑的. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为 B/A 的一组平展坐标系. 对 $f \in B$, 由展开式 $\mathrm{d}\, f = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}\, x_i$ 定义偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in B$. 证明: 对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 对任意 $f \in B$, 有 $\dfrac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j} = \dfrac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i}$.

2. 设 A 为 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 并且 B/A 是光滑的. 设 M 为 B-模, $\nabla \colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 为联络. 证明: ∇ 为可积联络 $\iff$ $\forall\, D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_A(B)$, 有 $[\nabla(D_1), \nabla(D_2)] = \nabla([D_1, D_2])$. 其中对 $[X, Y]$ 表示换位子 $XY - YX$.

3. 设 A 为特征是 p 的 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 并且 B/A 是光滑的. 设 M 为 B-模, $\nabla \colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 为可积联络.

(i) $\forall\, D\in \mathrm{Der}_A(B)$, 证明以下三个 M 到自身的映射两两交换: $\nabla(D), \nabla(D^p), \psi_\nabla(D)$.
(ii) $\forall\, D_1, D_2\in \mathrm{Der}_A(B)$, 证明 $\psi_\nabla(D_1)$ 和 $\psi_\nabla(D_2)$ 作为 M 到自身的映射是交换的.
(iii) $\forall\, D_1, D_2\in \mathrm{Der}_A(B)$, 证明 $\psi_\nabla(D_1)$ 和 $\nabla(D_2)$ 作为 M 到自身的映射是交换的.
(iv) 称 M 的元素 x 为**水平截面**, 如果 $\nabla(x)=0$. 设 $D\in \mathrm{Der}_A(B)$. 证明: 若 $x\in M$ 为水平截面, 则 $\psi_\nabla(D)(x)$ 也为水平截面.

4. 设 A 为环, B 为 A-代数. 设 $P\colon B\longrightarrow B$ 为 A-线性映射. 考虑相应的 B-模同态

$$u_P\colon B\otimes_A B\longrightarrow B,\quad x\otimes y\longmapsto P(x)y.$$

证明以下条件相互等价:

(i) P 为阶不超过 n 的微分算子.
(ii) $u_P(I^{n+1})=0$. 其中 I 为同态 $B\otimes_A B,\ x\otimes y\longmapsto xy$ 的核.
(iii) 对任意 $x_1,\dots,x_{n+1}\in B$, 以下等式成立:

$$\sum_{H\subset J_{n+1}}(-1)^{|H|}\Big(\prod_{i\in H}x_i\Big)P\Big(\prod_{i\in J_{n+1}\setminus H}x_i\Big)=0.$$

其中 $J_{n+1}=\{1,\dots,n+1\}$.
(iv) 对任意 $b\in B$, 算子 $P_b\colon B\longrightarrow B,\ x\longmapsto P(bx)-bP(x)$ 是阶不超过 $n-1$ 的微分算子.

5. 设 $A\longrightarrow B$ 为环同态.

(i) 对任意 $n\geq 0$, 证明存在唯一的 A-模同态

$$\mathrm{d}\colon \wedge^n\Omega_{B/A}\longrightarrow \wedge^{n+1}\Omega_{B/A},$$

使得: $\forall\, b,b_1,\dots,b_n\in B,\ \mathrm{d}(b\,\mathrm{d}\,b_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,b_n)=\mathrm{d}\,b\wedge\mathrm{d}\,b_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,b_n$.
(ii) 证明 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$.

由以上结论, $(\Omega^\bullet_{B/A},\mathrm{d})$ 成为一个复形, 称为 B 相对于 A 的 de Rham 复形 ([30, Section 0FKF]).

6. 设 A 为特征 p 的 Noether 环, B 为有限生成 A-代数, 并且 $A\longrightarrow B$ 为光滑同态. 记 $F_{B/A}\colon B^{(p)}\longrightarrow B$ 为相对 Frobenius 同态. $H^1(\Omega^\bullet_{B/A}):=\frac{\mathrm{Ker}(\Omega_{B/A}\xrightarrow{\mathrm{d}}\wedge^2\Omega_{B/A})}{\mathrm{Im}(B\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega_{B/A})}$ 为一阶 de Rham 上同调. 证明:

(i) $\forall\, n\geq 0$, 微分 $\mathrm{d}\colon \wedge^n\Omega_{B/A}\longrightarrow\wedge^{n+1}\Omega_{B/A}$ 为 $B^{(p)}$-模同态.
(ii) 以下映射为 $B^{(p)}$-模同构 (其中 $b\in B$):

$$\begin{aligned}\Omega_{B^{(p)}/A}&\longrightarrow H^1(\Omega^\bullet_{B/A})\\ \mathrm{d}(a\otimes b)&\longmapsto [ab^{p-1}\,\mathrm{d}\,b]\end{aligned}$$

其中对 $\omega\in\Omega_{B/A}$, $[\omega]\in H^1(\Omega^\bullet_{B/A})$ 是指其代表的上同调类.

注记 11.3.4 上述同构映射称为 Cartier 算子. 其一般表述和证明可见 [22, 7.2].

7. 在一元多项式环 $\mathbb{F}_p[x]$ 上, 考虑秩为 n 的自由模 $M:=\mathbb{F}_p[x]e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_p[x]e_n$. 设 ∇ 为 M

的一个 $\mathbb{F}_p$-联络. 设 n 阶方阵 $A(x) \in M_n(\mathbb{F}_p[x])$ 满足:

$$\nabla(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \otimes A(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

令 $N \coloneqq \{s \in M \mid \nabla(s) = 0\}$.

(i) 证明 ∇ 为可积联络.

(ii) 对于 $s = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \in M$, 证明: $s \in N \iff (f_1, \dots, f_n)$ 满足常微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = -A(x)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}. \tag{11.3–4}$$

(iii) 证明 N 为自由 $\mathbb{F}_p[x^p]$-模, 并且秩不超过 n.

(iv) 证明 ∇ 的 p-曲率为零 $\iff$ N 作为自由 $\mathbb{F}_p[x^p]$-模的秩为 n.

(v) 证明 ∇ 的 p-曲率为零 $\iff$ M 作为 $\mathbb{F}_p[x]$-模由 N 生成.

(vi) 证明 ∇ 的 p-曲率为零 $\iff$ 微分算子 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} + A(x)\right)^p = 0$.

该习题说明 ∇ 的 p-曲率为零可以解释为常微分方程组 (11.3–4) 存在多项式解形成的基本解系.

8. 对一元多项式 $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, 记 $f'(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 为形式导数. 对有理函数 $f/g \in \mathbb{F}_p(x)$, 定义其形式导数为 $(f/g)' \coloneqq (f'g - fg')/g^2 \in \mathbb{F}_p(x)$. 证明: 对任意 $f/g \in \mathbb{F}_p(x)$, $(f/g)' = 0 \iff f/g \in \mathbb{F}_p(x^p)$.

9. 设 k 为特征 p 的域, $A(x) \in M_n(k(x))$ 为有理函数域 $k(x)$ 上的 n 阶方阵.

(i) 证明 $\Omega_{k(x)/k} = k(x)\,\mathrm{d}\,x$, $\mathrm{Der}_k(k(x)) = k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$.

令 $M = k(x)^n$ 为 n 维 $k(x)$-线性空间, N 为满足如下方程的 $(f_1, \dots, f_n) \in M$ 形成的子空间:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = -A(x)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

(ii) 证明 N 为 M 的 $k(x^p)$-线性子空间.

(iii) 证明: $k(x)$-线性映射 $N \otimes_{k(x^p)} k(x) \longrightarrow M$, $s \otimes f \longmapsto fs$ 是单的, 并由此证明 $\dim_{k(x^p)} N \leq n$.

(iv) 证明: $\dim_{k(x^p)} N = n \iff$ 微分算子 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} + A(x)\right)^p = 0$.

习题提示 2. 通过对 B 作局部化, 不妨设 B/A 存在平展坐标系 $b_1,\dots,b_n$. 从而任意 $D\in \mathrm{Der}_A(B)$ 均可表示为 $D=\sum\limits_{i=1}^n f_i\partial_i$. 由此知 $\nabla(D)=\sum\limits_{i=1}^n f_i\nabla(\partial_i)$. 再利用命题 11.1.3.

3. (i): 由 D 和 D^p 交换, 并且 ∇ 可积得到 $\nabla(D)$ 和 $\nabla(D^p)$ 交换, 进而得到它们与 $\psi_\nabla(D)$ 交换.

(ii), (iii): 通过对 B 作局部化, 不妨设 B/A 存在平展坐标系 $b_1,\dots,b_n$. 从而可设 $D_1=\sum\limits_{i=1}^n f_i\partial_i$, $D_2=\sum\limits_{i=1}^n g_i\partial_i$. 由此知 $\nabla(D_1)=\sum\limits_{i=1}^n f_i\nabla(\partial_i)$, $\nabla(D_2)=\sum\limits_{i=1}^n g_i\nabla(\partial_i)$, $\psi_\nabla(D_1)=\sum\limits_{i=1}^n f_i^p\nabla(\partial_i)^p$, 以及 $\psi_\nabla(D_2)=\sum\limits_{i=1}^n g_i^p\nabla(\partial_i)^p$. 直接计算并注意到 $\nabla(\partial_i)^p(g_j\nabla(\partial_j))=\sum\limits_{k=0}^p \binom{p}{k}\cdot(\partial_i^{p-k}g_j)\cdot(\nabla(\partial_i)^k\nabla(\partial_j))=\nabla(\partial_i)^p\nabla(\partial_j)$ 即可.

4. (i) $\iff$ (ii): 由定义即得.

(ii) $\iff$ (iii): 通过 $i_2^{(n)}$ 将 $(B\otimes_A B)/I^{n+1}$ 看作 B-模, 其理想 I^{n+1} 看作 B-子模, 注意到一组生成元是 $\{x\otimes 1-1\otimes x\mid x\in B\}$ 即可.

(iii) $\iff$ (iv): 对 n 进行归纳即得.

5. (i): $n=0$ 时, d 为微分. $n=1$ 时, d 由命题 11.1.1 给出. $n\geqslant 2$ 时, d 由下式确定:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\colon \wedge^n\Omega_{B/A}&\longrightarrow \wedge^{n+1}\Omega_{B/A}\\ \omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n&\mapsto\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\omega_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_n\end{aligned}$$

6. 利用命题 10.4.4 将问题约化为 $B=A[x_1,\dots,x_r]$ 的情形.

7. (iii), (iv), (v): M 作为 $\mathbb{F}_p[x^p]$-模是自由的, 并且秩有限. 故其子模 N 也是秩有限的自由模. 设 $s_0,\dots,s_{p-1}\in N$, 并且在 M 中有 $s\coloneqq\sum\limits_{i=0}^{p-1}x^is_i=0$. 则通过 $\nabla^m(s)=0$, $\forall\ m\geqslant 1$, 可知 $s_i=0$, $\forall\ i=0,\dots,p-1$. 由此得到同态 $N\otimes_{\mathbb{F}_p[x^p]}\mathbb{F}_p[x]\xrightarrow{\varphi}M$, $s\otimes f\mapsto fs$ 为单同态. 从而 N 作为自由 $\mathbb{F}_p[x^p]$-模的秩不超过 n. 利用**??**, 又知 ∇ 的 p-曲率为零 $\iff$ $N\otimes_{\mathbb{F}_p[x^p]}\mathbb{F}_p[x]\xrightarrow{\varphi}M$ 为同构.

8. 注意到 $\mathbb{F}_p(x^p)\hookrightarrow\mathbb{F}_p(x)$ 是指数为 1 的模扩张, 并且一组 p-基为 x. 故 $\mathbb{F}_p(x)=\mathbb{F}_p(x^p)\oplus\mathbb{F}_p(x^p)x\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}_p(x^p)x^{p-1}$. 利用这个分解直接计算即可.

9. (iii): 注意到 $k(x)$ 作为 $k(x^p)$-线性空间的维数是 p, 并且一组基为 $1,x,\dots,x^{p-1}$. 设 $s_0,\dots,s_{p-1}\in N$, 并且在 M 中有 $s\coloneqq\sum\limits_{i=0}^{p-1}x^is_i=0$. 则通过 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+A(x)\right)^m(s)=0$, $\forall\ m\geqslant 1$, 可知 $s_i=0$, $\forall\ i=0,\dots,p-1$. 由此得到所要证明的单同态性质.

(iv):

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \longmapsto \mathrm{d}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + A(x)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}\mathrm{d}\,x.$$

给出了 M 上的一个 k-联络 ∇. 对这个联络应用 Cartier 下降 (推论 11.3.2).

附录 A Grothendieck–Katz p-曲率猜想介绍

Grothendieck–Katz p-曲率猜想是关于微分方程组的一种局部整体原则. 该猜想源于 Grothendieck 在 20 世纪 60 年代提出的问题, 由 Katz 在 [23] 中首次明确写出, 并证明了几何情形. 本附录对该猜想的一些不同形式做一个介绍, 希望能引起读者的兴趣, 并展示正文中的一些知识如模 p 约化 (命题 3.6.8), Cartier 下降 (**??**) 等的具体用法. 关于该猜想的现状, 可见 [6, 13] 及其所列文献.

A.1 微分方程的代数解

考虑如下复平面上的常微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0. \tag{A.1–1}$$

其中 $P \in M_n(\mathbb{C}(t))$ 为有理函数域上的 n 阶方阵. 除去复平面上的有限个点 $\{z_1, \ldots, z_m\}$ 之后, 上述微分方程组是良好定义的.

由微分方程解的唯一性, 对 $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_m\}$ 的任何连通开子集 U, (A.1–1) 在 U 上的解空间维数不超过 n. (A.1–1) 在 U 上的一个解 $(f_1,\dots,f_n)$ 称为**有理解**, 如果每个 f_i 均为 t 的有理函数, 即 $f_i\in\mathbb{C}(t)$. 同理, (A.1–1) 在 U 上的一个解 $(f_1,\dots,f_n)$ 称为**代数解**, 如果每个 f_i 均为代数函数. 其中 U 上的一个全纯函数 f 称为代数函数, 如果存在在 U 上有定义的有理函数 $R_0,\dots,R_{r-1}$, 使得 $f^r+R_{r-1}f^{r-1}+\cdots+R_0=0$.

设 U 为 $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_m\}$ 的一个单连通开子集, 由全纯函数的解析延拓, (A.1–1) 在 U 上的所有有理函数解 (代数函数解) 形成的 $\mathbb{C}$-线性空间的维数不依赖于 U 的选取, 称为该微分方程组的**有理解空间维数** (**代数解空间维数**). 该维数不超过 n.

如果 (A.1–1) 中的方阵 P 满足 $P\in M_n(K(t))$, 其中 K 为某个代数数域. 则对代数整数环 $\mathcal{O}_K$ 的几乎所有极大理想 m, $P\in M_n(\mathcal{O}_{Km}(t))$. 这里这里 “几乎所有” 是指 “除掉有限个例外之后均成立”, 而 $\mathcal{O}_{Km}$ 为 $\mathcal{O}_K$ 在 m 处的局部化. 对这样的 m, 令 $\overline{P}\in M_n(k(m)(t))$ 为 P 中元素模 m 得到的方阵, 则称以下有限域 $k(m)$ 上的微分方程组为 (A.1–1) 的模 m 约化:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}+\overline{P}\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}=0. \tag{A.1–2}$$

如果 $f_i\in k(m)(t)$ 使得 $(f_1,\dots,f_n)$ 满足 (A.1–2), 则称 $(f_1,\dots,f_n)$ 为该微分方程组的一个有理解. 容易看到, (A.1–2) 的所有有理解形成一个 $k(m)(t^p)$-线性空间, 其中 $p=\mathrm{char}.\,k(m)$ 为有限域 $k(m)$ 的特征. 可以验证 (第十一章习题 9), 这个 $k(m)(t^p)$-线性空间的维数不超过 n. Grothendieck–Katz p-曲率猜想将 (A.1–1) 代数解的情况与其模 m 约化 (A.1–2) 的有理解情况联系起来.

猜想 A.1.1 (Grothendieck–Katz p-曲率猜想 1) 设 $P\in M_n(\overline{\mathbb{Q}}(t))$, 则以下两条等价:

(i) 微分方程组 (A.1–1) 的代数解空间的维数为 n.

(ii) 存在代数数域 K, 使得 $P\in M_n(K(t))$, 并且对 $\mathcal{O}_K$ 的几乎所有极大理想 m, (A.1–1) 的模 m 约化的有理解空间的 $k(m)(t^p)$-维数为 n. 其中 $p=\mathrm{char}.\,k(m)$.

例 A.1.1 设 $a\in\overline{\mathbb{Q}}$, 考虑常微分方程 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{t}f$. 该微分方程在 $\mathbb{C}^*$ 的一个单连通区域上的非零解为 t^a. 如果 $a\in\mathbb{Q}$, 显然这是一个代数函数. 反之, 如果 t^a 为 t 的代数函数, 则必有 $a\in\mathbb{Q}$(命题 A.1.1). 因此该微分方程存在非零代数解当且仅当 $a\in\mathbb{Q}$. 另一方面, 设 K 为代数数域, 使得 $a\in K$. 对 $\mathcal{O}_K$ 的几乎所有极大理想 m, 不难看到 $a\in\mathcal{O}_{Km}$, 并且 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\bar{a}}{t}f$ 在 $k(m)(t)$ 中存在非零解 $\iff$ $\bar{a}\in\mathbb{F}_p$, 其中 $p=\mathrm{char}.\,k(m)$. 如果对几乎所有极大理想 m 均有 $\bar{a}\in\mathbb{F}_p$, 则下面的 Kronecker 定理保证了 $a\in\mathbb{Q}$. 由此我们看到猜想 A.1.1 在 $n=1$, $P=\frac{a}{t}$ 时成立.

定理 A.1.1 (Kronecker) [25, VIII, §4, Corollary to Theorem 10] 设 K 为代数数域,

$a \in K$. 如果对 $\mathcal{O}_K$ 的几乎所有极大理想 m, 均存在 $N_m \in \mathbb{Z}$, 使得在 $k(m)$ 中有 $\bar{a} = \bar{N}_m$, 则 $a \in \mathbb{Q}$.

下面分析猜想 A.1.1 在 $n = 1$ 的情况.

命题 A.1.1 设 $n = 1$, $P = a(t) \in \overline{\mathbb{Q}}(t)$, 则 (A.1–1) 存在非零代数解 $\iff$ $a(t)$ 具有如下形状: $a(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{t - z_i}$, 其中每个 $r_i \in \mathbb{Q}$, 并且 $z_1, \dots, z_m$ 为 $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ 中互不相同的点.

证明 $\Longleftarrow$: 如果 $a(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{t - z_i}$, 且 $r_i \in \mathbb{Q}$, 则 $f(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - z_i)^{r_i}$ 为代数函数, 且为 (A.1–1) 的解.

$\Longrightarrow$: 设 (A.1–1) 存在非零代数解 $f(t)$, 并且 $f(t)$ 满足如下代数方程:

$$f(t)^d + R_{d-1}(t) f(t)^{d-1} + \cdots + R_1(t) f(t) + R_0(t) = 0. \tag{A.1–3}$$

其中每个 $R_i(t) \in \mathbb{C}(t)$ 均为有理函数. 设 d 为使得上述方程成立的最小正整数, 则 $R_0(t) \neq 0$. 在 (A.1–3) 两边对 t 求导, 得到

$$da(t) f(t)^d + Q_{d-1}(t) f(t)^{d-1} + \cdots + Q_1(t) f(t) + R_0'(t) = 0. \tag{A.1–4}$$

其中 $Q_i(t) \in \mathbb{C}(t)$ 为有理函数. 由 d 的最小性可知 (A.1–4) 的左边等于 (A.1–3) 的左边乘以 $da(t)$. 特别地, $R_0'(t) = da(t) R_0(t)$. 设 $R_0(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - z_i)^{c_i}$, 其中 z_i 互不相等, $c_i \in \mathbb{Z}$. 则 $a(t) = \frac{R_0'(t)}{dR_0(t)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{d(t - z_i)}$. 再由 $a(t) \in \overline{\mathbb{Q}}(t)$ 可知 $z_i \in \overline{\mathbb{Q}}$. □

命题 A.1.2 设 k 为特征为 p 的域, $a(t) \in k(t)$. 则微分方程 $f' = a(t) f$ 在 $k(t)$ 中存在非零解 $\iff$ $a(t)$ 具有如下形状: $a(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{t - z_i}$, 其中每个 $r_i \in \mathbb{F}_p$, 并且 $z_1, \dots, z_m$ 为 $\overline{k}$ 中互不相同的点.

证明 $\Longleftarrow$: 对每个 i, 令 a_i 为 r_i 在非负整数中的一个代表元. 则 $f(t) := \prod_{i=1}^{m} (t - z_i)^{a_i} \in k(t) \cap \overline{k}[t] = k[t]$, 并且 $f(t)$ 满足微分方程 $f' = a(t) f$.

$\Longrightarrow$: 设 $f(t) \in k(t)$ 满足 $f' = a(t) f$. 则在 $\overline{k}(t)$ 中有分解 $f(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - z_i)^{a_i}$, 其中 $z_i \in \overline{k}$ 互不相同, 并且 $a_i \geq 0$ 为非负整数. 由此得到 $a(t) = \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{t - z_i}$, 其中 $r_i = \bar{a}_i \in \mathbb{F}_p$. □

由定理 A.1.1, 命题 A.1.1 以及命题 A.1.2 不难看到, 猜想 A.1.1 在 $n = 1$ 时成立. 对于一般的 n, 当 $P = \frac{1}{t} A$, $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ 时, 通过考虑 A 的 Jordan 标准型, 可以看到猜想 A.1.1 也是成立的.

A.2 微分方程与联络

本节我们总是设 $A \longrightarrow B$ 为环同态, M 为自由 B-模, 一组基为 $e_1, \dots, e_n$, 并且 $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_A B$ 为联络. 这时有取值在 $\Omega_{B/A}$ 中的 n 阶方阵 $\omega \in M_n(\Omega_{B/A})$, 使得 $\nabla(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \otimes \omega$. 称 ω 为 ∇ 在基 $(e_1, \dots, e_n)$ 下的**联络方阵**. 记 $M^\nabla \coloneqq \{s \in M \mid \nabla(s) = 0\}$. 则 M^∇ 为 M 的 A-子模. 称 M^∇ 中的元素 s 为 M 的**水平截面**. 如果 $s = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i$, 其中 $f_i \in B$, 则 $s \in M^\nabla \iff (f_1, \dots, f_n)$ 满足如下微分方程组:

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0. \tag{A.2–1}$$

这样建立了线性微分方程组与水平截面之间的对应.

例 A.2.1 设 $B = A[t]$ 为多项式环. 则 $\Omega_{B/A} = B\,\mathrm{d}t$, 并且存在 $P \in M_n(B)$, 使得 $\omega = P\,\mathrm{d}t$. 这样微分方程组 (A.2–1) 成为如下线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0. \tag{A.2–2}$$

如果自然同态 $M^\nabla \otimes_A B \longrightarrow M$, $s \otimes b \longmapsto bs$ 为满同态, 则称 ∇ **存在充分多水平截面**. 此时 M 的任何元素都可以通过水平截面的 B-线性组合得到. 当 $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}[t]$ 时, 由微分方程初值问题解的唯一性可知, ∇ 存在充分多水平截面等价于微分方程组 (A.2–2) 恰好存在 n 个 $\mathbb{C}$-线性无关的多项式函数解.

在特征 p 情形, ∇ 存在充分多水平截面与 p-曲率消失有关, 这体现为下面的命题.

命题 A.2.1 设 A 的特征为 p. 则

(i) ∇ 存在充分多水平截面 $\implies \psi_\nabla = 0$.

(ii) 如果 A 为 Noether 环, B/A 光滑, 那么 ∇ 存在充分多水平截面 $\iff \psi_\nabla = 0$.

证明 (i): 任取 $D \in \mathrm{Der}_A(B)$. 对任意 $s \in M$, 设 $s_i \in M^\nabla$, $f_i \in B$, 使得 $s = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i$. 则 $\nabla(D)(s) = \sum_{i=1}^{n} D(f_i) s_i$. 由此不难看到 $\psi_\nabla(D)(s) = \nabla(D)^p(s) - \nabla(D^p)(s) = 0$. 故 $\psi_\nabla = 0$.

(ii): 只需证 $\Longleftarrow$. 设 $\psi_\nabla = 0$. 由 Cartier 下降**??**, $M^\nabla \otimes_{B^{(p)}} B \xrightarrow{\sim} M$ 为同构, 从

而 $M^{\nabla} \otimes_A B \longrightarrow M$ 为满同态. □

为了用联络的语言描述微分方程组 (A.2–1) 存在充分多的 "代数解", 需要考察 ∇ 在 $\operatorname{Spec} B$ 的平展覆盖下的诱导联络. 为此, 我们在下一节中发展诱导联络的一般概念.

A.3 诱导联络与基变换

设 A 为环, $\varphi\colon B \longrightarrow C$ 为 A-代数同态. 我们考察 B-模上的联络如何通过 φ 诱导相应的 C-模上的联络. 为此, 设 M 为 B-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 为联络. 则 $\mathrm{d}\varphi\colon \Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{C/A}$, $\mathrm{d}b \longmapsto \mathrm{d}\varphi(b)$ 为良好定义的 B-模同态, 从而诱导 B-模同态 $1 \otimes \mathrm{d}\varphi\colon M \otimes_B \Omega_{B/A} \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{C/A}$. 令 $\varphi_* M \coloneqq M \otimes_B C$ 为相应的 C-模. 则如下映射是良好定义的:

$$\begin{aligned} \varphi_*\nabla\colon \varphi_* M &\longrightarrow \varphi_* M \otimes_C \Omega_{C/A} = M \otimes_B \Omega_{C/A} \\ s \otimes c &\longmapsto c \cdot (1 \otimes \mathrm{d}\varphi)\nabla(s) + s \otimes \mathrm{d}c \end{aligned}$$

这里 $s \in M$, $c \in C$. 容易验证 $\varphi_*\nabla$ 为 $\varphi_* M$ 上的一个联络, 称为 ∇ 在 φ 下的**诱导联络**. 由定义可以得到如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_B \Omega_{B/A} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes \mathrm{d}\varphi} \\ \varphi_* M & \xrightarrow{\varphi_*\nabla} & \varphi_* M \otimes_C \Omega_{C/A} \end{array}$$

其中 i 为自然同态 $x \longmapsto x \otimes 1$. 而 $1 \otimes \mathrm{d}\varphi$ 是指同态

$$M \otimes_B \Omega_{B/A} \xrightarrow{1\otimes \mathrm{d}\varphi} M \otimes_B \Omega_{C/A} = \varphi_* M \otimes_C \Omega_{C/A}.$$

B-模同态 $\mathrm{d}\varphi\colon \Omega_{B/A} \longrightarrow \Omega_{C/A}$ 诱导了外积的 B-模同态 $\wedge^2 \mathrm{d}\varphi\colon \wedge^2 \Omega_{B/A} \longrightarrow \wedge^2 \Omega_{C/A}$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \longmapsto \mathrm{d}\varphi(\alpha_1) \wedge \mathrm{d}\varphi(\alpha_2)$. $\varphi_*\nabla$ 的曲率可以描述如下.

命题 A.3.1 记号同上, 则有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla^2} & M \otimes_B \wedge^2 \Omega_{B/A} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes \wedge^2 \mathrm{d}\varphi} \\ \varphi_* M & \xrightarrow{(\varphi_*\nabla)^2} & \varphi_* M \otimes_C \wedge^2 \Omega_{C/A} \end{array}$$

这里 $1 \otimes \wedge^2 \mathrm{d}\varphi$ 是指同态 $M \otimes_B \wedge^2 \Omega_{B/A} \xrightarrow{1\otimes \wedge^2 \mathrm{d}\varphi} M \otimes_B \wedge^2 \Omega_{C/A} = \varphi_* M \otimes_C \wedge^2 \Omega_{C/A}$.

证明 首先由定义可以验证如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{B/A} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \wedge^2\Omega_{B/A} \\ {\scriptstyle \mathrm{d}\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^2 \mathrm{d}\varphi} \\ \Omega_{C/A} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \wedge^2\Omega_{C/A} \end{array}$$

再由曲率的定义直接验证即得. □

由上述命题, 如果 ∇ 为可积联络, 则 $\varphi_*\nabla$ 也为可积联络. 下面考察诱导联络的 p-曲率.

命题 A.3.2 记号同上, 并设 A 的特征为 p. 设 $\partial \in \mathrm{Der}_A(B)$, $\partial' \in \mathrm{Der}_A(C)$, 满足 $\forall\, b \in B$, $\varphi(\partial(b)) = \partial'(\varphi(b))$, 则有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_\nabla(\partial)} & M \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \varphi_*M & \xrightarrow{\psi_{\varphi_*\nabla}(\partial')} & \varphi_*M \end{array}$$

证明 由定义直接验证即得. □

推论 A.3.1 设 A 为特征 p 的 Noether 环, B, C 均为有限生成 A-代数, 并且 B/A 光滑. 设 $\varphi\colon B \longrightarrow C$ 为平展同态, 并且 $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} C \longrightarrow \operatorname{Spec} B$ 为满射. 设 M 为有限局部自由 B-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A}$ 为联络. 则 ∇ 为 p-曲率为零的可积联络 $\iff$ $\varphi_*\nabla$ 为 p-曲率为零的可积联络.

证明 通过考虑 B 的局部化, 不妨设 M 为自由 B-模, 并且 B/A 存在一组平展坐标系 $b_1, \ldots, b_n$. 这样 C/A 也是光滑的, 并且 $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ 为平展坐标系. 设 $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{Der}_A(B)$ 为 $\mathrm{d}\, b_1, \ldots, \mathrm{d}\, b_n$ 的对偶基, $\partial'_1, \ldots, \partial'_n \in \mathrm{Der}_A(C)$ 为 $\mathrm{d}\,\varphi(b_1), \ldots, \mathrm{d}\,\varphi(b_n)$ 的对偶基 (11.1–3). 由于 C/B 平展, 并且 $\operatorname{Spec} C \longrightarrow \operatorname{Spec} B$ 为满射, 可知 C 为忠实平坦的 B-代数, 从而 φ 为单同态 (命题 7.3.5). 令 $i\colon M \longrightarrow \varphi_*M$ 为同态 $x \longmapsto x \otimes 1$. 由于 M 为秩有限的自由 B-模, 我们看到 i 为单同态, $1 \otimes \wedge^2 \mathrm{d}\varphi\colon M \otimes_B \wedge^2\Omega_{B/A} \longrightarrow \varphi_*M \otimes_C \wedge^2\Omega_{C/A}$ 也为单同态. 再由命题 A.3.1 即知 ∇ 可积 $\iff$ $\varphi_*\nabla$ 可积.

对任意 j, 由命题 A.3.2可得如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_\nabla(\partial_j)} & M \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \varphi_*M & \xrightarrow{\psi_{\varphi_*\nabla}(\partial'_j)} & \varphi_*M \end{array}$$

由此可知 $\psi_\nabla(\partial_j)^p = 0 \iff \psi_{\varphi_*\nabla}(\partial'_j)^p = 0$. 从而根据命题 11.1.6 和可积条件的等价性, 最终得到 ∇ 可积且 $\psi_\nabla = 0 \iff \varphi_*\nabla$ 可积且 $\psi_{\varphi_*\nabla} = 0$. □

设 A 为环. 对 $i=1,2$, 设 $A\longrightarrow B_i$ 为环同态, M_i 为 B_i-模, $\nabla_i\colon M_i\longrightarrow M_i\otimes_{B_i}\Omega_{B_i/A}$ 为联络. 我们称三元组 (B_1,M_1,∇_1) 和 (B_2,M_2,∇_2) 同构, 记为 $(B_1,M_1,\nabla_1)\simeq(B_2,M_2,\nabla_2)$, 如果存在 A-代数同构 $\varphi\colon B_1\xrightarrow{\sim}B_2$, 存在 B_1-模同构 $f\colon M_1\xrightarrow{\sim}M_2$ (这里通过 φ 将 M_2 看作 B_1-模), 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\nabla_1} & M_1\otimes_{B_1}\Omega_{B_1/A} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes\mathrm{d}\varphi} \\ M_2 & \xrightarrow{\nabla_2} & M_2\otimes_{B_2}\Omega_{B_2/A} \end{array}$$

设 $R\longrightarrow A$, $R\longrightarrow R_1$ 均为环同态, 设 M 为 A-模, $\nabla\colon M\longrightarrow\Omega_{A/R}$ 为联络. 记 $A_1\coloneqq A\otimes R_1$ 为张量积, $i_1\colon A\longrightarrow A_1$ 为同态 $a\longmapsto a\otimes 1$. 令 $\pi\colon\Omega_{A_1/R}\longrightarrow\Omega_{A_1/R_1}$ 为自然的 A-模同态 $\mathrm{d}\,a_1\longmapsto\mathrm{d}\,a_1$. 记 $M_1\coloneqq i_{1*}M=M\otimes_A A_1=M\otimes_R R_1$. 则复合映射 $\nabla_1\colon M_1\xrightarrow{i_{1*}\nabla}M_1\otimes_{A_1}\Omega_{A_1/A}\xrightarrow{1\otimes\pi}M_1\otimes_{A_1}\Omega_{A_1/R_1}$ 为 M_1 的一个 R_1-联络. 我们将三元组 (A_1,M_1,∇_1) 记为 $(A,M,\nabla)\otimes_R R_1$, 称为 (A,M,∇) 在 $R\longrightarrow R_1$ 下的**基变换**, 将 ∇_1 也记为 $\nabla\otimes_R R_1$. 如果 M 为自由 A-模, 一组基为 $e_1,\dots,e_n$, 并且 $\omega\in M_n(\Omega_{A/R})$ 为 ∇ 在基 $(e_1,\dots,e_n)$ 下的联络方阵, 即 $\nabla(e_1,\dots,e_n)=(e_1,\dots,e_n)\otimes\omega$. 则 $e_1,\dots,e_n$ 也可看作自由 A_1-模 M_1 的一组基, 并且 ∇_1 在 $(e_1,\dots,e_n)$ 下的联络方阵 ω_1 恰为 ω 在微分模的自然同态 $\Omega_{A/R}\longrightarrow\Omega_{A_1/R_1}$, $\mathrm{d}\,a\longmapsto\mathrm{d}(a\otimes 1)$ 下的像.

定义–命题 A.3.1 设 A 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数, M 为秩有限的自由 A-模, $\nabla\colon M\longrightarrow M\otimes_A\Omega_{A/\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{C}$-联络. 则存在 $\mathbb{C}$ 的有限生成 $\mathbb{Z}$-子代数 R, 以及有限生成 R-代数 A_R, 并且存在秩有限的自由 A_R-模 M_R, 以及 R-联络 $\nabla_R\colon M_R\longrightarrow M_R\otimes_{A_R}\Omega_{A_R/R}$, 使得 $(A_R,M_R,\nabla_R)\otimes_R\mathbb{C}\simeq(A,M,\nabla)$. 这样的三元组 (A_R,M_R,∇_R) 称为 (A,M,∇) 的一个**模型** (model).

证明 设 $A\simeq\mathbb{C}[x_1,\dots,x_r]/(f_1,\dots,f_m)$, 其中每个 $f_s\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_r]$ 为 $\mathbb{C}$-系数多项式. 设 $e_1,\dots,e_n$ 为 M 的一组基, 并且 ∇ 在 $(e_1,\dots,e_n)$ 下的联络方阵为 ω. 则存在 A 中的一组元素 $g_{ij}^{(k)}(1\leqslant i,j\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant N)$, 使得 ω 的第 (i,j)-位置元素为 $\sum\limits_{k=1}^{N}g_{ij}^{(k)}\,\mathrm{d}\,x_k$. 令 R 为 $\mathbb{C}$ 的由 f_s, $g_{ij}^{(k)}$ $(1\leqslant s\leqslant m,\ 1\leqslant i,j\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant N)$ 的所有系数生成的子环. 则 R 为有限生成 $\mathbb{Z}$-代数, 并且每个 f_s 和 $g_{ij}^{(k)}$ 均在 R 中. 令 $A_R\coloneqq R[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$, 则 A_R 为有限生成 R-代数. 令 M_R 为秩为 n 的自由 R-模, 一组基为 $\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n$. 通过将 $\sum\limits_{k=1}^{N}g_{ij}^{(k)}\,\mathrm{d}\,x_k$ 看作 $\Omega_{A_R/R}$ 中的元素, 可以将 ω 看作取值在 $\Omega_{A_R/R}$ 中的 n 阶方阵. 这样通过 $\nabla_R(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)=(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)\otimes\omega$ 定义了 M_R 上的一个联络 $\nabla_R\colon M_R\longrightarrow M_R\otimes_{A_R}\Omega_{A_R/R}$. 由构造过程不难看到有同构 $(A_R,M_R,\nabla_R)\otimes_R\mathbb{C}\simeq(A,M,\nabla)$. □

引理 A.3.1 设 R 为 Noether 整环, A 为有限生成 R-代数, F 为 $\operatorname{Spec}A$ 的闭子集. 设作为 $\operatorname{Spec}A$ 的子集, 有 $F\cap\operatorname{Spec}A\otimes_R\operatorname{Frac}(R)=\varnothing$. 则存在非零的 $f\in R$, 使得

$F \cap \operatorname{Spec} A_f = \varnothing$.

证明 设 $F = V(I)$, 并且 I 的生成元为 $a_1, \ldots, a_n \in A$. 由条件可知在 $A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 中有 $IA \otimes_R \operatorname{Frac}(R) = A \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$. 从而存在 $c_1, \ldots, c_n \in A$, 存在 $0 \neq f \in R$, 使得在 A 中成立 $\sum_{i=1}^{n} f c_i a_i = 1$. 这样就得到 $IA_f = A_f$, 即知 $F \cap \operatorname{Spec} A_f = \varnothing$. □

命题 A.3.3 设 A 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数, 并且 $A/\mathbb{C}$ 光滑. 设 M 为秩有限的自由 A-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}$ 为可积联络. 则 (A, M, ∇) 存在模型 (A_R, M_R, ∇_R), 使得 A_R 为光滑 R-代数, 并且 ∇_R 为可积联络.

证明 由定义–命题 A.3.1, 存在 (A, M, ∇) 的模型 (A_R, M_R, ∇_R). 由于 $A_R \otimes_R \mathbb{C} \simeq A$ 为正则环, 并且 $A_R \otimes_R \overline{\operatorname{Frac}(R)} \longrightarrow A_R \otimes_R \mathbb{C}$ 为平坦同态, 可知 $A_R \otimes_R \overline{\operatorname{Frac}(R)}$ 为正则环 (命题 9.2.1). 从而 $\operatorname{Frac}(R) \longrightarrow A_R \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 为光滑同态. 定义 $\operatorname{Spec} A_R$ 的如下子集 $U := \{P \in \operatorname{Spec} A_R \mid A_R/R \text{ 在 } P \text{ 点光滑}\}$, 则 U 为开子集 (命题 10.2.3), 并且 U 包含了 $\operatorname{Spec} A_R \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ 在 $(0) \in \operatorname{Spec} R$ 处的纤维. 再由引理 A.3.1, 存在 $0 \notin f_1 \in R$, 使得 $R_{f_1} \longrightarrow A_R \otimes_R R_{f_1}$ 为光滑同态. 通过考虑 $(A_R, M_R, \nabla_R) \otimes_R R_{f_1}$, 我们不妨设 A_R/R 是光滑的. 利用命题 A.3.1, 有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} M_R & \xrightarrow{\nabla_R^2} & M_R \otimes_{A_R} \wedge^2 \Omega_{A_R/R} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ M & \xrightarrow{\nabla^2} & M \otimes_A \wedge^2 \Omega_{A/\mathbb{C}} \end{array}$$

其中 $M \simeq M_R \otimes_R \mathbb{C}$, $M \otimes_A \wedge^2 \Omega_{A/\mathbb{C}} \simeq (M_R \otimes_{A_R} \wedge^2 \Omega_{A_R/R}) \otimes_R \mathbb{C}$. 由于 ∇_R^2 为 A_R-模同态, ∇^2 为 A-模同态, 不难看到存在 $0 \neq f \in R$, 使得 $\nabla_R \otimes_R R_f$ 是可积联络. 这样得到 $(A_R, M_R, \nabla_R) \otimes_R R_f$ 即为满足条件的模型. □

以下对于定义–命题 A.3.1 中的三元组 (A, M, ∇), 如果 $A/\mathbb{C}$ 光滑, ∇ 可积, 则总是要求其模型 (A_R, M_R, ∇_R) 满足 A_R/R 光滑, 且 ∇_R 可积.

下面的命题说明了不同模型之间的联系. 回忆如果 R 为有限生成 $\mathbb{Z}$-代数, 则对 R 的任意极大理想 m, 其剩余类域 $k(m)$ 均为有限域 (命题 3.6.8).

命题 A.3.4 设 A 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数, 并且 $A/\mathbb{C}$ 光滑. 设 M 为秩有限的自由 A-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}$ 为可积联络. 则以下三条互相等价:

(i) 存在 (A, M, ∇) 的模型 (A_R, M_R, ∇_R), 使得对 R 的任意极大理想 m, 均有基变换 $\nabla_R \otimes_R k(m)$ 为 p-曲率为零的可积联络.

(ii) 对 (A, M, ∇) 的任意模型 (A_R, M_R, ∇_R), 均存在非零的 $f \in R$, 使得对 R 的任意极大理想 m, 如果 $f \notin m$, 那么 $\nabla_R \otimes_R k(m)$ 为 p-曲率为零的可积联络.

(iii) 存在 (A, M, ∇) 的模型 (A_R, M_R, ∇_R), 使得对几乎所有素数 p, 均有 $\nabla_R \otimes_R R/(p)$ 为 p-曲率为零的可积联络. 这里 “对几乎所有素数 p” 遵循惯用的约定, 是指除掉

有限个素数之后论断成立.

证明 由我们的约定, 模型中的联络都是可积的. 因此只需考虑 p-曲率为零的性质.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): 设 $(A_{R_1}, M_{R_1}, \nabla_{R_1})$ 为 (A, M, ∇) 的模型, 使得对 R 的任意极大理想 m, 均有基变换 $\nabla_R \otimes_R k(m)$ 的 p-曲率为零. 任取 (A, M, ∇) 的另一个模型 $(A_{R_2}, M_{R_2}, \nabla_{R_2})$. 不难看到, 存在 (A, M, ∇) 的模型 $(A_{R_3}, M_{R_3}, \nabla_{R_3})$, 使得对任意 $i = 1, 2$, 均有 $R_i \subset R_3$, 并且 $(A_{R_i}, M_{R_i}, \nabla_{R_i}) \otimes_{R_i} R_3 \simeq (A_{R_3}, M_{R_3}, \nabla_{R_3})$. 任取 R_3 的极大理想 m_3, 令 $m_i \coloneqq m_3 \cap R_i$, 则 m_i 也为 R_i 的极大理想, 并且 $k(m_3)/k(m_i)$ 为有限域的扩张, 因此为平展的. 从而 $A_{R_i} \otimes_{R_i} k(m_i) \longrightarrow A_{R_3} \otimes_{R_3} k(m_3)$ 也是平展同态. 这样由推论 A.3.1 可以看到, $\nabla_{R_i} \otimes_{R_i} k(m_i)$ 的 p-曲率为零 $\iff$ $\nabla_{R_3} \otimes_{R_3} k(m_3)$ 的 p-曲率为零. 而由条件, $\nabla_{R_1} \otimes_{R_1} k(m_1)$ 的 p-曲率总为零, 因此只要 R_2 的极大理想 m 包含在 $\operatorname{Spec} R_3 \longrightarrow \operatorname{Spec} R_2$ 的像中, 就有 $\nabla_{R_2} \otimes_{R_2} k(m)$ 的 p-曲率为零. 由推论 5.2.4 知 $\operatorname{Spec} R_3 \longrightarrow \operatorname{Spec} R_2$ 的像包含一个非空开集 $D(f)$, $0 \neq f \in R_2$. 这个 f 即满足 (ii) 中的要求.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 考虑模型的基变换 $(A_R, M_R, \nabla_R) \otimes_R R_f$ 即可.

(i) $\iff$ (iii): 设 (A_R, M_R, ∇_R) 为 (A, M, ∇) 的一个模型. 通过取局部化 R_f, 我们不妨设 $R/\mathbb{Z}$ 光滑. 再通过对 A_R 作局部化, 还可以假设 A_R/R 存在一组平展坐标系 $a_1, \ldots, a_r$. 设 $\partial_1, \ldots, \partial_r \in \operatorname{Der}_R(A_R)$ 为 $\mathrm{d}\, a_1, \ldots, \mathrm{d}\, a_r$ 的对偶基. 任取素数 p 满足 $p \in \operatorname{Im}(\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z})$, 则 $A_R \otimes_R R/(p)$ 为光滑 $R/(p)$-代数, $R/(p)$ 为光滑 $\mathbb{F}_p$-代数. 注意到域上的光滑代数均为正则环, 从而为约化环 (即没有非平凡幂零元). 故对任意 $f \in A_R \otimes_R R/(p)$, 有 $f = 0 \iff f(m) = 0$, 对任意 $A_R \otimes_R R/(p)$ 的极大理想 m $\iff$ 对 $R/(p)$ 的任意极大理想 m, f 在 $A_R \otimes_R k(m)$ 中为零.

通过固定 M_R 的一组基, 对任意 $j = 1, \ldots, r$, $\psi_{\nabla_R \otimes_R R/(p)}(\partial_j) = (\nabla_R \otimes_R R/(p))(\partial_j)^p$ 可以看作取值在 $A_R \otimes_R R/(p)$ 中的方阵, 而对 $R/(p)$ 的任意极大理想 m, $\psi_{\nabla_R \otimes_R k(m)} = (\nabla_R \otimes_R k(m))(\partial_j)^p$ 为该方阵在自然同态 $\nabla_R \otimes_R R/(p) \longrightarrow \nabla_R \otimes_R k(m)$ 下的像. 再由命题 11.1.6即知 $\psi_{\nabla_R \otimes_R R/(p)} = 0 \iff$ 对 $R/(p)$ 的任意极大理想 m 均有 $\psi_{\nabla_R \otimes_R k(m)} = 0$. 再注意到 $\operatorname{Im}(\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ 包含了 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 的一个非空开子集即可. □

如果命题 A.3.4 中的三个等价条件成立, 则称**对几乎所有 p, (A, M, ∇) 的 p-曲率为零**.

A.4 联络的代数解

本节我们固定以下记号:A 为有限生成 $\mathbb{C}$-代数, 且 $A/\mathbb{C}$ 光滑, M 为秩 n 的自由 A-模, $\nabla\colon M \longrightarrow M \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}$ 为可积联络.

我们称 ∇ **存在充分多代数解**, 如果存在 A-代数 B 满足如下条件:

(i) $\varphi\colon A \longrightarrow B$ 为有限扩张, 其中 φ 为结构同态.

(ii) B/A 平展.

(iii) $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 为满射.
(iv) $\varphi_*\nabla$ 存在充分多水平截面.

可以证明 ([13, Claim 2.10]), 当 $\operatorname{Spec} A$ 连通时, ∇ 存在充分多代数解与相应的微分方程组 (A.2–1) 存在 n 个 $\mathbb{C}$-线性无关的代数解是等价的.

命题 A.4.1 *如果 ∇ 存在充分多代数解, 则对几乎所有 p, (A, M, ∇) 的 p-曲率为零.*

证明 设 $e_1, \dots, e_n$ 为自由模 M 的一组基. 由条件, 存在有限扩张 $\varphi\colon A \longrightarrow B$, 存在有限个截面 $s_1, \dots, s_m \in \varphi_* M = M \otimes_A B$, 满足:
(i) B/A 平展, $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 是满射.
(ii) $\forall\, i = 1, \dots, m$, 截面 s_i 是水平截面, 即 $(\varphi_*\nabla)(s_i) = 0$.
(iii) $\forall\, i = 1, \dots, n$, 截面 e_i (看作 $\varphi_* M$ 的元素) 为 $s_1, \dots, s_m$ 的 B-线性组合.
设 (A_R, M_R, ∇_R) 为 (A, M, ∇) 的一个模型. 通过对 R 作适当的局部化, 还可假设 M_R 为秩 n 的自由 A_R-模, 并且可以将 $e_1, \dots, e_n$ 看作 M_R 的一组基. 同理还可设存在有限扩张 $\tilde{\varphi}\colon A_R \longrightarrow B_R$, 以及截面 $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m \in \tilde{\varphi}_* M_R = M_R \otimes_{A_R} B_R$, 使得有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc} B_R \otimes_R \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & B \\ \uparrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}\otimes 1} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} \\ A_R \otimes_R \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & A \end{array}$$

并且通过由同构 $B_R \otimes_R \mathbb{C} \simeq B$ 诱导的映射 $\tilde{\varphi}_* M_R \longrightarrow \varphi_* M$, 每个 $\tilde{s}_i$ 对应到 s_i. 下面证明, 通过将 R 替换为适当的局部化 R_f, 我们还可以要求:
(1) B_R/A_R 平展, $\operatorname{Spec} B_R \longrightarrow \operatorname{Spec} A_R$ 是满射.
(2) $\forall\, i = 1, \dots, m$, 截面 $\tilde{s}_i$ 是水平截面, 即 $(\tilde{\varphi}_*\nabla_R)(\tilde{s}_i) = 0$.
(3) $\forall\, i = 1, \dots, n$, 截面 e_i (看作 $\tilde{\varphi}_* M_R$ 的元素) 为 $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m$ 的 B-线性组合.
首先由 (ii) 和 (iii) 可以看到, 通过对 R 作适当的局部化, (2) 和 (3) 能够满足. 由 B/A 平展可知 $A_R \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \longrightarrow B_R \otimes_R \operatorname{Frac}(R)$ 平展. 定义 $\operatorname{Spec} B_R$ 的开子集 $U \coloneqq \{P \in \operatorname{Spec} B_R \mid B_R/A_R \text{ 在 } P \text{ 点平展}\}$, 则 $\operatorname{Spec} B_R \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \subset U$. 从而由引理 A.3.1, 可以通过将 R 替换为适当的 R_f 使得 B_R/A_R 是平展的. 同理, 考虑 $\operatorname{Spec} A_R$ 的子集 $V \coloneqq \operatorname{Im}(\operatorname{Spec} B_R \longrightarrow \operatorname{Spec} A_R)$, 则由 $A_R \longrightarrow B_R$ 平坦知 V 为 $\operatorname{Spec} A_R$ 的开子集. 又由 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ 是满射可知 $\operatorname{Spec} A_R \otimes_R \operatorname{Frac}(R) \subset V$. 再次应用引理 A.3.1, 可以通过将 R 替换为适当的 R_f 使得 $\operatorname{Spec} B_R \longrightarrow \operatorname{Spec} A_R$ 是满射. 这样 (1), (2), (3) 均可假设成立.

对任意素数 p, 使得 $(p) \in \operatorname{Im}(\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z})$, 考虑环同态

$$\varphi_p\colon A_R \otimes_R R/(p) \xrightarrow{\tilde{\varphi}\otimes 1} B_R \otimes_R R/(p).$$

则 (2), (3) 说明 $\nabla_R \otimes_R R/(p)$ 在 φ_p 下的诱导联络 $\varphi_{p*}(\nabla_R \otimes_R R/(p))$ 存在充分多水平

截面. 而 φ_p 又是平展同态, 且诱导素谱之间的满映射, 从而由命题 A.2.1 和 推论 A.3.1 可知 $\nabla_R \otimes_R R/(p)$ 的 p-曲率为零. 由于 $\mathrm{Im}(\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ 包含了 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 的一个非空开子集, 我们看到对几乎所有的 p, (A, M, ∇) 的 p-曲率为零. □

Grothendieck–Katz p-曲率猜想的另一形式即上述命题的逆命题.

猜想 A.4.1 (Grothendieck–Katz p-曲率猜想 2) *如果对几乎所有 p, (A, M, ∇) 的 p-曲率为零, 则 ∇ 存在充分多代数解.*

通过考虑单值化群, 可以证明该猜想等价于 [23] 中的问题 (I quat). 基于 [2, 4, 22] 的结果, 猜想 A.4.1 等价于以下特殊情形 ([13, §2.2]).

猜想 A.4.2 (Grothendieck–Katz p-曲率猜想 3) *设 $A = \mathbb{C}[t, t^{-1}, (t-1)^{-1}]$, 并且 ∇ 由如下联络方阵 ω 给出:*

$$\omega \coloneqq (Pt^{-1} + Q(t-1)^{-1})\,\mathrm{d}\,t, \quad P, Q \in M_n(\overline{\mathbb{Q}}).$$

如果对几乎所有 p, (A, M, ∇) 的 p-曲率为零, 则 ∇ 存在充分多代数解.

由联络与微分方程组的联系可以看到, 猜想 A.4.2 等价于如下常微分方程组的形式.

猜想 A.4.3 (Grothendieck–Katz p-曲率猜想 4) *设 K 为代数数域, P, $Q \in M_n(K)$, 考虑如下常微分方程组:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \left(\frac{P}{t} + \frac{Q}{t-1}\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{A.4–1}$$

设对几乎所有 $\mathcal{O}_K$ 的极大理想 m, (A.4–1) 模 m 约化后的方程均存在 n 个 $k(m)(t^p)$-线性无关的有理解 ($p = \mathrm{char}.\, k(m)$), 则 (A.4–1) 本身存在 n 个 $\mathbb{C}$-线性无关的代数解.

不难看到猜想 A.4.1 $\Longrightarrow$ 猜想 A.1.1 $\Longrightarrow$ 猜想 A.4.3, 故猜想 A.1.1, A.4.1, A.4.2 和 A.4.3 互相等价, 它们为 Grothendieck–Katz p-曲率猜想的不同形式.

参考文献

[1] A. Altman and S. Kleiman. *Introduction to Grothendieck Duality Theory*. Vol. 146. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1970. DOI: 10.1007/BFb0060932.

[2] Y. André. "Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un probleme de Dwork". *Geometric aspects of Dwork theory* 1 (2004), pp. 55–112 (引用于 p. 285).

[3] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Avalon Publishing, 1994. ISBN: 9780813345444 (引用于 p. 133).

[4] G. V. Belyĭ. "On Galois extensions of a maximal cyclotomic field". *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 14.2 (1980), p. 247 (引用于 p. 285).

[5] P. Berthelot and A. Ogus. *Notes on Crystalline Cohomology. (MN-21)*. Princeton: Princeton University Press, 1978. ISBN: 9781400867318. DOI: 10.1515/9781400867318 (引用于 pp. 258, 262).

[6] A. Bostan, X. Caruso, and J. Roques. "Algebraic solutions of linear differential equations: an arithmetic approach". *Bulletin of the American Mathematical Society* 61.4 (2024), pp. 609–658 (引用于 p. 275).

[7] C. H. Chiu. "Zariski's Main Theorem". Available at https://phaidra.univie.ac.at/open/o:1322314. Master's thesis, BSc. Vienna: University of Vienna, 2015 (引用于 p. 120).

[8] H. Cohen. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1993. DOI: 10.1007/978-3-662-02945-9 (引用于 p. 106).

[9] J. P. Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf. 1997 (引用于 p. 106).

[10] J. A. Dieudonne and A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique*. Vol. 166. Springer Berlin Heidelberg New York, 1971 (引用于 p. 258).

[11] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry*. Vol. 150. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1 (引用于 p. 1).

[12] D. Eisenbud and J. Harris. *The Geometry of Schemes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000. ISBN: 9780387986388. DOI: 10.1007/b97680 (引用于 p. 19).

[13] H. Esnault. *Local Systems in Algebraic-Arithmetic Geometry*. Springer, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-40840-3 (引用于 pp. 275, 284, 285).

[14] S. Evens. *Notes on fiber dimension*. https://www3.nd.edu/~sevens/fibdim.pdf.

[15] L. Fu. *Etale Cohomology Theory*. Nankai Tracts in Mathematics. World Scientific, 2011. ISBN: 9789814307727 (引用于 pp. 76, 85).

[16] D. Gieseker. "Flat vector bundles and the fundamental group in non-zero characteristics". *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* 2.1 (1975), pp. 1–31 (引用于 p. 268).

[17] A. Grothendieck. "Crystals and the De Rham Cohomology of Schemes,(notes by I. Coates et O. Jussila)". *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (1968) (引用于 p. 262).

[18] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer New York, 1977. DOI: 10.1007/978-1-4757-3849-0 (引用于 p. 1).

[19] D. Hilbert. *Theory of Algebraic Invariants*. Cambridge University Press, 1993 (引用于 p. 26).

[20] J. E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975. ISBN: 9780387901084. DOI: 10.1007/978-1-4684-9443-3 (引用于 p. 239).

[21] Z. Jelonek. "On the effective Nullstellensatz". *Inventiones Mathematicae* 162.1 (2005), pp. 1–17 (引用于 p. 79).

[22] N. M. Katz. "Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin". *Publications mathématiques de l'IHES* 39 (1970), pp. 175–232 (引用于 pp. 268, 270, 285).

[23] N. M. Katz. “Algebraic Solutions of Differential Equations (p-Curvature and the Hodge Filtration)”. *Inventiones Mathematicae* 18.1 (1972), pp. 1–118 (引用于 pp. 275, 285).

[24] J. Kollár. “Sharp effective Nullstellensatz”. *Journal of the American Mathematical Society* 1.4 (1988), pp. 963–975 (引用于 p. 79).

[25] S. Lang. *Algebraic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1994. ISBN: 9780387942254. DOI: 10.1007/978-1-4612-0853-2 (引用于 p. 276).

[26] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Vol. 8. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1986 (引用于 pp. 1, 99, 186, 199, 210, 227).

[27] S. Mori. “Projective manifolds with ample tangent bundles”. *Annals of Mathematics* 110.3 (1979), pp. 593–606 (引用于 p. 80).

[28] J. Neukirch. *Algebraic Number Theory*. Vol. 322. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp. xviii+571. ISBN: 3-540-65399-6. DOI: 10.1007/978-3-662-03983-0 (引用于 p. 106).

[29] J.-P. Serre. “How to use finite fields for problems concerning infinite fields”. *Contemporary Mathematics* 14 (2009), pp. 183–193 (引用于 p. 80).

[30] The Stacks project authors. *The Stacks project*. https://stacks.math.columbia.edu. 2023 (引用于 pp. 85, 88, 89, 98, 99, 110, 114, 120, 131, 147, 226, 227, 229, 262, 270).

[31] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics 38. Cambridge University Press, 1994 (引用于 p. 147).

[32] 唐忠明. 交换代数引论. 国家理科基地教材. 科学出版社, 2018. ISBN: 9787030441638.

[33] 李克正. 交换代数与同调代数 (第二版). 现代数学基础丛书. 科学出版社, 2020. ISBN: 703051940X.

名词索引暨英译

中文术语按汉语拼音排序.

Amitsur 复形 (Amitsur complex), 169
Artin–Rees 引理 (Artin–Rees lemma), 61

$\mathcal{B}$-层 ($\mathcal{B}$-sheaf), 19
$\mathcal{B}$-预层 ($\mathcal{B}$-presheaf), 19
伴随素理想 (associated prime ideal), 66
饱和链 (saturated chain), 48
饱和素理想链 (saturated chains of primes), 114
本质有限生成的 (essentially of finite type), 224
不分歧 (unramified), 96
形式不分歧 (unramified), 224
不可约 (irreducible), 14
不可约分支 (irreducible component), 24

参数系 (system of parameters), 112
层 (sheaf), 17
长度 (length), 51
除子 (divisor), 104
除子类群 (divisor class group), 104
Cohen–Macaulay (CM) 环, 193
Cohen–Macaulay (CM) 模, 192

D-模 (D-module), 260
$D^{<n}$-模 ($D^{<n}$-module), 267

导子 (derivation), 211
Dedekind 整环 (Dedekind domain), 94

F-可除模结构 (F-divided module structure), 268
分层 (stratification), 252
分次环 (graded ring), 126
分歧指数 (ramification index), 96
分式理想 (fractional ideal), 102
Frobenius 同态 (Frobenius homomorphism), 234
Frobenius 元 (Frobenius element), 100
符号幂 (symbolic power), 69
复形 (complex), 42
富余参数系 (redundant system of parameters), 112

高度 (height), 15
根式理想 (radical ideal), 14
光滑 (smooth), 224

合成列 (composition series), 48
Hensel 引理 (Hensel's Lemma), 75
Hilbert 多项式 (Hilbert polynomial), 126
Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz), 76, 78, 79

Hilbert–Samuel 多项式 (Hilbert–Samuel polynomial), 127

Jacobian 判据 (Jacobian criterion), 225
茎 (stalk), 18
晶体 (crystal), 250
极小生成元 (minimal generators), 60
极小自由消解 (minimal free resolution), 202
Jordan–Hölder 定理 (Jordan–Hölder theorem), 48
局部化 (localization), 11
局部同态 (local homomorphism), 96

卡式图 (cartesian square), 38
可构造子集 (constructible subset), 26
可积联络 (integrable connection), 242
可逆模 (invertible module), 101
Koszul 复形 (Koszul complex), 188
Krull 交集定理 (Krull's intersection theorem), 62
Krull 主理想定理 (Krull's principle ideal theorem), 113

联络 (connection), 242
零化理想 (annihilator), 53
离散赋值环 (discrete valuation ring), 91
理想类群 (ideal class group), 103

幂零加厚 (nilpotent thickening), 250
模 (module), 29

Nakayama 引理 (Nakayama lemma), 60
拟紧 (quasi-compact), 9
逆极限 (inverse limit), 62
拟同构 (quasi-isomorphism), 135
拟有限 (同态) quasi-finite (homomorphism), 120
Noether 模 (Noetherian module), 47
Noether 正规化定理 (Noether normalization), 77, 111

p-进整数环 (ring of p-adic numbers), 65
p-曲率 (p-curvature), 242
Picard 群 (Picard group), 102
平坦 (flat), 155
平展 (étale), 224
平展坐标系 (étale coordinates), 231

全分式环 (total ring of fractions), 197

曲率 (curvature), 242

深度 (depth), 191
剩余类域次数 (residue field degree), 96
素避引理 (prime avoid lemma), 61
素谱空间 (prime spectrum), 8

(环的) 特征 (characteristic), 234
提升 (lifting), 213
同伦 (homotopy), 135
同伦等价 (homotopy equivalent), 135
投射模 (projective module), 141
投射维数 (projective dimension), 202
投射消解 (projective resolution), 143

万有悬链环 (universally catenary ring), 194
微分模 (module of differential), 212
微分算子 (differential operator), 258
Weil 限制 (Weil restriction), 183
维数 (dimension), 15

下降资料 (descent data), 179
相对 Frobenius 同态 (relative Frobenius homomorphism), 235
形式不分歧 (formally unramified), 216
形式光滑 (formally smooth), 216
形式平展 (formally étale), 216
悬链环 (catenary ring), 193

芽 (germ), 19
一阶加厚 (first order thickening), 214
有限局部自由模 (finite locally free module), 158
有限扩张 (finite extension), 72
有限 A-模 (finite A-module), 30
有限生成代数 (finitely generated algebra), 72
有限生成 A-模 (finitely generated A-module), 30
有限同态 (finite homomorphism), 72
预层 (presheaf), 17
约化环 (reduced ring), 13
余维数 (codimension), 15

Zariski 拓扑 (Zariski topology), 8
Zariski 主定理 (Zariski's Main Theorem), 125
增广标准单形 (augmented standard simplex), 137
增广 Čech 复形 (augmented Čech complex), 138
张量积 (tensor product), 34

整闭包 (integral closure), 72
整闭整环 (normal domain), 85
正合 (exact), 42
整扩张 (integral extension), 72
正则参数系 (regular system of parameters), 130
正则环 (regular ring), 195
正则局部环 (regular local ring), 129
正则序列 (regular sequence), 115, 163
正则元 (M-regular), 67
(自由模的) 秩 (rank), 31
支集 (support), 52
忠实平坦 (faithfully flat), 164
主开集 (principal open subset), 8
准素分解 (primary decomposition), 70
准素理想 (primary ideal), 69