单纯复形的链复形

设K是一个复形. 我们希望构造一个链复形 $(C.(K), \partial.)$.

首先K可决定一个二元组 $\{V, S\}$. 其中V为K的顶点形成的集合, 而S是由V的一些子集形成的集合. 定义为:

$S = \{T \subseteq V \mid$ T非空. 且T中的点是K中某个单形的所有顶点$\}$

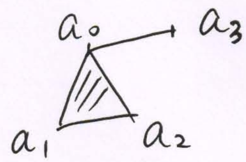
这样的 $\{V, S\}$ 有如下性质:

(1) $\forall a \in V$, $\{a\} \in S$.

(2) 若 $T \subseteq V$ 且 $T \in S$, 则T的任一非空子集也属于S.

直观地说, S决定了V中哪些点可以组合在一起给出K中的单形.

例: 设K为这个复形



则K对应的二元组 $\{V, S\}$ 为:

$V = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$

$S = \{\{a_0, a_1, a_2\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0, a_3\}, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$

不难看出, 任给一个有限集V和由V的一些非空子集形成的集合S ~~任给两个有限集合 V, S~~ 满足上述(1)和(2), 则存在一个单纯复形K, 使得K对应的二元组即为 $\{V, S\}$.

从这个意义上说, 一个单纯复形K的所有信息全包含于它所对应的二元组 $\{V, S\}$ 中.

设复形K对应的二元组为$\{V, S\}$. $\forall n\geq 1$, 我们将乘积集合 $K^n = \underbrace{K\times K\times\cdots\times K}_{n个}$ 中的元素 $(a_1,\cdots,a_n)$ 记作 $\langle a_1\cdots a_n\rangle$.

~~并作如下集合~~ $\forall n\geq 0$, 作集合

$$A_n := \left\{ \langle a_0\cdots a_n\rangle \in K^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \{a_0,\cdots,a_n\}\in S \\ \cancel{且\, a_0,\cdots,a_n\, 互不相同} \end{array} \right\}$$

并定义 $\tilde{C}_n(K)$ 为以 A_n 中元素为基形成的自由Abel群.

若 $A_n=\emptyset$, 则 $\tilde{C}_n(K)$ 定义为零Abel群.

$\forall n<0$, 定义 $\tilde{C}_n(K)=0$.

~~$\forall n\geq 0$~~ $\forall n\geq 1$ 且 $A_n\neq\emptyset$, 记 N_n 为 $\tilde{C}_n(K)$ 中以如下集合中的元素生成的 $\tilde{C}_n(K)$ 的子群:

$$\left\{ \langle a_0\cdots a_n\rangle - (-1)^{\sigma}\langle a_{\sigma(0)}\cdots a_{\sigma(n)}\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle a_0\cdots a_n\rangle\in A_n, \\ \sigma\in S_{n+1}\, 为\{0,\cdots,n\} \\ 的任一置换 \end{array} \right\}$$

其中对一个奇置换σ, $(-1)^{\sigma}:=-1$, 对一个偶置换σ, $(-1)^{\sigma}:=1$.

令 $C_n(K) := \dfrac{\tilde{C}_n(K)}{N_n}$ 为商群. 容易看到若$\{a_0,\cdots,a_n\}\in S$ 且存在 $0\leq i<j\leq n$ 使得 $a_i=a_j$, 则在$C_n(K)$中 $\langle a_0\cdots a_n\rangle=0$.

容易看出 $C_n(K)$ 为自由Abel群，秩为K中n维单形的个数.

若 $n \geq 1$ 且 $A_n = \phi$，则 $C_n(K) := \tilde{C}_n(K) = 0$.

$C_0(K) := \tilde{C}_0(K)$.

若 $n \leq -1$，则 $C_n(K) := 0$.

下面定义边缘同态 $\partial_n: C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$.

容易看到只需考察 $\tilde{C}_n(K)$ 和 $\tilde{C}_{n-1}(K)$ 均非零的情形.

此时定义 $\tilde{\partial}_n$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_n(K) & \longrightarrow & \tilde{C}_{n-1}(K) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \langle a_0 \cdots a_n \rangle & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n \rangle \end{array}$$

其中 $\langle a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n \rangle$ 代表将 a_i 删去.

容易由 $\{V, S\}$ 的性质看出，若 $\langle a_0 \cdots a_n \rangle \in A_n$，则 $\langle a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n \rangle \in A_{n-1}$，$\forall i = 0, \ldots, n$. 从而上面的同态 $\tilde{\partial}_n$ 是良好定义的. ~~又容易验证~~

(指定好 $\tilde{\partial}_n$ 在 $\tilde{C}_n(K)$ 的一组基上的像后，可将其唯一扩充为Abel群同态 $\tilde{C}_n(K) \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \tilde{C}_{n-1}(K)$).

又容易验证，$\forall \alpha \in N_n$，$\tilde{\partial}_n(\alpha) \in N_{n-1}$.

从而 $\tilde{\partial}_n$ 诱导商群 $C_n(K)$ 到 $C_{n-1}(K)$ 的唯一群同态 ∂_n，满足如下交换图表：

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{C}_n(K) \arrow[r, "\tilde{\partial}_n"] \arrow[d] & \tilde{C}_{n-1}(K) \arrow[d] \\
C_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(K)
\end{tikzcd}
$$

又由于容易验证 $\tilde{\partial}_{n-1}\cdot\tilde{\partial}_n = 0$，$\forall n \in \mathbb{Z}$ （若 $\tilde{C}_n(K)$ 或 $\tilde{C}_{n-1}(K)$ 中有一个已经是零，我们规定 $\tilde{\partial}_n = 0$）。

从而得到 $\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$，$\forall n \in \mathbb{Z}$。

从而 $\{C_n(K), \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 为一个链复形，其同调群 $H_n(K)$ 即称为复形K的第n阶同调群。容易看出 $H_n(K)$ 完全由K所对应的二元组 $\{V, S\}$ 所决定，并且满足如下显然的性质：

1) $H_n(K) = 0$，$\forall n < 0$

2) $H_n(K) = 0$，若K中没有n维单形。

3) $H_n(K)$ 为有限生成Abel群，$\forall n \in \mathbb{Z}$。