群的自由积

§ 集合上的关系与等价关系

定义：一个集合 X 上的关系是指一个子集 $R \subseteq X \times X$. 如果 $\forall x \in X$, $(x,x) \in R$, 则称 R 是自反的. 如果 $\forall (x,y) \in R$, 均有 $(y,x) \in R$, 则称 R 是对称的. 如果 $\forall (x,y) \in R$, $\forall (y,z) \in R$, 均有 $(x,z) \in R$. 则称 R 是传递的. 如果一个关系 R 同时是自反的, 对称的和传递的, 则称 R 为等价关系. 一般地, 若 $(x,y) \in R$, 则记为

$$x \sim_R y \quad 或 \quad x \equiv y \pmod R.$$

设 R 为 X 上的一个关系. 令 $\tilde{R} = \bigcap\limits_{\substack{R \subseteq S \subseteq X \times X \\ S为等价关系}} S$, 则 $\tilde{R}$ 为包含 R 的最小等价关系, 也称为由 R 生成的等价关系. 具体说来, 容易验证 $x \equiv y \pmod{\tilde{R}}$ 当且仅当存在有限个元素 $x_1 = x, x_2, \cdots, x_n = y$, 使得 $\forall 1 \le i \le n-1$, $x_i \equiv x_{i+1} \pmod R$ 或 $x_{i+1} \equiv x_i \pmod R$ 成立.

例：设 $f: X \to Y$ 为集合间映射. 定义 X 上的关系 R_f 如下: $x_1 \equiv x_2 \pmod R \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, 即 $R_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$. 则容易验证 R_f 为 X 上等价关系. 称为由 f 决定的等价关系.

由定义, 有如下简单事实:

性质1：设 $f: X \to Y$ 为集合间映射. R 为 X 上关系. $\tilde{R}$ 为 X 上由 R 生成的等价关系. 且 $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \equiv x_2 \pmod R$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$, 则有: $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \equiv x_2 \pmod{\tilde{R}}$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$.

证：记 R_f 为由 f 决定的等价关系. 由条件知 $R \subseteq R_f$.

由于 $\tilde{R}$ 为包含 R 的最小等价关系, 从而 $\tilde{R} \subseteq R_f$. #

同样的方式可证明如下更一般的：

性质2：设 $f: X \to Y$ 为集合间映射, R 为 X 上关系, $\tilde{R}$ 为 X 上由 R 生成的等价关系. 设 S 为 Y 上的一个等价关系, 满足：$\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \equiv x_2 \pmod{R}$, 则 $f(x_1) \equiv f(x_2) \pmod{S}$,
则有：$\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \equiv x_2 \pmod{\tilde{R}}$, 则 $f(x_1) \equiv f(x_2) \pmod{S}$.

证：类似于性质1的证明. #

§ 群的自由积.

定义：设 G, H 为群, 称一个三元组 (L, i_1, i_2)（其中 L 为群, $i_1: G \to L$, $i_2: H \to L$ 为群同态）为 G 和 H 的自由积, 如果其满足如下万有性质:

$$(*):\quad \begin{tikzcd} G \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi"] & & \\ & L \arrow[r, dashed, "\exists ! f"] & L_1 \\ H \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, bend right, "\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

即对任意群 L_1, 以及群同态 $\varphi: G \to L_1$, $\psi: G \to L_1$, 存在唯一的群同态 $f: L \to L_1$ 使得 $\varphi = f \circ i_1$, $\psi = f \circ i_2$.

注：按定义, 严格说来自由积是一个三元组 (L, i_1, i_2) 而不只是一个群. 但一般说 G 和 H 的自由积时, 只记 L, 不显式写出 i_1, i_2. 并且自由积 L 常记作 $G * H$.

下面的性质说明自由积在同构意义下是唯一的.

性质3: 设 G, H 为群. $i_1: G\to L$, $i_2: H\to L$, 以及 $j_1: G\to K$, $j_2: H\to K$ 为群同态. 并且三元组 (L, i_1, i_2) 和 (K, j_1, j_2) 均满足自由积的万有性质(*). 则存在唯一的群同构 $\varphi: L\to K$, 使得 $j_1=\varphi\circ i_1$, $j_2=\varphi\circ i_2$.

证:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "j_1"] & & \\
& L \arrow[r, dashed, shift left, "\varphi_1"] & K \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi_2"] \\
H \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "j_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

由于 (L, i_1, i_2) 满足万有性质(*), 从而存在唯一同态 $\varphi_1: L\to K$, 使得 $j_1=\varphi_1\circ i_1$, $j_2=\varphi_1\circ i_2$.

同样, 由于 (K, j_1, j_2) 满足万有性质(*), 知存在唯一同态 $\varphi_2: K\to L$ 满足 $i_1=\varphi_2\circ j_1$, $i_2=\varphi_2\circ j_2$.

这样, 同态 $\varphi_2\circ\varphi_1: L\to L$ 满足 $i_1=(\varphi_2\circ\varphi_1)\circ i_1$, $i_2=(\varphi_2\circ\varphi_1)\circ i_2$.

显然恒等同态 $id_L: L\to L$ 满足 $i_1=(id_L)\circ i_1$, $i_2=id_L\circ i_2$.

这样由万有性质(*)中群同态的唯一性知 $\varphi_2\circ\varphi_1=id_L$.

同理知 $\varphi_1\circ\varphi_2=id_K$. 从而 $\varphi_1: L\to K$ 为同构且满足 $j_1=\varphi_1\circ i_1$, $j_2=\varphi_1\circ i_2$. ~~唯一性~~ 这样的 φ_1 的唯一性由 (L, i_1, i_2) 所满足的万有性质(*)给出. #

自由积的性质理论上均可以从万有性质(*)导出，因为这是定义性质.

性质4：设 $(G*H, i_1, i_2)$ 为 G 和 H 的自由积. $i_1: G\to G*H$，$i_2: H\to G*H$ 为群同态. 则 i_1, i_2 均为单同态.

证：取 $\varphi = id: G\to G$，$\psi: H\to G$ 为平凡同态.
则由万有性质(*)，存在同态 $f: G*H\to G$，使得
$\varphi = id = f\circ i_1: G\to G$，由 id 为单同态知 i_1 为单同态.
同理可证 i_2 为单同态. #

性质5：设 $(G*H, i_1, i_2)$ 为 G 和 H 的自由积，$(G'*H', i_1', i_2')$ 为 G' 和 H' 的自由积. 设 $\varphi: G\xrightarrow{\sim} G'$，$\psi: H\xrightarrow{\sim} H'$ 为同构.
则存在唯一的同构 $f: G*H\xrightarrow{\sim} G'*H'$，使得

$$f\circ i_1 = i_1'\circ\varphi,\quad f\circ i_2 = i_2'\circ\psi.$$

#

证：练习. 利用万有性质(*).

下面证明自由积的存在性.
给定群 G 和 H. 取无交并集合 $S := G\sqcup H$. $\forall n\geq 1$，
$S^n = \underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{n个}$ 为 n 个 S 的乘积. 称一个元素 $w=(a_1,\cdots,a_n)\in S^n$
为一个长度为 n 的文字，并记作 $w = a_1\cdots a_n$.
取一个单点集合 $S^0=\{e\}$，作无交并集合 $W = \coprod_{n\geq 0} S^n$. 定义一个 W 上的关系 $R\subseteq W\times W$ 如下（G和H的单位元分别记为e_G, e_H）：
设 $w_1, w_2\in W$. 则 $(w_1, w_2)\in R$ 当且仅当下述情形之一成立：

1) $w_1 = a_1a_2\cdots a_n\in S^n$，$n\geq 3$，存在 $1\leq i\leq n-1$，使得 $a_{i+1} = a_i^{-1}$，而 $w_2 = a_1\cdots a_{i-1}a_{i+2}\cdots a_n$.
2) $w_1 = a_1a_2\in S^2$，且 $a_2 = a_1^{-1}$，而 $w_2 = e\in S^0$.
3) $w_1 = a_1a_2\cdots a_n\in S^n$，$n\geq 2$，存在 $1\leq i\leq n$，使得 $a_i = e_G$ 或 e_H，而 $w_2 = a_1\cdots\hat{a_i}\cdots a_n = a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$（"$\hat{a_i}$"代表将 a_i 去掉）.

性质4：设$(G*H, i_1, i_2)$为G和H的自由积．$i_1: G\to G*H$，$i_2: H\to G*H$为群同态．则i_1, i_2均为单同态．

证：取$\varphi = id: G\to G$，$\psi: H\to G$为平凡同态．
则由万有性质(*)，存在同态$f: G*H\to G$．使得
$\varphi = id = f\circ i_1: G\to G$．由$id$为单同态知$i_1$为单同态．
同理可证i_2为单同态． #

性质5：设$(G*H, i_1, i_2)$为G和H的自由积，$(G'*H', i_1', i_2')$为G'和H'的自由积，设$\varphi: G\xrightarrow{\sim} G'$，$\psi: H\xrightarrow{\sim} H'$为同构．
则存在唯一的同构$f: G*H\xrightarrow{\sim} G'*H'$，使得
$$f\circ i_1 = i_1'\circ\varphi,\quad f\circ i_2 = i_2'\circ\psi.$$
#

证：练习．利用万有性质(*)．

下面证明自由积的存在性．
给定群G和H．取无交并集合$S := G\amalg H$．$\forall n\geq 1$，
$S^n = \underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{n个}$为$n$个$S$的乘积．称一个元素$w=(a_1,\cdots,a_n)\in S^n$为一个长度为$n$的文字，并记作$w = a_1\cdots a_n$．
取一个单点集合$S^0 = \{e\}$．作无交并集合$W = \coprod_{n\geq 0} S^n$．定义一个$W$上的关系$R\subseteq W\times W$如下（$G$和$H$的单位元分别记为$e_G$，$e_H$）：
设$w_1, w_2\in W$．则$(w_1, w_2)\in R$当且仅当下述情形之一成立：

1) $w_1 = a_1a_2\cdots a_n\in S^n$，$n\geq 3$，存在$1\leq i\leq n-1$，使得$a_{i+1} = a_i^{-1}$，而
$w_2 = a_1\cdots a_{i-1}a_{i+2}\cdots a_n$．
2) $w_1 = a_1a_2\in S^2$，且$a_2 = a_1^{-1}$，而$w_2 = e\in S^0$．
3) $w_1 = a_1a_2\cdots a_n\in S^n$，$n\geq 2$，存在$1\leq i\leq n$，使得$a_i = e_G$或$e_H$，而
$w_2 = a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_n = a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$（"$\hat{a}_i$"代表将$a_i$去掉）．
4) $w_1 = e_G$或e_H，而$w_2 = e$．

在W上定义一个二元运算

$$\begin{array}{ccc} W\times W & \longrightarrow & W \\ (w_1,w_2) & \longmapsto & w_1\cdot w_2 \end{array}$$

如下:

若 $w_1=a_1\cdots a_n$, $w_2=b_1\cdots b_m$, $m,n\geq 1$, 则 $w_1\cdot w_2:=a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$;

$\forall w\in W$, $e\cdot w:=w\cdot e:=w$.

记 $\widetilde{R}\subseteq W\times W$ 为W上由R生成的等价关系, 则有:

性质6: 设 $w_1,w_2,w_3\in W$, 若 $w_1\equiv w_2\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$, 则 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$, 且 $w_3\cdot w_1\equiv w_3\cdot w_2\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$.

证: 由定义容易验证 $\forall w_1,w_2,w_3\in W$, 若 $w_1\equiv w_2\ (\mathrm{mod}\ R)$, 则 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3\ (\mathrm{mod}\ R)$, 从而 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$.

定义集合间映射 $\varphi_{w_3}: W\longrightarrow W$ 为 $\varphi_{w_3}(w)=w\cdot w_3$.

应用性质2即得: 若 $w_1\equiv w_2\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$, 则 $\varphi_{w_3}(w_1)\equiv\varphi_{w_3}(w_2)\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$, 即 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$. 同样的方法可证 $w_3\cdot w_1\equiv w_3\cdot w_2\ (\mathrm{mod}\ \widetilde{R})$.

#

记W在等价关系 $\widetilde{R}$ 下的等价类集合为 $G*H$, 元素 $w\in W$ 代表的等价类记作 $[w]\in G*H$. 则不难看出性质6保证了 $G*H$ 上如下定义的二元运算是良好定义的:

$$\begin{array}{ccc} G*H\times G*H & \longrightarrow & G*H \\ ([w_1],[w_2]) & \longmapsto & [w_1\cdot w_2] \end{array}$$

性质7: $G*H$ 在如上定义的二元运算下形成一个群.

证: 因为W上的二元运算"具有结合性(显然), 从而 $G*H$ 上如上定义的乘法也自然有结合性. 并且显然 $[e]\in G*H$ 为单位元. 同性质6的证明类似, 不难利用性质2验证如下映射是良好定义的:

$$\begin{array}{ccc} G*H & \longrightarrow & G*H \\ [a_1\cdots a_n] & \longmapsto & [a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}],\quad n\geq 1 \\ [e] & \longmapsto & [e] \end{array}$$

并且显然 $[a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}]$ 是 $[a_1\cdots a_n]$ 的逆元. 从而 $G*H$ 上

$$(w_1, w_2) \longmapsto w_1\cdot w_2$$

若 $w_1=a_1\cdots a_n$, $w_2=b_1\cdots b_m$, $m,n\geq 1$. 则 $w_1\cdot w_2 := a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$;

$\forall w\in W$, $e\cdot w := w\cdot e := w$.

记 $\tilde{R}\subseteq W\times W$ 为 W 上由 R 生成的等价关系. 则有:

性质6: 设 $w_1, w_2, w_3\in W$, 若 $w_1\equiv w_2 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$, 则 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$, 且 $w_3\cdot w_1\equiv w_3\cdot w_2 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$.

证: 由定义容易验证 $\forall w_1, w_2, w_3\in W$, 若 $w_1\equiv w_2 \ (\mathrm{mod}\ R)$, 则 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3 \ (\mathrm{mod}\ R)$, 从而 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$.

定义集合间映射 $\varphi_{w_3}: W\longrightarrow W$ 为 $\varphi_{w_3}(w) = w\cdot w_3$.

再用性质2即得: 若 $w_1\equiv w_2 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$, 则 $\varphi_{w_3}(w_1)\equiv \varphi_{w_3}(w_2) \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$,

即 $w_1\cdot w_3\equiv w_2\cdot w_3 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$. 同样的方法可证 $w_3\cdot w_1\equiv w_3\cdot w_2 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{R})$. #

记 W 在等价关系 $\tilde{R}$ 下的等价类集合为 $G*H$, 元素 $w\in W$ 代表的等价类记作 $[w]\in G*H$. 则不难看出性质6保证了 $G*H$ 上如下定义的二元运算是良好定义的:

$$\begin{aligned} G*H\times G*H &\longrightarrow G*H \\ ([w_1], [w_2]) &\longmapsto [w_1\cdot w_2] \end{aligned}$$

性质7: $G*H$ 在如上定义的二元运算下形成一个群.

证: 因为 W 上的二元运算 "$\cdot$" 具有结合性(显然), 从而 $G*H$ 上如上定义的乘法也自然有结合性. 并且显然 $[e]\in G*H$ 为单位元. 同性质6的证明类似, 不难利用性质2验证如下映射是良好定义的:

$$\begin{aligned} G*H &\longrightarrow G*H \\ [a_1\cdots a_n] &\longmapsto [a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}], \quad n\geq 1 \\ [e] &\longmapsto [e] \end{aligned}$$

并且显然 $[a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}]$ 是 $[a_1\cdots a_n]$ 的逆元. 从而 $G*H$ 上任一元素均可逆. 从而是一个群. #

不难验证 $\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i_1} & G*H \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & [a] \end{array}$ 和 $\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i_2} & G*H \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & [a] \end{array}$ 均为群同态.

并且由构造过程容易看出 $(G*H,\ i_1,\ i_2)$ 满足自由积的万有性质(*). 这样即证明了自由积的存在性.

设 $G_1,\ G_2,\ G_3$ 为群. 由万有性质(*)容易证明 $(G_1*G_2)*G_3 \cong G_1*(G_2*G_3)$, 从而可将 $(G_1*G_2)*G_3$ 记作 $G_1*G_2*G_3$, 其满足类似于(*)的万有性质, 只不过将两个群换为三个群. 同样可对任意多个群定义其自由积, 并证明存在性.

设 $G_1=\mathbb{Z}\cdot a_1$, $G_2=\mathbb{Z}\cdot a_2$ 均为秩1的自由Abel群, 生成元为 a_1, a_2. 则记 $G_1*G_2=F(a_1,a_2)$, 称为由 a_1, a_2 生成的自由群. 同样可以定义任意多元素生成的自由群.

设 $j_1: N\to G$, $j_2: N\to H$ 为群同态; $(G*H,\ i_1,\ i_2)$ 为 G 和 H 的自由积, 定义 $G*H$ 的商群

$$G*_N H := G*H \big/ [\{i_1(j_1(a))\cdot i_2(j_2(a^{-1}))\mid a\in N\}]$$

其中对 $G*H$ 的子集 S, 我们用 $[S]$ 表示 $G*H$ 中包含 S 的最小正规子群. 由 $G*H$ 的万有性质不难验证 $G*_N H$ 满足如下万有性质:

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[r, "\bar{i}_1"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & G*_N H \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & L \\ N \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & & \\ & H \arrow[ur, "\bar{i}_2"'] \arrow[uurr, bend right, "\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

其中 $\bar{i}_1, \bar{i}_2$ 均为由 i_1, i_2 诱导的群同态.

(**)的意思为: 1) $\bar{i}_1\circ j_1=\bar{i}_2\circ j_2$;

2) 对任意群 L, 群同态 $\varphi: G\to L$, $\psi: H\to L$, 若 $\varphi\circ j_1=\psi\circ j_2$, 则存在唯一的群同态 $f: G*_N H\to L$, 使得 $\varphi=f\circ\bar{i}_1$, $\psi=f\circ\bar{i}_2$.

严格说来，给定群同态 $j_1: N\to G$，$j_2: N\to H$，三元组 $(G*_N H, \bar{i}_1, \bar{i}_2)$ 而不单是群 $G*_N H$ 满足万有性质(**)．并且不难表述并利用万有性质证明一个类似于性质3的结论.

同样，类似于性质5，我们有：

性质8：给定一个群同态的交换图表如下：

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dd, "\beta", "\wr"'] & \\
N_1 \arrow[ur, "j_1'"] \arrow[rr, "j_2'"] \arrow[dd, "\alpha"', "\wr"] & & H_1 \arrow[dd, "\wr"', "\gamma"] \\
 & G & \\
N \arrow[ur, "j_1"] \arrow[rr, "j_2"'] & & H
\end{tikzcd}
$$

其中 α,β,γ 均为同构．则存在唯一的群同构 $\varphi: G_1*_{N_1}H_1\to G*_N H$，使得以下图表交换：

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[rr, "\bar{i}_1'"] \arrow[dd, "\beta"', "\wr"] & & G_1*_{N_1}H_1 \arrow[dd, "\varphi"', "\wr"] \\
N_1 \arrow[ur, "j_1'"] \arrow[rr, "j_2'"] \arrow[dd, "\alpha"', "\wr"] & & H_1 \arrow[ur, "\bar{i}_2'"] \arrow[dd, "\gamma"', "\wr"] & \\
 & G \arrow[rr, "\bar{i}_1"] & & G*_N H \\
N \arrow[ur, "j_1"] \arrow[rr, "j_2"] & & H \arrow[ur, "\bar{i}_2"] &
\end{tikzcd}
$$

其中 $\bar{i}_1', \bar{i}_2', \bar{i}_1, \bar{i}_2$ 为自由积中出现的同态所诱导的群同态.

证明：利用万有性质(**)，留作练习． #