中国科学 (A 辑)
第 32 卷 第 11 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2002 年 11 月

高次 Koszul 模*

叶 郁** 章 璞***
(中国科学技术大学数学系, 合肥 230026)

摘要 引进了高次 Koszul 模, 从而推广了 Koszul 模的概念. 对于分次代数 Λ, 考察了可线性表现分次模范畴 $\mathcal{L}(\Lambda)$ 与其全子范畴 $\mathcal{K}_t(\Lambda)$, 即 t-Koszul 模范畴的关系. 即使当 $t=2$ 时, 对满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_2(\Lambda)$ 的代数 Λ 进行分类仍是一个未解决的问题. 对于任一正整数 $t\geqslant 2$, 给出了满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 的单项代数 Λ 的组合分类.

关键词 Koszul 模 t-Koszul 模 箭图 t- 单项代数

在分次代数、代数几何和代数拓扑的研究中, 具有 Koszul 分解的研究对象具有基本重要的意义 (参见文献 [1~5] 等). 在代数学中, 将具有 Koszul 分解的表示称为 Koszul 模, 即具有如下性质的表示: 其分次极小投射分解中第 i 项分次投射表示是 i 次生成的.

本文推广了 Koszul 模的概念, 引入高次 Koszul 模 (t-Koszul 模). 当 $t=2$ 时, t-Koszul 模就是通常的 Koszul 模. 对于分次代数 Λ, 考察了可线性表现分次模范畴 $\mathcal{L}(\Lambda)$ 与其全子范畴 $\mathcal{K}_t(\Lambda)$, 即 t-Koszul 模范畴的关系. 即使是对 $t=2$ 情形, 对满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_2(\Lambda)$ 的代数 Λ 进行分类仍是一个未解决的问题. 本文对于任一正整数 $t\geqslant 2$, 给出了满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 的单项代数 Λ 的组合分类.

1 高次 Koszul 模

1.1 预备知识

本文中, t 是任一给定的正整数且 $t\geqslant 2$, k 是任一给定的域, 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数集. 本文总假设 $\Lambda=\Lambda_0\bigoplus\Lambda_1\bigoplus\cdots$ 是正分次 k- 代数, 其中每一 Λ_i 均为有限维 k- 向量空间. 假定 Λ 为可裂基 (elementary) 代数 (即 Λ_0 为有限个 k 的直积), 并且 Λ 是由 0, 1 次生成的, 即 $\Lambda_i\Lambda_j=\Lambda_{i+j}, \forall\, i,j$. 这种代数称为有限 0, 1 生成可裂基代数. 由文献 [5] 知, Λ 必同构于路代数的齐次商, 即有 $\Lambda\cong kQ/I$, 其中 Q 为有限箭图, $I\subseteq J^2$ 为 kQ 中某些长度不小于 2 的齐次元生成的双边理想, J 为 kQ 中的所有箭向生成的双边理想. 特别地, 如果理想 I 可以由 kQ 中一些长度等于 t 的道路生成, 则称 Λ 为 t- 单项 (t-monomial) 代数. 注意 Λ 可以为无穷维代数.

2002-02-21 收稿
* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 19971080)
** E-mail: yeyu@ustc.edu.cn
*** E-mail: pzhang@ustc.edu.cn

事实上，由于 I 是由 kQ 的齐次元生成的，Λ 为有限维代数当且仅当 I 是容许 (admissible) 理想，即存在某个不小于 2 的正整数 N, 使得 $J^N \subseteq I$. 记 Λ-mod 为所有有限生成左 Λ- 模范畴. 本文中所考虑的模均指有限生成左模.

称 Λ- 模 M 为分次 Λ- 模，如果 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$, 其中每一 M_i 均为有限维 k- 向量空间，且满足 $\Lambda_i M_j \subseteq M_{i+j}$, $\forall i,j \in \mathbb{Z}$. 对于整数 n, 分次 Λ- 模 M 称为 n 次生成模，或称 M 是 n 次生成的，如果 $M_i = 0$, 对于 $i < n$; 且 $M_{i+n} = \Lambda_i M_n$, 对于 $i \geqslant 0$. 易知，M 为 0 次生成模当且仅当 $M_i = \Lambda_i M_0$, $\forall\ i \in \mathbb{Z}$. 令 M, N 为分次 Λ- 模，Λ- 态射 $f:\ M \to N$ 称为 0 次映射，若 $f(M_i) \subseteq N_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. 用 $\mathrm{gr}(\Lambda)$ 表示所有有限生成分次 Λ- 模及相互间的 0 次映射所形成的 Λ-mod 的子范畴.

若 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ 为分次 Λ- 模，n 为任一整数，定义 $M[n]$ 为分次 Λ- 模 $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N_i$, 其中 $N_i = M_{i-n}$. 注意到 Λ 本身可看做 0 次生成的分次 Λ- 模. 如果 P 为 Λ 的分次直和项，则 $P[n]$ 为分次投射 Λ- 模. 分次投射 Λ- 模均可表示成形如 $P[n]$ 的投射模的直和，其中 P 是 Λ 的某个分次直和项, n 为某一整数.

将箭图 Q 的顶点集记为 Q_0 , 将箭向集记为 Q_1. 对于箭向 $\alpha \in Q_1$. 令 $s(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 分别表示 α 的起点和终点. Q 中道路的合成由从右到左给出. 对于顶点 $v \in Q_0$, 用 e_v 表示 Q 中起点和终点均为 v 的平凡道路，即长为 0 的道路. 易知, $1 = \sum_{v\in Q_0} e_v$ 为 kQ 的正交本原幂等元分解.

对于 $v \in Q_0$, Λe_v 为 0 次生成分次投射 Λ- 模. 若 M 为分次 Λ- 模 M, 则存在有限指标集 $\mathcal{I}$ 以及映射 $\mu:\ \mathcal{I} \to Q_0$, $d:\ \mathcal{I} \to \mathbb{Z}$ 和 $f:\ \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \Lambda e_{\mu(i)}[d(i)] \to M$, 使得 f 为 M 的分次投射盖. 特别地，若 P 为分次投射 Λ- 模，则 P 可分解为形如 $\Lambda e_v[n]$ 的投射模的直和，其中 $v \in Q_0$, $n \in \mathbb{Z}$. 一个基本的事实是：对于分次 Λ- 模 M, M 在范畴 $\mathrm{gr}(\Lambda)$ 中总存在极小投射分解，称为分次极小投射分解.

记 $\mathrm{gr}_0(\Lambda)$ 为由 0 次生成分次 Λ- 模所形成的 $\mathrm{gr}(\Lambda)$ 的全子范畴. 称 0 次生成分次模 M 可线性表现，如果有 $\mathrm{gr}(\Lambda)$ 中的正合列 $P^1 \to P^0 \to M \to 0$, 使得 P^0 和 P^1 分别是 0, 1 次生成的. 用 $\mathcal{L}(\Lambda)$ 表示 $\mathrm{gr}_0(\Lambda)$ 中所有可线性表现模全体所形成的全子范畴.

Λ 的分次 Jacobson 根记为 $\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \cdots$. 称 Λ 为二次 (quadratic) 代数，如果 $\mathbf{r}[-1] \in \mathcal{L}(\Lambda)$；或者等价地，如果存在 $\mathrm{gr}(\Lambda)$ 中的正合列 $P^2 \to P^1 \to P^0 \to \Lambda_0 \to 0$, 使得 P^i 是由 i 次生成的, $i = 0, 1, 2$.

1.2　t-Koszul 模和 t-Koszul 代数的定义

定义 1.1　分次模 $M \in \mathrm{gr}_0(\Lambda)$ 称为 t-Koszul 模，如果 M 有分次投射分解

$$\cdots \longrightarrow P^{2m+1} \longrightarrow P^{2m} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 P^{2m} 是 mt 次生成的，而 P^{2m+1} 是 $mt+1$ 次生成的，对任意 $m \geqslant 0$. 用 $\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 表示由 t-Koszul 模所形成的 $\mathrm{gr}_0(\Lambda)$ 的全子范畴. 如果 $\Lambda_0 \in \mathcal{K}_t(\Lambda)$, 则称 Λ 为 t-Koszul 代数.

特别地，若 $t = 2$, 则 $\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 中对象就是文献 [3] 中定义的 Koszul 模，也是文献 [6] 中定义的可线性分解模. 易知，$\mathcal{K}_t(\Lambda) \subseteq \mathcal{L}(\Lambda)$, 但反过来未必成立 (见 1.3(iii)).

由定义，如果 $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_t(\Lambda)$, 则 Λ 为 t-Koszul 代数，这是因为总有 $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(\Lambda)$.

1.3 若干例子

(i) 设 $\Lambda = kQ$ 为路代数，其中 Q 为任意有限箭图，则对任意的 $t \geqslant 2$, Λ 均是 t-Koszul 代数，且满足 $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_t(\Lambda)$.

(ii) 对任意 $t \geqslant 2$, 截面 (truncated) 代数 $\Lambda = kQ/J^t$ 均是 t-Koszul 代数，其中 Q 为任一有限箭图，J 是 kQ 中所有箭向生成的双边理想. 同样，截面代数均满足 $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_t(\Lambda)$.

(iii) 设 Λ 是由箭图

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[dr, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & & & 6 \arrow[r, "\theta"] & 7 \\ & 3 \arrow[r, "\epsilon"'] & 5 \arrow[ur, "\zeta"'] & & \end{tikzcd}$$

以及生成关系 $\gamma\beta\alpha - \zeta\epsilon\delta$, $\theta\gamma\beta$ 给出的代数，则 Λ 是 3-Koszul 代数，但 $\mathcal{L}(\Lambda) \neq \mathcal{K}_3(\Lambda)$. 事实上，考虑模 $M = \Lambda e_1/\Lambda\delta \in \mathcal{L}(\Lambda)$, 易知 M 有分次极小投射分解: $\Lambda e_7[4] \to \Lambda e_3[1] \to \Lambda e_1 \to M$, 故 $M \notin \mathcal{K}_3(\Lambda)$.

(iv) 与 Koszul 代数不同，对于 $t \geqslant 3$ 情形，t- 单项 (monomial) 代数不一定是 t-Koszul 代数. 例如，设 Λ 是由箭图

$$\overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{\gamma} \overset{3}{\bullet} \xrightarrow{\delta} \overset{4}{\bullet} \xrightarrow{\varepsilon} \overset{5}{\bullet}$$

和关系 $\gamma\beta\alpha$, $\varepsilon\delta\gamma$ 给出的代数，则 Λ 不是 3-Koszul 代数. 考虑顶点 0 对应的单模 S_0, 易知 S_0 具有分次极小投射分解: $\Lambda e_5[5] \to \Lambda e_3[3] \to \Lambda e_1[1] \to \Lambda e_0 \to S_0$, 其中 $\Lambda e_5[5]$ 是 5 次生成的，而不是 4 次生成的.

(v) 设 $\Lambda = kQ/I$ 是 t-Koszul 代数，其中 I 是某些 t 次齐次元生成的理想，则类似于 Koszul 情形，Λ^{opp} 也是 t-Koszul 代数，其中 Λ^{opp} 表示 Λ 的反代数. 同样， $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_t(\Lambda)$ 并不表明 $\mathcal{L}(\Lambda^{\mathrm{opp}}) = \mathcal{K}_t(\Lambda^{\mathrm{opp}})$. 事实上，设 Λ 由箭图

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & 4 \arrow[l, "\beta"'] & & \\ 1 & & & 6 \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[dl, "\zeta"] & 7 \arrow[l, "\theta"'] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] & 5 \arrow[l, "\varepsilon"] & & \end{tikzcd}$$

以及生成关系 $\alpha\beta\gamma - \delta\varepsilon\zeta$, $\beta\gamma\theta$ 给出，则 $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_3(\Lambda)$, 而 $\mathcal{L}(\Lambda^{\mathrm{opp}}) \neq \mathcal{K}_3(\Lambda^{\mathrm{opp}})$.

(vi) 设 $\Lambda = kQ/I$, I 是某些长度等于 t 的齐次元生成的理想. 若 Q 中道路最大长度不大于 $t+1$, 则 Λ 是 t-Koszul 代数，但此时不再有 $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_t(\Lambda)$, 可参照例 (iii).

(vii) 设 $\Lambda = kQ/I$, I 是 kQ 中某些 t 次齐次元生成的理想. 对任意 Λ- 模 M, 设 M 具有分次极小投射表现 $P^1 \xrightarrow{f} P^0 \to M \to 0$. 若满足:

(1) 如果 P^0, P^1 分别是 $0, 1$ 次生成的，则 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 t 次生成的;

(2) 如果 P^0, P^1 分别是 $0, t-1$ 次生成的，则 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 t 次生成的,

则由归纳法可知 $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{K}_t(\Lambda)$. 注意，上述条件 (1) 为必要条件，而条件 (2) 并非必要条件. 例如，设 Λ 是例 (v) 中给出的代数，考虑 Λ- 模 $M = \Lambda e_7/\Lambda\zeta\theta$, 则 M 有分次极小投射分解 $\Lambda e_1[4] \to \Lambda e_5[2] \xrightarrow{f} \Lambda e_7 \to M \to 0$, 其中 $\Lambda e_1[4]$ 是 4 次生成的，从而 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 4 次生成的，而不是 3 次生成的.

2　单项 t-Koszul 代数

对于任一正整数 $t \geqslant 2$, 一个基本而自然的问题是将所有满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 的代数 Λ 进行分类. 这一问题过于庞大, 即使对于 $t=2$ 的情形, 这仍是一个未解决问题 [6]. 然而, 一方面根据文献 [6] 定理 1.5 知 2 次单项代数 Λ 总满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_2(\Lambda)$; 另一方面知道, 当 $t \geqslant 3$ 时, t- 单项代数 Λ 未必满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$, 因此, 首先考虑这样较简单的问题: 将具有性质 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 的 t- 单项代数进行分类, 这就是本节的主要目的. 显然满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 的代数必是单项 t-Koszul 代数. 我们将证明满足 $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$ 的 t- 单项代数恰好就是所有的单项 t-Koszul 代数.

以下总设 $\Lambda=kQ/I$, 其中 Q 是有限箭图, I 是由某些长度不小于 2 的齐次元生成的理想. 首先对 Λ 引进下述条件:

条件 $(*)$　在 Λ 中, 若有 $p_{t-1}\alpha=0=q\beta p_{t-1}$, 而 $q\beta\neq 0$, 其中 $\alpha,\beta\in Q_1$, p_{t-1} 和 q 分别是满足 $l(p_{t-1})=t-1$ 和 $l(q)\geqslant 1$ 的道路, $l(q)$ 表道路 q 的长度, 则 $\beta p_{t-1}=0$.

在应用中将上述条件翻译成如下图示更为方便:

$$\bullet \xrightarrow{\alpha} \overbrace{\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet}^{p_{t-1}} \xrightarrow{\beta} \overbrace{\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet}^{q}$$

现在可以刻画可线性表现模范畴与 t-Koszul 模范畴重合的 t- 单项代数的组合分类, 这是本文的主要结果.

定理 2.1　设 Λ 为 t- 单项代数, $t\geqslant 2$, 则下述条件等价:

(1) $\mathcal{L}(\Lambda)=\mathcal{K}_t(\Lambda)$;

(2) Λ 为 t-Koszul 代数;

(3) 对任意单模 S, 设

$$\cdots \longrightarrow P^2 \xrightarrow{g} P^1 \xrightarrow{f} P^0 \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

为 S 的分次极小投射分解, 则 $K:=\mathrm{Ker}g$ 是由 $t+1$ 次生成的;

(4) Λ 满足条件 $(*)$.

注　若 $t=2$, 则条件 $(*)$ 必定满足, 这就是文献 [6] 定理 1.5.

3　主要定理的证明

在给出主要定理的证明之前, 需要做一些准备工作. 由于单项代数生成关系是由道路给出的, 在考察单项代数及其上的模时, 能够取到一组由道路组成的基, 从而达到简化问题的目的.

引理 3.1　设 $\Lambda=kQ/I$ 为单项代数, $P\xrightarrow{f}P'$ 是 0 次 Λ- 映射, $K=\mathrm{Ker}f$, 其中 P 和 P' 分别是 s 和 s' $(s>s')$ 次生成的投射 Λ- 模. 令 $P=\bigoplus\limits_i(\Lambda e_{v_i})^{m_i}[s]$, 其中 $(\Lambda e_{v_i})^{m_i}$ 为 m_i 个 Λe_{v_i} 的直和, v_i 为 Q 中互不相同的顶点. 令 $l\geqslant 0$, $x=\sum_i x_i\in P_{s+l}=\bigoplus\limits_i(\Lambda_l e_{v_i})^{m_i}$, 其中 $x_i\in(\Lambda_l e_{v_i})^{m_i}$, P_{s+l} 为 P 的 $(s+l)$ 次齐次分支, 则有

(1) $x\in K_{s+l}$ 当且仅当 $x_i\in K_{s+l}$, 对任意的 i.

(2) 令 v 为某个 v_i, $m=m_i$, $x_v\in(\Lambda_l e_v)^m\subseteq P_{s+l}$, 则 x_v 可惟一表达为

$$x_v=\sum_p Pv_p,$$

其中 p 取遍 Λ 中以 v 为起点，长为 l 的非零道路，$v_p=(c_{p1}e_v,\cdots,c_{pm}e_v)\in(\Lambda_0 e_v)^m=(ke_v)^m$, $c_{pj}\in k$.

(3) 设 v,m,x_v,p,v_p 如 (2) 中所示，则 $x_v\in K_{s+l}$ 当且仅当 $pv_p\in K_{s+l}, \forall p$.

证 通过平移，可假定 $s'=0$. 由于只讨论 $K=\mathrm{Ker}f$, 不失一般性，可以假定 P' 不可分解，即 $P'=\Lambda e_u$, 其中 $u\in Q_0$.

注意到 x_i 是以 v_i 为起点，长为 l 的道路的线性组合. 由于 Λ 为单项代数，而 v_i 互不相同，从而 $f(x)=0$ 当且仅当 $f(x_i)=0, \forall i$. 由此 (1) 得证.

由于 Λ 为单项代数，所有以 v 为起点，长为 l 且在 Λ 中非零的道路组成 $\Lambda_l e_v$ 的一组基，由此 (2) 显然成立.

下面证明 (3). 记 $(\Lambda e_v)^m=\Lambda e_{v_1}\oplus\cdots\oplus\Lambda e_{v_m}$, 其中 $v_1=\cdots=v_m=v$. 令

$$f(e_{v_j})=\sum_w c_{jw}q_{jw}e_u,$$

其中 $0\neq c_{jw}\in k$, q_{jw} 均为从 u 到 v 且长为 s 的道路，使得对于 $w\neq w'$, $q_{jw}\neq q_{jw'}$. 注意对于不同的 j 和 j', q_{jw} 可能与 $q_{j'w'}$ 相同. 但有

$$f(x_v)=\sum_p\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_{pj}\ p\ f(e_{v_j})=\sum_p p\Big(\sum_{j,w} c_{pj}\ c_{jw}q_{jw}\Big)=0.$$

由于 Λ 为单项代数，p 为两两不同的道路，因此 $f(x_v)=0$ 当且仅当

$$p\Big(\sum_{j,w} c_{pj}\ c_{jw}q_{jw}\Big)=0\quad(\forall p),$$

当且仅当 $pv_p\in K_{s+l}$ 对任意 p 成立. 证毕.

引理 3.2 设 $\Lambda=kQ/I$ 为 t- 单项代数. 设 $M\in\mathcal{L}(\Lambda)$ 有分次极小投射表现

$$P^1\xrightarrow{f}P^0\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

其中 P^0,P^1 分别由 $0,1$ 次生成，则 $K:=\mathrm{Ker}f$ 是由 t 次生成的.

证 不失一般性，假定 P^0 不可分解，即有 $P^0=\Lambda e_u$, 其中 $u\in Q_0$. 令 $x\in K_s\subseteq P_s^1$, 其中 $s\geqslant 1$. 由引理 3.1, 可假定 $x=pv_p$, p 为某条以 v 为起点，长为 $s-1$ 且在 Λ 中非零的道路，$v_p=(c_{p1}e_v,\cdots,c_{pm}e_v)\in(\Lambda_0 e_v)^m$, $c_{pj}\in k$. 将 P^1 的直和项 $(\Lambda e_v)^m[1]$ 写成 $\Lambda e_{v_1}[1]\oplus\cdots\oplus\Lambda e_{v_m}[1]$ 的形式，其中 $v_1=\cdots=v_m=v$, 则 $x=pv_p\in K_s$ 当且仅当

$$p\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_{pj}f(e_{v_j})\Big)=0.$$

因为 f 是极小的, 即 $\mathrm{Ker}f\subseteq \mathrm{rad}P^1$, 所以 $\{f(e_{v_1}),\cdots,f(e_{v_m})\}$ 是 k- 线性无关集, 从而若 $v_p\neq 0$, 则 $\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_{pj}f(e_{v_j})\neq 0$.

若 $v_p\neq 0$, 记

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_{pj}f(e_{v_j})=\sum_i c_i a_i,$$

其中 $c_i\neq 0$, a_i 是以 u 为起点、两两不同的箭向.

为证明 K 是由 t 次生成的，首先假定 $s<t$. 由于 $l(pa_i)=s<t$ 以及 Λ 是 t- 单项代数，故 $K_s=0$, 从而对于 $s<t$, 有 $K=K_{\geqslant t}$, 即 $K_s=0$, 对 $s<t$.

现在考虑 $s>t$ 情形. 将 p 写成 $p=p_{s-t}p_{t-1}$，其中 p_{s-t} 是长为 $s-t$ 的道路，p_{t-1} 是长

为 $t-1$ 的道路．由于 Λ 为 t- 单项代数，p 在 Λ 中非零，故推出

$$p_{t-1}\Big(\sum_i c_i a_i\Big)=0.$$

这表明 $p_{t-1}v_p\in K_t$, 从而 $pv_p=p_{s-t}p_{t-1}v_p\in\Lambda_{s-t}K_t$. 这样就证明了 K 是 t 次生成的．

引理 3.3　设 $\Lambda=kQ/I$ 为 t- 单项代数，$P^1\xrightarrow{f}P^0$ 是分次极小 Λ- 映射，$K^1:=\mathrm{Ker}f$, 其中 P^0 和 P^1 分别为 0,1 次生成分次投射 Λ- 模．令 $P^1=\bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Lambda e_{u_i}[1]$, 其中 $u_i\in Q_0$ (但对不同的 i, u_i 可能相同)．设

$$0\neq y=\Big(\sum_w c_{1w}\alpha_{1w}e_{u_1},\cdots,\sum_w c_{nw}\alpha_{nw}e_{u_n}\Big)\in K_t^1\subseteq P_t^1,$$

其中 $c_{iw}\in k$, α_{iw} 均为长为 $t-1$ 的道路 ($\forall\, i,w$), 则对任意 α_{iw}, 若 $c_{iw}\neq 0$, 总存在箭向 a, 使得在 Λ 中有 $\alpha_{iw}a=0$.

证　对于固定的 i 和不同的 w, α_{iw} 互不相同，但对于 $i\neq i'$, α_{iw} 有可能等于 $\alpha_{i'w'}$. 令

$$\{\,q_1,\cdots,q_s\,\}\;=\;\{\,\alpha_{iw}\mid i,w,c_{iw}\neq 0\,\},$$

则 $q_1,\cdots,q_s$ 是长为 $t-1$ 的互不相同的道路．对每个 $1\leqslant i\leqslant n$, 将 y 的 i 次分支重新写成

$$\sum_w c_{iw}\alpha_{iw}=\sum_{1\leqslant j\leqslant s}c'_{ij}q_j,$$

则 $y\in K^1$ 表明

$$0=\sum_i\Big(\sum_w c_{iw}\alpha_{iw}f(e_{u_i})\Big)=\sum_i\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant s}c'_{ij}q_j\Big)f(e_{u_i})=\sum_{1\leqslant j\leqslant s}q_j\Big(\sum_i c'_{ij}f(e_{u_i})\Big)$$

对每个 j, q_j 至少会在 y 的某个分支出现一次．这表明向量

$$(c'_{1j},\cdots,c'_{nj})\neq 0,\quad\forall\, j.$$

由于 f 极小，故

$$\{\,f(e_{u_i})\mid i=1,\cdots,n\,\}$$

是 P_1^0 的 k- 线性无关子集，从而

$$\sum_i c'_{ij}f(e_{u_i})\neq 0,\quad\forall\, j.$$

注意到 $\sum_i c'_{ij}f(e_{u_i})$ 为 Q 中箭向的 k- 线性组合．由于 $q_1,\cdots,q_s$ 是长为 $t-1$ 的互不相同的道路，而且 Λ 为 t- 单项代数，故由等式

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant s}q_j\Big(\sum_i c'_{ij}f(e_{u_i})\Big)=0$$

可知，对任一 q_j, 存在某个箭向 a, 使得 $q_ja=0$. 证毕．

现在可以完成定理 2.1 的证明．

定理 2.1 的证　(1)$\Longrightarrow$(2), (2)$\Longrightarrow$(3) 由定义可知．

下面证明 (3)$\Longrightarrow$(4). 令 α, p_{t-1}, β, q 如条件 $(*)$ 中所示，即在 Λ 中有

$$p_{t-1}\alpha=0=q\beta p_{t-1},\quad q\beta\neq 0.$$

现在证明在 Λ 中，$\beta p_{t-1}=0$. 令 v_1 为 α 的起点．设

$$\cdots\longrightarrow P^2\xrightarrow{g}P^1\xrightarrow{f}P^0\longrightarrow S(v_1)\longrightarrow 0$$

是 $S(v_1)$ 的极小分次投射分解，$S(v_1)$ 为顶点 v_1 对应的单模，从而由题设 $K:=\mathrm{Ker}g$ 是 $t+1$ 次生成的.

设 $\{\ \alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ \}$ 是以 v_1 为起点的所有箭向的集合，则有

$$P^1=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant m}(\Lambda e_{t(\alpha_i)})[1],\qquad f(e_{t(\alpha_i)})=\alpha_i,\ i=1,\cdots,m.$$

令 $K^1:=\mathrm{Ker}f$. 由引理 3.2, K^1 是 t 次生成的. 又由于在 Λ 中有 $f(p_{t-1})=p_{t-1}\alpha=0$，因此 $p_{t-1}\in K^1_t\subseteq P^1_t$. 而 P^2 为 K^1 的投射盖，且 K^1 是 t 次生成的，从而 P^2 有不可分解直和项 $(\Lambda e_v)[t]$, 使得 $g(e_v)=p_{t-1}$, 其中 v 为 β 的起点.

而题设 " 在 Λ 中 $q\beta p_{t-1}=0$ 且 $q\beta\neq 0$" 表明 $0\neq q\beta\in K_{t+l+1}$, $q\beta\in\Lambda_{l+1}e_v$, 其中 $l=l(q)\geqslant 1$. 因为 K 是 $t+1$ 次生成的，故有 $K_{t+l+1}=\Lambda_l K_{t+1}$. 又由于 Λ 为 t- 单项代数，因此 $\beta\in K_{t+1}$, 这表明在 Λ 中

$$\beta g(e_v)=\beta p_{t-1}=0.$$

这样，就证明了 Λ 满足条件 $(*)$.

现在证明 (4)$\Longrightarrow$(1). 设 $M\in\mathcal{L}(\Lambda)$ 且 M 有分次极小投射分解

$$\cdots\longrightarrow P^2\xrightarrow{g}P^1\xrightarrow{f}P^0\longrightarrow M\longrightarrow 0.$$

由归纳法，只需证明 P^2 是 t 次生成的且 $K:=\mathrm{Ker}g$ 是 $t+1$ 次生成的. 而由引理 3.2 可知 P^2 是 t 次生成的，因此，只需证明 K 是 $t+1$ 次生成的.

对任一 $0\neq x\in K_{t+l}\subseteq P^2_{t+l}$, $l\geqslant 2$, 要证明 $x\in\Lambda_{l-1}K_{t+1}$. 对于 Λ- 映射 g, 应用引理 3.1, 可以假定 $x=pv_p\in K_{t+l}$, 其中 p 是长为 l 的道路，$v_p=(c_1e_v,\cdots,c_me_v)\in(\Lambda_0e_v)^m$. 要证明 $pv_p\in\Lambda_{l-1}K_{t+1}$.

为了区别不同分支中的 e_v, 令 $v_1=\cdots=v_m=v$, 并将 P^2 的直和项 $(\Lambda e_v)^m[t]$ 写成 $\Lambda e_{v_1}[t]\oplus\cdots\oplus\Lambda e_{v_m}[t]$. 于是 $pv_p\in K_{t+l}$ 表明

$$p\sum_{1\leqslant j\leqslant m}c_jg(e_{v_j})=0.\tag{3.1}$$

由于 g 为极小映射，因此 $\{\ g(e_{v_1}),\cdots,g(e_{v_m})\ \}$ 为 P^1_t 的 k- 线性无关子集，从而

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m}c_jg(e_{v_j})\neq 0.$$

令 $P^1=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n}(\Lambda e_{u_i})[1]$, 其中 $u_i\in Q_0$ (注意 u_i 不一定互不相同). 假设

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m}c_jg(e_{v_j})=\Big(\sum_w c_{1w}\alpha_{1w}e_{u_1},\cdots,\sum_w c_{nw}\alpha_{nw}e_{u_n}\Big)\in P^1_t,\tag{3.2}$$

其中 $c_{iw}\in k$, α_{iw} 是长为 $t-1$ 的道路 $(\forall\ i,w)$. 结合 (3.1) 和 (3.2) 式有

$$p\sum_w c_{iw}\alpha_{iw}=0,\ \ \forall\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

由于对固定的 i, α_{iw} 均为互不相同的道路 (注意对不同的 i, α_{iw} 有可能相同), 且由于 Λ 为单项代数，因此

$$c_{iw}p\alpha_{iw}=0,\quad\forall\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

于是

$$p\alpha_{iw}=0,\quad c_{iw}\neq 0.$$

由于 $0 \neq \sum_j c_j g(e_{v_j}) \in K_t^1$, 由引理 3.3 知对于 α_{iw}, $c_{iw} \neq 0$, 均存在箭向 a, 使得

$$\alpha_{iw} a = 0.$$

为利用条件 $(*)$, 将 p 写成 $p = p'\beta$, 其中 $\beta \in Q_1$. 这样，若 $c_{iw} \neq 0$, 就可得到 Q 的子箭图

$$\bullet \xrightarrow{\alpha} \overbrace{\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet}^{\alpha_{iw}} \xrightarrow{\beta} \overbrace{\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet}^{p'}$$

现在，对上述 a, α_{iw}, β, p' 应用条件 $(*)$, 可得到

$$\beta \alpha_{iw} = 0, \quad c_{iw} \neq 0.$$

这说明 $\beta \sum_j c_j g(e_{v_j}) = 0$, 即有 $\beta v_p \in K_{t+1}$. 这样，就证明了

$$\alpha v_p = p'\beta v_p \in \Lambda_{l-1} K_{t+1}.$$

定理证毕.

参　考　文　献

1 Löfwall C. On the subalgebra generated by the one dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. In: Roos J E, ed. Algebra, Algebraic Topology and Their Interactions, LNM 1183: Proceedings of a Conference Held in Stockholm, Aug 3-13, 1983. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1983. 291～338

2 Priddy S. Koszul resolutions. Trans Amer Math Soc, 1970, 152: 39～60

3 Beilinson A, Ginsberg V, Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory. J Amer Math Soc, 1996, 9(2): 473～528

4 Manin Yu I. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1987, 37(4): 191～205

5 Green E L, Martinez-Villa R. Koszul and Yoneda algebras I. Canad Math Soc Conf Proc, 1996, 18: 247～297

6 Green E L, Martinez-Villa R, Reiten I, et al. On modules with linear presentations. J Algebra, 1998, 205: 578～604