第32卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol.32, No.2
2002年4月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Apr. 2002

文章编号:0253-2778(2002)02-0164-08

所有模均可分次的有限维路代数*

武清宇,叶 郁

(中国科学技术大学数学系,安徽合肥 230026)

摘要:论文通过引进箭图上的箭向函数和顶点可分模的概念,对任意模均可分次的路代数进行了完整的刻划,并给出了相应的一些等价条件.本文还通过考察 A-n 型代数上的模的性质,完全确定了所有有限维模均可零次生成的路代数.

关键词:箭向函数;顶点分次模;零次生成模

中图分类号:O153.3 文献标识码:A

AMS subject classification (2000): 16W50

0 引言

分次代数结构是一个重要的代数结构,考察其上的模范畴及其分次模范畴对研究其结构和性质有着十分重要的意义.文献[1]中证明了对于有限一次生成的可裂基代数而言,其上不可分解模若可分次,则在平移和同构的意义下,存在唯一的分次.这便产生了如何判断一个模是否可分次以及怎样给出一个分次的问题.

对于路代数,按相应箭图的顶点进行分次是一个很自然的想法.本文通过引入箭图上的箭向函数和顶点分次模的概念,对所有模均可分次的路代数进行了完整的刻划,给出了相应的一些等价条件.本文还考察了零次生成模,完全确定了任意有限维模均可零次生成的路代数.

1 分次代数和路代数

在本节中,我们简要回顾分次代数和路代数的基本概念和一些性质,在本文中,k 为任意域,代数的模均指左模.

分次代数和分次模

(1) k-代数 Λ 称为一个分次代数,是指存在一族 k-向量空间 $\{\Lambda_i\}_{i\in Z}$, $\Lambda_i\subseteq\Lambda$,满足:$\Lambda=\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}\Lambda_i$, $\Lambda_i\Lambda_j\subseteq\Lambda_{i+j}$, $\forall i,j\in Z$,且 Λ_0 为 Λ 的 k-子代数.我们记 $\Lambda_{\geq i}=\bigoplus_{j\geq i}\Lambda_j$, $\forall i\in Z$. Λ 称为正分次代数,若 $\Lambda=\Lambda_{\geq 0}$.正分次代数 Λ 称为一次生成的,若 $\Lambda_i\Lambda_j=\Lambda_{i+j}$, $\forall i,j\geq 0$.

---

* 收稿日期:2001-11-26
基金项目:国家自然科学基金(19971080)资助项目
作者简介:武清宇,男,1977年12月生,硕士研究生. E-mail:yuxiang@mail.ustc.edu.cn

(2) 设 Λ 为一次生成正分次代数,如果 Λ 还满足:$\Lambda_0 = k^n, n \in N$,且 $\dim_k(\Lambda_1) < \infty$,则称 Λ 为有限一次生成可裂基代数.

(3) 设 Λ 为分次代数, M 为 Λ-模,若有向量空间的分解:$M = \bigoplus_{i \in Z} M_i$,且满足 $\Lambda_i M_j \subseteq M_{i+j}$, $\forall i, j \in Z$,则称 M 为分次模. 分次模 M 称为零次生成的,若 $M = \Lambda M_0$. 易知,若 Λ 为正分次代数, M 零次生成当且仅当 $M_i = \Lambda_i M_0$, $\forall i \geq 0$,且有 $M_i = 0$, $\forall i < 0$.

下面简要回顾箭图和路代数的一些基本性质. 关于路代数及其表示的更进一步的性质,可参照文献[4].

(1) 一个箭图 Q 由 $(Q_0, Q_1, s, t: Q_1 \to Q_0)$ 组成,其中:

Q_0 为顶点集,通常用 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 来表示;

Q_1 为箭向} 集,通常用 $\{\alpha, \beta, \gamma \cdots\}$ 来表示.

对于箭向 α, $s(\alpha)$ 称为 α 的起点, $t(\alpha)$ 称为 α 的终点. 当 $v \in Q_0$ 不为 Q_1 中任一箭向的终点时,我们称 v 为 Q 的源点. 当 Q_0 和 Q_1 均为有限集时,我们称 Q 为有限箭图.

(2) Q 中的非平凡道路是指 Q 中的箭向序列 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$, $m \geq 1$,且满足 $s(\alpha_{i-1}) = t(\alpha_i)$, $\forall 2 \leq i \leq m$,如图所示, $\cdot \xrightarrow{\alpha_1} \cdot \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_m} \cdot$ m 称为道路的长度, $s(\alpha_m)$, $t(\alpha_1)$ 分别称为道路的起点和终点. 我们把每个顶点看作一条长度为零的道路,其起点与终点均为自身,这种道路称为平凡道路,用 e_v 来表示顶点 v 对应的平凡道路.

(3) 箭图 Q 对应的路代数 kQ 是指以 Q 中所有道路为基所形成的 k-代数,其乘法由道路的结合给出:设 $x = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$, $y = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$,则

$$xy = \begin{cases} xy, & \text{若 } t(y) = s(x); \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

易知,当 Q_0 为有限集时, $1 = \sum_{s \in Q_0} e_s$ 为 kQ 的本原幂等元分解.

设 k 为任意域, 我们定义箭图的 k-表示范畴如下.

(1) 设 Q 为一个箭图, Q 上的 k-表示 X 由 $(\{X_v\}_{v \in Q_0}, \{X_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$ 组成,其中 X_v 为 k-线性空间, $X_\alpha: X_{s(\alpha)} \to X_{t(\alpha)}$ 为 k-线性映射.

(2) 设 X, X' 为箭图 Q 的两个表示,则态射 $\theta: X \to X'$ 由 $\{\theta_v: X_v \to X'_v\}_{v \in Q_0}$ 组成,其中, θ_v 为 k-线性映射,且满足 $X'_\alpha \theta_{s(\alpha)} = \theta_{t(\alpha)} X_\alpha$, $\forall \alpha \in Q_1$.

(3) 态射 $\theta: X \to X'$ 和 $\phi: X' \to X''$ 的合成 $\phi \circ \theta: X \to X''$ 可由 $\{(\phi \circ \theta)_v: X_v \to X''_v, (\phi \circ \theta)_v = \phi_v \circ \theta_v\}_{v \in Q_0}$ 得到.

Q 上的 k-表示范畴记为 $Rep_k(Q)$.

引理 1　kQ 的模范畴与 Q 的 k-表示范畴等价.

证明　我们只给出具体的对应.

设 M 为 kQ-模,其相应的表示 X 为:(1) $\forall v \in Q_0$, $X_v = e_v M$.

(2) $\forall \alpha \in Q_1$, $X_\alpha: X_{s(\alpha)} \to X_{t(\alpha)}$, $X_\alpha(x) = \alpha x \in X_{t(\alpha)}$, $\forall x \in X_{s(\alpha)}$.

设 $X \in Rep_k(Q)$,其相应 kQ-模 M 可由如下得到. 令 $M = \bigoplus_{v \in Q_0} X_v$,设 $\xi_v: X_v \to M$ 为自然内射, $\pi_v: M \to X_v$ 为自然投射, $p = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为 Q 中道路,则令 $px = \xi_{t(\alpha_1)} X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \cdots X_{\alpha_m} \pi_{s(\alpha_m)} x$, $\forall x \in M$.

以后我们对路代数的模与其相应的箭图的表示将不再加以区分,而用同一符号来表示.

按照道路的长度,我们可以给出路代数的一个自然的分次,即有: $kQ = \bigoplus_{i\geq 0}(kQ)_i$,其中,$(kQ)_i$ 为长度为 i 的道路张成的线性子空间. 易知,对任一有限箭图 Q, kQ 为有限一次生成的可裂基的 k-代数. 事实上,[2]中证明了:

引理 2 设 k 为任意域,Λ 为有限一次生成可裂基的 k-代数,则存在有限箭图 Q 和 kQ 的齐次理想(可由齐次元生成的理想) $I \subseteq \bigoplus_{i\geq 2}(kQ)_i$,使得有分次代数同构 $\Lambda = kQ/I$.

以下路代数均指有限箭图的路代数. 我们用 Q 表示有限箭图,$\Lambda = kQ = \bigoplus_{i\geq 0}\Lambda_i$ 为相应路代数的自然分次,用 Λ-Mod(Λ-mod) 表示 Λ 上模(有限维模) 范畴,用 $Gr(\Lambda)$ ($gr(\Lambda)$) 表示 Λ 上的分次模(有限维分次模) 范畴,用 $gr_0(\Lambda)$ 表示有限维零次生成模范畴.

2 箭向函数和对称圈

在本节中,我们在箭图上引入箭向函数的概念,并给出了箭图上存在箭向函数的充要条件.

我们首先在箭图上引入箭向函数的概念.

定义 函数 $f: Q_0 \to Z$ 称为 Q 上的一个箭向函数,如果 f 满足对任意的 $\alpha \in Q_1$,有 $f(t(\alpha)) = f(s(\alpha)) + 1$.

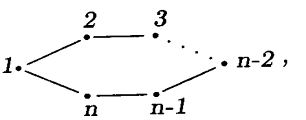
引理 3 设 f 为连通箭图 Q 上的一个箭向函数,$g: Q_0 \to Z$ 为 Q 上的另一函数,则 g 为 Q 上的一个箭向函数当且仅当存在 $N \in Z$,使得 $g = f + N$.

证明 $\Leftarrow$由箭向函数的定义易得.

$\Rightarrow$考虑函数 $h: Q_0 \to Z, h(v) = f(v) - g(v)$, $\forall v \in Q_0$. 由 g, f 均为箭向函数知,$h(t(\alpha)) = f(t(\alpha)) - g(t(\alpha)) = (f(s(\alpha)) + 1) - (g(s(\alpha)) + 1) = f(s(\alpha)) - g(s(\alpha)) = h(s(\alpha))$, $\forall \alpha \in Q_1$. 再由 Q 的连通性知,$h(v) = h(w)$, $\forall v, w \in Q_0$, 命题得证.

箭图上的有向圈是指起点与终点相同的非平凡道路,为作更进一步的研究,我们需要对圈的定义进行推广.

定义 箭图 $\triangle$称为一个圈是指其底图 $\overline{\triangle}$(即去掉所有箭头的方向以后所得到的图)为:



其中$\{1, 2, \cdots, n\}$ 为互不相同的顶点. 为方便起见,我们常用(*) 来表示形如 $\overline{\triangle}$的图.

定义 设 $\triangle$为圈,其相应的底图 $\overline{\triangle}$为(*). 对于箭向 $\alpha \in \triangle_1$,若 $\alpha: m \to m + 1$,我们就称 α为顺时针箭向;若 $\alpha: m + 1 \to m$,则称为逆时针箭向. 在此,我们将 1 和 $n + 1$ 看作同一顶点. 如果在 $\triangle$中,顺时针箭向同逆时针箭向数目相等,我们就称 $\triangle$是对称的. 否则称 $\triangle$是非对称的.

由箭向函数的定义易知对无圈的箭图,我们总可以定义其上的一个箭向函数. 另外,显然有向圈不是对称的. 事实上由定义,我们有下述结论.

引理 4 圈 $\triangle$是对称的当且仅当在 $\triangle$上存在一个箭向函数.

证明 $\Leftarrow$设 $f: \triangle_0 \to Z$ 为 $\triangle$上的一个箭向函数, $\triangle$形如(*),则 $f(1) = f(n + 1)$,在

此,我们认为 1 也为第 $n+1$ 个顶点. 由箭向函数定义有:

$f(n+1) = f(1) + \#\{$△上的顺时针箭向$\} - \#\{$△上的逆时针箭向$\}$,即 $\#\{$△上的顺时针箭向$\} - \#\{$△上的逆时针箭向$\} = f(n+1) - f(1) = 0$,从而 △是对称的.

⇒设 △形如(*). 归纳定义 $f:\triangle_0 \to Z$ 如下. 令 $f(1) = 0$,

$$f(m) = \begin{cases} f(m-1)+1, & \text{if } m-1 \to m; \\ f(m-1)-1, & \text{if } m-1 \leftarrow m. \end{cases} \quad \forall m \geq 2.$$

由△的对称性以及从充分性的证明中可知 $f(n+1) = f(1)$,从而 $f:\triangle_0 \to Z$ 是定义合理的,由 f 的构造易知 f 为△上的一个箭向函数.

下面的引理刻划了存在箭向函数的箭图.

引理 5 设 Q 为连通的箭图,如果对 Q 的任一圈均是对称的,则在 Q 上存在一个箭向函数.

证明 对 $|Q_0|$ 进行归纳. 当 $|Q_0| = 1$ 时,结论自然成立.

由于 Q 中不含有向圈,所以 Q_0 中至少含有一个源点,记为 s. 令 $\{v_1, \cdots, v_t\}$ 为由 s 出发的所有箭向的终点的集合,Q' 为 Q 去掉源点 s 后的全子图. 不妨设 $Q' = \bigcup_{i=1}^{l} Q(i)$,其中 $Q(1), \cdots, Q(l)$ 为 Q' 的所有互不相交 的连通子图. 由 Q 的连通性知 $l \leq t$,从而我们得到了 $\{v_1, \cdots, v_t\}$ 的一个划分:$\{v_1, \cdots, v_t\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l$,满足 $S_i \subseteq Q(i)_0$,$i = 1, \cdots, l$,且 $S_1, \cdots, S_l$ 为无交并.

对每个 $Q(i)$,$Q(i)$ 中的圈仍然是对称的,且 $|Q(i)_0| < |Q_0|$,由归纳假设我们可在 $Q(i)$ 上定义一个箭向函数 $f_i: Q(i)_0 \to Z$.

由于 $Q(i)$ 是连通的,则对任意两个 $v_1, v_2 \in S_i$,存在一条从 v_1 到 v_2 的道路,设为 p,即有:

$$v_1 \cdot\!\overset{p}{\text{———}}\!\cdot v_2,\text{从而}\quad s\cdot\!\text{———}\ v_1 \cdot\!\overset{p}{\text{———}}\!\cdot v_2 \text{———}\cdot s$$

形成了 Q 中的一个圈. 由已知条件知该圈是对称的,从而道路 p 中顺时针箭向的个数等于 p 中逆时针箭向的个数,由 f_i 为 $Q(i)$ 上的箭向函数知,$f_i(v_2) = f_i(v_1) + \#\{p$ 中的逆时针箭向$\} - \#\{p$ 中的顺时针箭向$\} = f_i(v_1)$. 这样,我们证明了对任意的 $v \in S_i$,$f_i(v)$ 为常值.

现在构造 $g_i: Q(i)_0 \to Z$,$i = 1, \cdots, l$ 如下,$g_i = f_i - f_i(v) + 1$,$v \in S_i$. 则 g_i 仍然是 $Q(i)$ 上的箭向函数,且 $g_i(v) = 1$,对任意 $v \in S_i$,$i = 1, \cdots, l$. 由于 $Q_0 = \{s\} \cup (\bigcup_{i=1}^{l} Q(i)_0)$,可令 $f: Q_0 \to Z$ 满足

$$f(s) = 0,\ f(v) = g_i(v),\text{如果 } v \in Q(i)_0.$$

则有 $f(v_1) = f(v_2) = \cdots = f(v_t) = 1 = f(s) + 1$,从而 f 成为 Q 上 的一个箭向函数,引理得证.

综合前文所述,我们得到了下面的定理.

定理 1 连通的箭图上存在箭向函数当且仅当其不含非对称圈.

证明 因为箭向函数限制在子图上仍为箭向函数,故由引理 4 可得到必要性. 充分性由引理 5 给出.

3 顶点分次模

在本节中,我们通过对路代数上的模引入顶点分次的概念,完整地刻划了所有模均可分次的路代数,证明了路代数满足这种性质当且仅当其相应的箭图上存在箭向函数.

首先我们给出模的顶点分次的定义. 设 Q 为有限箭图, $\Lambda = kQ$.

定义 设 M 为 Λ-模, M 称为顶点分次的,如果存在 M 的一个分次,使得 M 的每个齐次分支均是某些 e_vM 的直和,其中 $v \in Q_0$,也就是说对每个顶点 $v \in Q_0$, e_vM 均包含于某个齐次分支中.

以下,对于分次模 M, $v \in Q_0$, 我们用 M_v 表示 M 在顶点 v 处的向量空间,即 $M_v = e_vM$. 为避免混淆,我们在给出 M 的分次时,用 $M = \bigoplus_{i \in Z} M_{(i)}$ 表示.

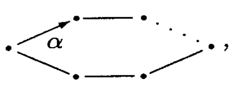
引理 6 设 Q 为有限箭图, k 为任意域, $M \in Gr(kQ)$, $M = \bigoplus_{i \in Z} M_{(i)}$, 则 $M_v = \bigoplus_{i \in Z} M_{(i)} \cap M_v$. 特别地,若 $\dim_k(M_v) \leq 1$, $\forall v \in Q_0$, 则 M 是顶点分次的.

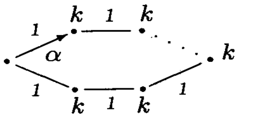
证明 上述和式显然为直和,故只需证明 $M_v = \sum_{i \in Z} M_{(i)} \cap M_v$. 任取 $x \in M_v$, $x = \sum_{i \in Z} m_i$, 其中 $m_i \in M_{(i)}$. 由 $e_vx = x$ 知, $x = e_vx = \sum_{i \in Z} e_vm_i \in \sum_{i \in Z} M_{(i)} \cap M_v$. 特别地,若有 $\dim_k(M_v) \leq 1$, 则 M_v 只能包含在某一个齐次分支中,得证.

下面的引理是本文的关键,它给出了使得路代数上的所有模均可分次的一个必要条件. 在下文中,我们将证明这也是一个充分条件.

引理 7 如果任意 kQ-模都是可分次的,则 Q 中的任一圈都是对称的.

证明 设 Q 中含有圈 $\triangle$, 不妨设

$\triangle =$ 

, 考虑 kQ-模 $M = k$ 

即有 $M_s = k$, $\forall s \in Q_0$, $M_\alpha = 1$, $\forall \alpha \in Q_1$. 由假设知 M 可分次,从而由引理 6 知 M 为顶点分次的. 定义 $f: \triangle_0 \to Z$ 如下: $f(v) = i$, 如果 $M_v \subseteq M_{(i)}$. 容易证明 f 为 $\triangle$ 上的一个箭向函数. 事实上,如果 $\alpha: v \to w$, 且 $f(v) = i$, 由 M 的构造有 $M_w = \alpha(M_v) \subseteq \alpha(M_{(i)}) \subseteq \Lambda_1 M_{(i)} \subseteq M_{(i+1)}$, 即 $f(w) = i + 1 = f(v) + 1$. 从而由引理 4 知 $\triangle$ 是对称的.

综上所述,我们得到了本文的主要定理.

定理 2 设 Q 为有限箭图, kQ 为相应的路代数,则下述命题等价:

(1) 任意 kQ- 模均是可分次的;

(2) Q 中的任意圈均是对称的;

(3) 在 Q 上存在一个箭向函数;

(4) 任意 kQ- 模均是顶点分次的;

(5) 正则模是顶点分次的.

证明

(1) $\Rightarrow$(2): 引理 7;

(2) $\Rightarrow$(3): 引理 5;

(3) $\Rightarrow$(4): 设 $f: Q_0 \to Z$ 为 Q 上的一个箭向函数,由于对任意 kQ- 模 M, 有 $M = \bigoplus_{v \in Q_0} e_vM$,

令：$M_{(i)} := \bigoplus_{v \in Q_0, f(v) = i} e_v M$，则 $M = \bigoplus_{i \in Z} M_{(i)}$ 为 M 的一个分次．对任意 $\alpha: s(\alpha) \to t(\alpha)$，有 $f(t(\alpha)) = f(s(\alpha)) + 1$．由 $\alpha \cdot M = \alpha \cdot e_{s(\alpha)} M$，知 $\alpha \cdot M_{(i)} = 0$，$\forall i \neq f(s(\alpha))$．而 $\alpha \cdot M_{f(s(\alpha))} \subseteq e_{t(\alpha)} M \subseteq M_{f(t(\alpha))} \subseteq M_{s(\alpha)+1}$，从而结论成立．

(4) ⇒(1)：显然．

(4) ⇒(5)：显然．

(5) ⇒(3)：若 kQ 为顶点分次的，根据定义有向量空间的分解：$kQ = M_{(0)} \oplus M_{(1)} \oplus M_{(2)} \oplus \cdots$，$\Lambda_{(i)} M_{(j)} \subseteq M_{(i+j)}$，$\forall\ i, j \geq 0$，且对任意 $v \in Q_0$，存在某个 j，使得 $e_v kQ \subseteq M_{(j)}$．我们定义 Q 上箭向函数 $F: Q_0 \to Z$ 如下：$F(v) = j$，如果 $e_v kQ \subseteq M_{(j)}$．从引理 7 中的证明中可看出，上述函数确为箭向函数．

注　事实上，对于满足定理中等价条件的路代数，$Gr(kQ) = kQ$ - Mod．这是因为利用 Q 上的箭向函数，所有 kQ 模可以具有统一的顶点分次，使得任意模同态均为零次映射．

4　有限维模均可零次生成的路代数

本节我们主要讨论对怎样的有限箭图 Q，有限维 kQ-模均为零次生成的，即存在 M 的分次：$M = M_{(0)} \oplus M_{(1)} \oplus \cdots$，满足 $M = (kQ) M_{(0)}$．由引理 7 知 Q 中的任一圈均是对称的，特别地，Q 中无有向圈．引理 8 和引理 9 将给出满足此性质的两个必要条件，最后定理 3 中将证明这也是充分条件．

设 Q 无有向圈，令 $Q(0)$ 为 Q 的源点的全体，归纳地定义 $Q(i)$ 如下，对 $i \geq 1$，$Q(i) = \{ v \in Q_0 \mid v = t(\alpha),\ \alpha \in Q_1$，其中 $s(\alpha) \in Q(i-1) \}$．

条件(in)　$v \in Q_0$，如果存在 α，使得 $v = t(\alpha)$，则 $\#\{ \alpha \in Q_1 : s(\alpha) = v \} \leq 1$．即若 v 为某个箭向的终点，则最多有一个箭向以 v 为起点．

引理 8　Q 为有限箭图，若任意有限维 kQ- 模均可零次生成，则 Q 满足条件(in)．

证明　设 Q 不满足条件(in)，则有如下子图：

$$\begin{tikzcd} & & 2 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"'] & v \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ & & 3 \end{tikzcd}\quad \text{，考虑模 } M = \quad \begin{tikzcd} & & k \\ k \arrow[r, "(1,0)", "\alpha"'] & k^2 \arrow[ur, "\binom{1}{1}", "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma", "\binom{2}{1}"'] & \\ & & k \end{tikzcd}\ ,$$

其中 $t(\beta)$，$t(\gamma)$ 可以为相同顶点，则 M 不可由零次生成．事实上，假设 M 可零次生成，$M = M_{(0)} \oplus M_{(1)} \oplus \cdots$，$M = kQM_{(0)}$．设 $\{ x_1 \in M_1, y_1, y_2 \in M_v, x_2 \in M_2, x_3 \in M_3 \}$ 为 M 的相对上述映射的一组基．即有：$\alpha x_1 = y_1$，$\beta y_1 = x_2$，$\beta y_2 = x_2$，$\gamma y_1 = 2x_3$，$\gamma y_2 = x_3$．

由 $M_1 \nsubseteq kQ_{\geq 1} M$，知 $M_1 \subseteq M_{(0)}$．又由于 $kQ_{\geq 1} M \nsupseteq M_v$，故存在 $0 \neq y \in M_v$，使得 $y \in M_{(0)}$．设 $y = ay_1 + by_2$，其中 $a, b \in k$．从而由定义有 $(a + b) x_2 = \beta y \in M_{(1)}$，$(2a + b) x_3 = \gamma y \in M_{(1)}$，且 $x_2 = \beta \alpha x_1 \in M_{(2)}$，$x_3 = \gamma \alpha x_1 \in M_{(2)}$．而 $M_{(1)} \cap M_{(2)} = 0$ 表明 $a + b = 2a + b = 0$，这与 $y \neq 0$ 矛盾．故 M 不可零次生成．命题得证．

条件(out)

若 $v \in \cup_{i \geq 2} Q(i)$，则有且仅有一个箭向以 v 为终点．即 Q 无如下子图：—— —— ——，—— ══．

引理9 设 Q 为一有限箭图,若任意有限维 kQ-模均零次生成,则 Q 满足条件(out).

证明 反设 Q 不满足条件(out),则存在如下子图:$1\to2\to3\leftarrow4$,由引理8知2,4必为不同顶点.考虑 kQ-模 $M=\xrightarrow{1}k\xrightarrow{1}k\xrightarrow{1}k$,由引理6知,$M$ 为顶点分次的.若 M 由零次生成,由 $M_1\not\subseteq kQ_{\geq1}M$ 知 M_1 包含在零次里,同理知 M_4 也包含在零次中,矛盾.

注:条件(out)和条件(in)互不包含,这从定义以及引理8和引理9的证明可看出.

令 A_n 表示箭图 $0\xrightarrow{\alpha_1}1\xrightarrow{\alpha_2}\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}n-1$ 对应的路代数,其中 $n\geq1$.设 M 为有限维 A_n-模,则 $M=M_0\oplus M_1\oplus\cdots\oplus M_{n-1}$.令 $M_{(i)}=M_i$, $\forall 0\leq i\leq n-1$,由定理2,$M=M_{(0)}\oplus M_{(1)}\oplus\cdots\oplus M_{(n-1)}$ 为 M 的顶点分次.N_0 为 M_0 的任一子空间,则作为 M 的 A_n-子模,A_nN_0 为 M 的直和项,即有

引理10 (1) 设 M 为 A_n 的有限维表示,$M=M_0\oplus M_1\oplus\cdots\oplus M_{n-1}$.则存在 M 的子表示 $\overline{M}$,使得 $M=A_nM_0\oplus\overline{M}$.

(2) 设 $N_0\subseteq M_0$,则存在 M 的子表示 $\overline{M}$,使得 $M=A_nN_0\oplus\overline{M}$.

证明

(1) 设 A_n 对应的箭图为 $0\xrightarrow{\alpha_1}1\xrightarrow{\alpha_2}\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}n-1$.由于 $(K\oplus L)_0=K_0\oplus L_0$,其中 K, L 为 A_n-模,故只需对不可分解表示情形加以证明即可.而由于 A_n 的所有不可分解表示为:$Ae_i/A\alpha_j\cdots\alpha_{i+1}$, $0\leq i\leq j\leq n-1$,结论显然成立.

(2) 由(1)知,只需对 $M=A_nM_0$ 情形证明即可.

考虑线性映射 $\{f_i:M_0\to M_i, f_i(x)=\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1x\}_{1\leq i\leq n-1}$.令 $K_i=Ker(f_i)$, $M_0^n=M_0$, $M_0^i=M_0\cap K_i$, $\forall 1\leq i\leq n-1$.同样,令 $N_0^n=N_0$, $N_0^i=N_0\cap K_i$, $\forall 1\leq i\leq n-1$.则有:

$$M_0^1\subseteq M_0^2\subseteq\cdots\subseteq M_0^n=M_0,\ N_0^1\subseteq N_0^2\subseteq\cdots\subseteq N_0^n=N_0,\ N_0{}^i\subseteq M_0{}^i.$$

归纳定义 M_0 的子空间串 L_0^i, $i=1,2\cdots n$ 如下.选取 L_0^1,使得 $M_0^1=N_0^1\oplus L_0^1$.再选取 L_0^2,使得 $M_0^2=(N_0^2+M_0^1)\oplus L_0^2$.依次下去,令 L_0^i 满足 $M_0^i=(N_0^i+M_0^{i-1})\oplus L_0^i$, $2\leq i\leq n$.令 $L_0=L_0^1\oplus L_0^2\oplus\cdots\oplus L_0^n$,则 $M_0=N_0\oplus L_0$.

我们证明 $M=A_nN_0\oplus A_nL_0$.由 L_0 的构造以及 $M=A_nM_0$ 知,$M=A_nN_0+A_nL_0$,故只需证明 $A_nN_0\cap A_nL_0=0$.若存在 $0\neq x\in A_nN_0\cap A_nL_0$,则 x 必有某个齐次分量不为零,设 $e_ix\neq0$,显然 $e_ix\in A_nN_0\cap A_nL_0$.由于 $e_iAe_0=k\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1$,知 $0\neq e_ix=\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1y=\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1z$,其中 $y\in L_0$, $z\in N_0$.由 f_i 的定义知,$y-z\in M_0^i$, $y\notin M_0^i$.则存在 $k>i$,使得 $y\in M_0^k$,且 $y\notin M_0^{k-1}$,即 k 为最小的数使得 y 在 M_0^k 中.由 $y-z\in M_0^i$ 知 $y-z\in M_0^k$,从而 $z\in N_0^k$.由 L_0 的构造,可设 $y=l_1+l_2+\cdots+l_k$,其中 $l_i\in L_0^i$, $\forall 1\leq i\leq k$, $l_k\neq0$,则 $l_k=y-(l_1+l_2+\cdots+l_{k-1})=(y-z)+z-(l_1+l_2+\cdots+l_{k-1})\in M_0^{k-1}+N_0^k$,与 L_0^k 的构造矛盾.引理得证.

在陈述本节的主要定理之前,我们先证明一个引理.

引理11 Q 为一连通箭图,M 为 Q 的不可分解表示,则以 $\{v\in Q_0|M_v\neq0\}$ 为顶点的 Q 的全子图为连通子图.

证明 设 $S=\{v\in Q_0|M_v\neq0\}=S_1\cup S_2$, $S_1\cap S_2=\emptyset$,其中 S_i, $i=1,2$ 均为 v 的某些连通分支的并.

令 $e = \sum_{w \in S_1} e_w$, $f = \sum_{v \in S_2} e_v$, 则 eM, fM 均为 Q 的表示. 这是因为 $AeM = \bigoplus_{v \in Q_0} e_v AeM$, 而 $e_v AeM \neq 0$ 表明存在道路 $p = e_v \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k e_w$, 其中 $w \in S_1$, $k \geq 1$, 使得 $pM \neq 0$. 从而 $t(\alpha_k)$, $t(\alpha_{k-1})$, $\cdots$, $v = t(\alpha_1) \in S_1$. 这说明 $AeM = eM$, 故 eM 为 Q 的表示. 同理, fM 也为 Q 的表示. 而显然 $M = eM \oplus fM$, 矛盾. 得证.

现在,我们可以完整地刻划有限维模均可零次生成的路代数.

定理 3　Q 为一有限箭图. Q 上所有有限维表示均可零次生成当且仅当 Q 满足条件 (out) 和条件 (in).

证明　必要性由引理 8 和引理 9 可知,下面证明充分性. 只需对不可分解表示加以证明.

设 M 为 Q 的不可分解表示. 由上面引理知以 $S = \{ v \in Q_0 | M_v \neq 0\}$ 为顶点的 Q 的全子图为连通子图, 记为 Q'. 易知, Q' 也满足条件 (out) 和条件 (in), M 作为 Q' 的表示也是不可分解的,只需证明 M 作为 Q' 的表示可零次生成. 令 $\Lambda = kQ'$.

考虑 M 的顶点分次, $M = M_{(0)} \oplus M_{(1)} \oplus \cdots$, 其中 $M_{(0)} \neq 0$. 由 Q' 满足条件 (out) 知, Q' 的所有源点在同一个分次. 这是因为由 Q' 的连通性,任何两个源点可以由多个形如 $\rightarrow\cdots\rightarrow\leftarrow\cdots\leftarrow$ 的子图连接起来,而由条件 (out) 知这样的子图必有形状 $\rightarrow\leftarrow$, 易知,所有的源点在同一分次中.

设 $p = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 : A_n = 0 \xrightarrow{\alpha_1} 1 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \cdots \xrightarrow{\alpha_n} n$. 为 Q' 中的极长道路,即不真包含在另外一条道路中,则 0 为源点,且没有箭向以 n 为起点. 显然, $M_i \subseteq M_{(i)}$, $\forall i = 0, 1, \cdots n$. 令 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, $f = e_2 + \cdots + e_n$.

由于 Q' 满足条件 (out) 和条件 (in), Q' 中没有其他的箭向以 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 为起点,也没有其他的箭向以 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 为终点,且以 1 为终点的非平凡道路长度只能为 1. 翻译成代数的语言,就是: $\Lambda e = e\Lambda e$, $f\Lambda = f\Lambda e\Lambda$, $e_1 \Lambda_{\geq 1} = e_1 \Lambda_1$. 对于道路 p, 若 $t(p) \in \{2, 3, \cdots, n\}$, $s(p) \notin \{2, 3, \cdots, n\}$, 则 p 必通过 1, 即有 $f\Lambda(1 - e) \subseteq f\Lambda e_1 \Lambda(1 - e)$.

令 $A = e\Lambda e$, 则 A 为 A_n 型代数. 考虑 A 模 eM 和 M_1 的子空间 $e_1 \Lambda_{\geq 1} M$, 由引理 10 知, 存在 eM 的 A- 子模 $\overline{M}$, 使得 $eM = Ae_1 \Lambda_{\geq 1} M \oplus \overline{M}$.

令 $N = \Lambda(1 - e) M + \Lambda e_1 \Lambda_{\geq 1} M$, $L = \Lambda \overline{M}$. 则 $M = N + L$. 下面我们说明 $N \cap L = 0$. 设 $x + y = z$, 其中 $x \in \Lambda(1-e) M$, $y \in \Lambda e_1 \Lambda_{\geq 1} M$, $z \in L$. 由 $\overline{M} = e\overline{M}$, 知 $L = \Lambda e\overline{M} = e\Lambda e\overline{M} = \overline{M}$. 故有 $z = ez$, 从而 $z = ex + ey \in e(\Lambda(1 - e) M + \Lambda e_1 \Lambda_{\geq 1} M)$. 而 $e\Lambda(1 - e) M = e_1 \Lambda(1 - e) M + f\Lambda(1 - e) M$, 又 $f\Lambda(1 - e) = f\Lambda e_1 \Lambda(1 - e)$, 故 $e\Lambda(1 - e) M \subseteq e\Lambda e_1 \Lambda_{\geq 1} M = Ae_1 \Lambda_{\geq 1} M$. 这样 $z = ex + ey \in Ae_1 \Lambda_{\geq 1} M$, $z \in L = \overline{M}$, 由 $eM = Ae_1 \Lambda_{\geq 1} M \oplus \overline{M}$ 知 $z = 0$. 故作为 Λ- 模, 有 $M = N \oplus L$. $N \neq 0$, M 不可分解, 则有 $L = 0$, 这表明 $eM = Ae_1 \Lambda_{\geq 1} M$. 而由前所述, $e_1 M \subseteq M_{(1)}$, $e_1 \Lambda_{\geq 1} M = e_1 \Lambda_1 M_{(0)}$, 从而 eM 可以由 $M_{(0)}$ 生成.

由于每个顶点都落在某条极长道路上, 因此, 整个模 M 可由 $M_{(0)}$ 生成. 定理得证.

致谢: 衷心感谢导师章璞教授的精心指导.

(下转第 180 页)

18(5) :70-71.

Research on Superior Combination Forecasting Model Based on Forecasting Effective Measure

CHEN Hua-you , HOU Ding-pi

(Department of Mathematics , USTC , Hefei , Anhui 230026 , *China)*

Abstract : New concepts are proposed for the combination forecasting effective measure models : superior combination forecasting , dominant forecasting method and redundant measure. Then it is pointed that simple average combination forecasting method is at least noninferior combination forecasting. A sufficient condition of existence about superior combination forecasting is also discussed. Finally redundant information is given in the two determining theorems.

Key words : dominant forecasting method ; forecasting effective measure ; simple average method ; superior combination forecasting ; noninferior combination forecasting ; redundant measure

---

(上接第 171 页)

参 考 文 献

[1] Beilinson A , Ginsberg V , and Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory [J]. J Amer. Math. Soc. ,1996 , 9(2) :473-528.

[2] Green E L. Martinez-Villa R. Koszul and Yoneda algebras Ⅰ[J]. Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 1996 ,18 :247-297.

[3] Green E. L , Martinez-Villa R. Koszul and Yoneda algebras Ⅱ[J]. Canad. Math. Soc. Conf. Proc. 1998 ,24 :227-244.

[4] Maurice Auslander , Idun Reiten and Sverre O Smalφ. Representation theory of artin algebras [M]. Cambridge University Press ,1995.

Finite Dimension Path Algebras with All Modules Gradable

WU Qing-yu , YE Yu

(Department of Mathematics , USTC , Hefei , Anhui 230026*)*

Abstract : Finite dimension path algebras such that all modules are gradable are classified in this paper. Path algebras such that all finite dimension modules are 0-generated are also studied.

Key words : arrow function ; vertex graded module ; 0-generated module