第32卷第2期　　中国科学技术大学学报　　Vol.32,No.2
2002年4月　　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　　Apr. 2002

文章编号:0253-2778(2002)02-0155-09

量子广义 Kac-Moody 代数的三角分解*

黄华林,叶　郁,傅广宇

(中国科学技术大学数学系,安徽合肥 230026)

摘要:论文主要研究广义 Kac-Moody 代数的量子包络代数的结构理论,特别地,我们给出其三角分解形式,以及各部分详细的生成元和定义关系.

关键词:广义 Kac-Moody 代数;量子包络代数;三角分解

中图分类号:O152.5　　**文献标识码**:A

AMS(2000) Subject Classification:17B37,16W35

广义 Kac-Moody 代数是一类新型的无限维李代数,首先由 Borcherds[1] 引进,并在 Vertex algebras 和 Monstrous moonshine 上有重要应用.由于广义 Kac-Moody 代数与 Kac-Moody 代数的相似性,我们很自然地希望研究广义 Kac-Moody 代数的量子化.这种量子广义 Kac-Moody 代数首先由 Kang[2] 于 1995 年提出,但本质上 Kang 文中只定义了特殊类型的广义 Kac-Moody 代数的量子包络代数,并且无论从定理的表述还是证明过程均没有得到其三角分解的各部分的定义关系.

在本文中,我们将采用适用范围更广的广义 Kac-Moody 代数的量子包络代数的定义,并考察其 Hopf 代数结构;采用 Jantzen[3] 书中的处理方法并吸取 Kang 文的某些证明思想,给出其三角分解并得到其各部分详细的生成元和定义关系.特别地,退化到 Kac-Moody 代数的量子包络代数的情形(即虚单根集为空集的情形),我们的证明也较 Jantzen[3] 中的证明更为简单.

1　广义 Kac-Moody 代数及其量子化

设 H 是实向量空间,其上有一非退化的对称双线性型,且 H 中有线性无关子集 $\{h_i \mid i \in I\}$,I 是可数集(可以无限),满足:

(1) (h_i, h_j) 是有理数,$\forall\, i, j \in I$;

(2) $(h_i, h_j) \leqslant 0$,$\forall\, i \neq j$;

(3) 如果 $(h_i, h_i) > 0$,则对 $\forall\, j$,$\dfrac{2(h_i, h_j)}{(h_i, h_i)}$ 是整数.

* 收稿日期:2000-12-19

基金项目:国家自然科学基金(19971080)资助项目

作者简介:黄华林,男,1975 年 1 月生,博士研究生.E-mail:hualin@mail.ustc.edu.cn

给定 H 如上. 若$(h_i,h_i)>0$,则记 $a_{ij}=\dfrac{2(h_i,h_j)}{(h_i,h_i)}$. 我们定义一个关于 H 的实李代数 g,它由 $e_i,f_i(i\in I)$ 及 H 生成,满足如下定义关系:

(1) $[h,h']=0$, $\forall h,h'\in H$;

(2) $[h,e_i]=(h,h_i)e_i,[h,f_i]=-(h,h_i)f_i$, $\forall h\in H$, $i\in I$;

(3) $[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i,\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号;

(4) 若$(h_i,h_i)>0$,则$(\mathrm{ad}e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0=(\mathrm{ad}f_i)^{1-a_{ij}}f_j,\forall j\neq i$;

(5) 若$(h_i,h_j)=0$,则$[e_i,e_j]=0=[f_i,f_j]$.

我们称 g 为关于 H 的广义 Kac-Moody 代数.

令$(i,j)=(h_i,h_j)$,则 H 上的非退化对称双线性型诱导出$\mathbb{Z}I$ 上的一个双线性型. 容易看到 g 是$\mathbb{Z}I$—分次代数,其根格是 $\mathbb{Z}I$. 我们称 I 中元为单根,并可以作 I 的分解$I=I^{re}\cup I^{im}$,其中 $I^{re}=\{i\in I\mid(i,i)>0\}$,$I^{im}=\{i\in I\mid(i,i)\leqslant 0\}$,分别称为实单根集和虚单根集.

注记 1 如果 $I^{im}=\emptyset$ 且 I^{re} 是有限集,则得到的即是通常的 Kac-Moody 代数.

注记 2 注意,这里我们并未假定 $\{h_i\mid i\in I\}$ 是 H 的一组基,所以由 H 上的非退化双线性型诱导出的$\mathbb{Z}I$ 上的双线性型不一定是非退化的.

在给出广义 Kac-Moody 代数的量子包络代数的定义之前,我们先回顾量子群理论里常用的符号. 令 v 是不定元,对 $0\leqslant t\leqslant n$,记

$$[n]=\frac{v^n-v^{-n}}{v-v^{-1}},\ [n]!=\prod_{t=1}^{n}[t],\ [0]!=1,\ \begin{bmatrix} n\\ t\end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[t]![n-t]!}.$$

这些均是关于 v 的整系数 Laurent 多项式. 对于 $i\in I$,记 $d_i=\dfrac{(i,i)}{2}$. 设 ϕ 为 v 的 Laurent 多项式, q 为正实数且对任意 $i\in I^{re}$,$q^{2d_i}=q^{(h_i,h_i)}\neq 1$,记 $\phi_i=\phi(q^{d_i})$. 特别地,$q_i=q^{d_i}$.

设给定指标集 I 和对称双线性型$(-,-)$同 1.1. 广义 Kac-Moody 代数 g 的量子包络代数 U 是含 1 结合$\mathbb{R}$ – 代数,由 E_i, F_i, K_i, $K_i^{-1}(i\in I)$ 生成并满足以下定义关系:

(R1) $K_iK_i^{-1}=1=K_i^{-1}K_i,K_iK_j=K_jK_i$;

(R2) $E_iF_j-F_jE_i=\delta_{ij}(K_i-K_i^{-1})$;

(R3) $K_iE_jK_i^{-1}=q^{(i,j)}E_j$;

(R4) $K_iF_jK_i^{-1}=q^{-(i,j)}F_j$;

(R5) 若$(i,j)=0$,则 $E_iE_j-E_jE_i=0$;

(R6) 若$(i,j)=0$,则 $F_iF_j-F_jF_i=0$;

(R7) $\displaystyle\sum_{t=0}^{1-a_{ij}}(-1)^t\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ t\end{bmatrix}_i E_i^tE_jE_i^{1-a_{ij}-t}=0$, $\forall i\in I^{re}$, $j\neq i$;

(R8) $\displaystyle\sum_{t=0}^{1-a_{ij}}(-1)^t\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ t\end{bmatrix}_i F_i^tF_jF_i^{1-a_{ij}-t}=0$, $\forall i\in I^{re}$, $j\neq i$.

注记 :由定义可知,若 $I^{im}=\emptyset$ 且 I^{re} 是有限集,则相应的量子广义 Kac-Moody 代数即为通常的量子群.

量子 Serre 关系(R7)和(R8)比较复杂. 当 $i\in I^{re}$ 且$(i,j)=0$ 时,(R7)和(R8)分别包含了(R5)和(R6). 一般我们先来考察代数 $\widetilde{U}$,它的生成元同 U,但定义关系只有(R1)—(R4). 我们仍记 E_i, F_i, K_i, $K_i^{-1}(i\in I)$ 在 $\widetilde{U}$ 及 U 中的象为相同的符号. 记 $\widetilde{U}^+$,$\widetilde{U}^0$ 和 $\widetilde{U}^-$ 分别为

$\widetilde{U}$ 中由 $\{E_i \mid i \in I\}$，$\{K_i, K_i^{-1} \mid i \in I\}$ 和 $\{F_i \mid i \in I\}$ 生成的子代数.类似地,我们定义 U^+,U^0 和 U^-.由 $\widetilde{U}$ 及 U 的定义,我们容易得到以下简单事实：

引理 1　(a) $\widetilde{U}$ 及 U 上有唯一自同构 ω 使得 $\omega(E_i) = F_i$,$\omega(F_i) = E_i$,$\omega(K_i) = K_i^{-1}$.

(b) $\widetilde{U}$ 及 U 上有唯一反自同构 τ 使得 $\tau(E_i) = E_i$,$\tau(F_i) = F_i$,$\tau(K_i) = K_i^{-1}$.

由以上事实可知,$\widetilde{U}^+$（或 U^+）和 $\widetilde{U}^-$（或 U^-）作为代数是同构的.并且引理中的 ω 和 τ 的阶均是 2,即 $\omega^2 = 1 = \tau^2$.

2　$\widetilde{U}$ 及 U 的 Hopf 代数结构

代数 $\widetilde{U}$ 及 U 均是 $\mathbb{Z}I$- 分次的.首先,在由 E_i，F_i，K_i，$K_i^{-1}(i \in I)$ 生成的自由结合代数上定义 $\deg E_i = i$,$\deg F_i = -i$ 和 $\deg K_i = 0 = \deg K_i^{-1}$ 得到一个 $\mathbb{Z}I$- 分次；再注意关系(R1)～(R8)都是齐次的,从而 $\widetilde{U}$ 及 U 均继承了这一分次.子代数 $\widetilde{U}^+$,$\widetilde{U}^0$ 和 $\widetilde{U}^-$（或 U^+,U^0 和 U^-）均由齐次元生成,所以也都是分次的.张量积代数 $\widetilde{U} \otimes \widetilde{U}$（或 $U \otimes U$）也是分次的代数.设 $x, y \in \widetilde{U}$（或 U）均为齐次元,定义 $\deg(x \otimes y) = (\deg x, \deg y)$.

设 $\lambda \in \mathbb{Z}I$,$\lambda = \sum_i \lambda_i i$,记 $K_\lambda = \prod_i K_i^{\lambda_i}$.设 $s = (s_1, \cdots, s_l) \in I^l$ 为有限单根序列,定义 $\mathrm{wt}(s) = s_1 + \cdots + s_l$，并记

$$E_s = E_{s_1} \cdots E_{s_l}, F_s = F_{s_1} \cdots F_{s_l}.$$

特别地,约定 $E_\emptyset = 1 = F_\emptyset$.对 $\mu \in \mathbb{N}_0 I$,$\mu = \sum_i \mu_i i$,我们定义 $I(\mu) = \{s \mid \mathrm{wt}(s) = \mu\}$.由前面分次的定义,我们容易得到

$$U^+ = \oplus_{\mu \in \mathbb{N}_0 I} U_\mu^+,\ U^- = \oplus_{\mu \in \mathbb{N}_0 I} U_{-\mu}^-.$$

其中 U_μ^+ 和 $U_{-\mu}^-$ 分别由 $\{E_s \mid s \in I(\mu)\}$ 和 $\{F_s \mid s \in I(\mu)\}$ 线性张成.类似地,我们有 $\widetilde{U}^+$ 和 $\widetilde{U}^-$ 的分解.

引理 2　$\widetilde{U}$ 上有唯一的 Hopf 代数结构 (Δ, ε, S) 使得对 $\forall i \in I$

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i,\ \varepsilon(E_i) = 0,\ S(E_i) = -K_i^{-1}E_i,$$
$$\Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,\ \varepsilon(F_i) = 0,\ S(F_i) = -F_iK_i,$$
$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i,\ \varepsilon(K_i) = 1,\ S(K_i) = K_i^{-1}.$$

证明　首先容易验证由 E_i，F_i，K_i，$K_i^{-1}(i \in I)$ 生成的自由结合代数上有引理给出的 Hopf 代数结构.我们只要验证由定义关系(R1)～(R4)生成的理想是 Hopf 理想,这相当于验证生成元在 (Δ, ε, S) 下的象满足关系(R1)～(R4).这里我们只验证(R2),其它都比较明显.对 $i \neq j$ 时相当于要验证以下交换子为零：

$$\begin{aligned}
[\Delta(E_i), \Delta(F_j)] &= [E_i \otimes 1, F_j \otimes K_j^{-1}] + [E_i \otimes 1, 1 \otimes F_j] + \\
&[K_i \otimes E_i, F_j \otimes K_j^{-1}] + [K_i \otimes E_i, 1 \otimes F_j] = \\
&0 + 0 + K_iF_j \otimes E_iK_j^{-1} - F_jK_i \otimes K_j^{-1}E_i + 0 = \\
&q^{-(i,j)} F_jK_i \otimes E_iK_j^{-1} - F_jK_i \otimes q^{-(i,j)} E_iK_j^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

$$[\varepsilon(E_i), \varepsilon(F_j)] = [0, 0] = 0,$$

$$[S(F_j), S(E_i)] = F_jK_jK_i^{-1}E_i - K_i^{-1}E_iF_jK_j =$$

$$K_i^{-1}(K_iF_jK_i^{-1})(K_jE_iK_j^{-1})K_j - K_i^{-1}E_iF_jK_j =$$
$$K_i^{-1}q^{-(i,j)}F_jq^{(i,j)}E_iK_j - K_i^{-1}E_iF_jK_j =$$
$$K_i^{-1}[F_j,E_i]K_j = 0.$$

当 $i = j$ 时,

$$[\Delta(E_i),\Delta(F_i)] = [E_i\otimes 1, F_i\otimes K_i^{-1}] + [E_i\otimes 1, 1\otimes F_i] +$$
$$[K_i\otimes E_i, F_i\otimes K_i^{-1}] + [K_i\otimes E_i, 1\otimes F_i] =$$
$$(E_iF_i - F_iE_i)\otimes K_i + K_i\otimes(E_iF_i - F_iE_i) =$$
$$(K_i - K_i^{-1})\otimes K_i^{-1} + K_i\otimes(K_i - K_i^{-1}) =$$
$$K_i\otimes K_i - K_i^{-1}\otimes K_i^{-1} = \Delta(K_i) - \Delta(K_i^{-1}),$$
$$[\varepsilon(E_i),\varepsilon(F_i)] = [0,0] = 0,$$
$$[S(F_i),S(E_i)] = F_iK_iK_i^{-1}E_i - K_i^{-1}E_iF_iK_i =$$
$$F_iE_i - E_iF_i = K_i^{-1} - K_i = S(K_i) - S(K_i^{-1}).$$

引理 2 中的 S 实际上是 $\widetilde{U}$ 的反自同构. 对 $\forall i\in I$, 我们定义

$$S^{-1}(E_i) = -E_iK_i^{-1}, S^{-1}(F_i) = -K_iF_i, S^{-1}(K_i) = K_i^{-1}.$$

容易验证, $SS^{-1} = 1 = S^{-1}S$. 由归纳法容易得到对 $\forall i\in I$ 且 $(i,i)\neq 0$, $r\in\mathbb{N}_0$

$$\Delta(E_i^r) = \sum_{t=0}^{r} q_i^{t(r-t)}\begin{bmatrix} r\\ t\end{bmatrix}_i E_i^{r-t}K_i^t\otimes E_i^t,$$

$$\Delta(F_i^r) = \sum_{t=0}^{r} q_i^{t(r-t)}\begin{bmatrix} r\\ t\end{bmatrix}_i F_i^t\otimes F_i^{r-t}K_i^{-t},$$

$$S(E_i^r) = (-1)^r q_i^{r(r-1)}K_i^{-r}E_i^r,\quad S(F_i^r) = (-1)^r q_i^{-r(r-1)}F_i^rK_i^r.$$

若 $(i,i) = 0$, 则对 $\forall r\in\mathbb{N}_0$ 有

$$\Delta(E_i^r) = \sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}E_i^{r-t}K_i^t\otimes E_i^t,\quad \Delta(F_i^r) = \sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}F_i^t\otimes F_i^{r-t}K_i^{-t},$$
$$S(E_i^r) = (-1)^rK_i^{-r}E_i^r,\quad S(F_i^r) = (-1)^rF_i^rK_i^r.$$

这里的 $\binom{r}{t}$ 是一般牛顿二项式系数.

设 $i\in I^{re}$, $j\neq i$, 记

$$u_{ij}^{+} = \sum_{t=0}^{1-a_{ij}}(-1)^t\begin{bmatrix} 1-a_{ij}\\ t\end{bmatrix}_i E_i^tE_jE_i^{1-a_{ij}-t},$$

$$u_{ij}^{-} = \sum_{t=0}^{1-a_{ij}}(-1)^t\begin{bmatrix} 1-a_{ij}\\ t\end{bmatrix}_i F_i^tF_jF_i^{1-a_{ij}-t}.$$

设 $i\neq j$ 且 $(i,j) = 0$, 记

$$v_{ij}^{+} = E_iE_j - E_jE_i,\quad v_{ij}^{-} = F_iF_j - F_jF_i.$$

回忆 U 的定义便知道 u_{ij}^{+}, u_{ij}^{-} 和 v_{ij}^{+}, v_{ij}^{-} 分别是定义关系式(R7),(R8)和(R5),(R6)的左边.

引理 3[3] 设 $i\in I^{re}, j\neq i$. 记 $r = 1 - a_{ij}$, 则有

$$\Delta(u_{ij}^{+}) = u_{ij}^{+}\otimes 1 + K_i^rK_j\otimes u_{ij}^{+},\quad S(u_{ij}^{+}) = -K_i^{-r}K_j^{-1}u_{ij}^{+},$$

$$\Delta(u_{ij}^-) = u_{ij}^- \otimes K_i^{-r}K_j^{-1} + 1 \otimes u_{ij}^-, \quad S(u_{ij}^-) = -u_{ij}^- K_i^r K_j.$$

命题 1　U 上有唯一的 Hopf 代数结构 (Δ, ε, S)，其作用公式同引理 2.2.

证明　设 J 为所有的 u_{ij}^+，u_{ij}^- 和 v_{ij}^+，v_{ij}^- 在 $\widetilde{U}$ 中生成的双边理想. 由 1.2 和 1.3 的定义知 $U = \widetilde{U}/J$. 我们只要证明 J 是代数 $\widetilde{U}$ 的 Hopf 理想，即证

(1) $\Delta(J) \subset \widetilde{U} \otimes J + J \otimes \widetilde{U}$；

(2) $\varepsilon(J) = 0$；

(3) $S(J) \subset J$.

由引理 2.2，ε 将所有生成元作用到 0. 由引理 2.4，我们只须对生成元 v_{ij}^+，v_{ij}^- $(i \neq j$ 且 $(i, j) = 0)$ 验证(1) 和(3). 当 $(i, j) = 0$ 时，由(R3)和(R4)知 $E_iK_j = K_jE_i$，$E_jK_i = K_iE_j$，$F_iK_j = K_jF_i$，$F_jK_i = K_iF_j$. 于是我们容易得到下面的式子：

$$\Delta(v_{ij}^+) = v_{ij}^+ \otimes 1 + K_iK_j \otimes v_{ij}^+,$$
$$\Delta(v_{ij}^-) = v_{ij}^- \otimes K_i^{-1}K_j^{-1} + 1 \otimes v_{ij}^-,$$
$$S(v_{ij}^+) = -K_i^{-1}K_j^{-1}v_{ij}^+,$$
$$S(v_{ij}^-) = -v_{ij}^-K_iK_j.$$

这些式子说明(1)和(3)成立.

3　$\widetilde{U}$ 的三角分解

以下我们记 Ω 是所有有限单根序列的集合(包括 $\emptyset$). 设 M 是实向量空间，有一组基 $\{m_s \mid s \in \Omega\}$. 设 $s = (s_1, \cdots, s_l)$，$c_I = (c_i)_{i \in I}$ 是一组非零实数. 我们定义 $\widetilde{U}$ 在 M 上的作用

$$E_i \cdot m_s = m_{(i, s)},$$
$$K_i \cdot m_s = c_i q^{(i, \mathrm{wt}(s))} m_s,$$
$$F_i \cdot m_s = \sum_{1 \leqslant t \leqslant l,\ s_t = i} \left(c_i^{-1} q^{-(i, \mu_t)} - c_i q^{(i, \mu_t)}\right) m_{(s_1, \cdots, s_{t-1}, s_{t+1}, \cdots, s_l)}.$$

其中，$\mu_t = \sum_{r = t+1}^{l} s_r$. 以下引理的证明是显然的.

引理 4　M 在以上定义的作用下成为 $\widetilde{U}$- 模，记作 $M(c_I)$.

由定义可知 $\widetilde{U}^0$ 及 U^0 均是交换代数，且均由 $\{K_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}I\}$ 线性张成；$\widetilde{U}^+$，$\widetilde{U}^-$ 分别由 $\{E_s \mid s \in \Omega\}$ 和 $\{F_s \mid s \in \Omega\}$ 线性张成. 进一步，我们有

引理 5　$\{E_s \mid s \in \Omega\}$，$\{K_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}I\}$ 和 $\{F_s \mid s \in \Omega\}$ 分别是 $\widetilde{U}^+$，$\widetilde{U}^0$ 和 $\widetilde{U}^-$ 的基.

证明　考虑 $\{E_s \mid s \in \Omega\}$ 在 $\widetilde{U}$- 模 $M(c_I)$ 上的作用. 由定义，$E_s \cdot m_\emptyset = m_s$. 显然这一式子说明 $\{E_s \mid s \in \Omega\}$ 是线性无关的；由引理 1，$\{F_s \mid s \in \Omega\}$ 也线性无关；从而分别是 $\widetilde{U}^+$ 和 $\widetilde{U}^-$ 的基.

下面我们来证明 $\{K_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}I\}$ 线性无关. 设有一组实数 $\{h_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}I\}$(至多有限个不为 0) 使得 $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}I} h_\mu K_\mu = 0$. 用此式作用 $m_\emptyset$ 得

$$0 = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}I} h_\mu K_\mu \cdot m_\emptyset = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}I} h_\mu c_I^\mu m_\emptyset.$$

其中 $\mu = \sum_i \mu_i i$，$c_I^\mu = \prod_i c_i^{\mu_i}$. 由于 $m_{\mathbb{Q}}$ 是非 0 向量，所以 $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}I} h_\mu c_I^\mu = 0$. 此式的左边(通分后)可以看成是关于有限多个 c_i 的多项式，而任意一组非 0 实数 $(c_i)_i$ 都是它的根. 这说明此多项式只能是零多项式，从而 $h_\mu = 0, \forall \mu \in \mathbb{Z}I$. 这就证明了 $\{K_\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}I\}$ 是线性无关的.

记 $\widetilde{U}$（或 U）中由 $\{E_i, K_i, K_i^{-1} \mid i \in I\}$ 生成的子代数为 $\widetilde{U}^{\geqslant 0}$（或 $U^{\geqslant 0}$）；由 $\{F_i, K_i, K_i^{-1} \mid i \in I\}$ 生成的子代数为 $\widetilde{U}^{\leqslant 0}$（或 $U^{\leqslant 0}$）. 我们有下面向量空间的同构：

引理 6 $\widetilde{U}^{\geqslant 0} \cong \widetilde{U}^0 \otimes \widetilde{U}^+$，$\widetilde{U}^{\leqslant 0} \cong \widetilde{U}^- \otimes \widetilde{U}^0$.

证明 我们只要证明前一个同构，再由引理 1 即得后者. 由定义关系(R3)便知 $\widetilde{U}^{\geqslant 0}$ 由形如 $K_\mu E_s$ 的元素线性张成. 所以乘法映射

$$\widetilde{U}^0 \otimes \widetilde{U}^+ \to \widetilde{U}^{\geqslant 0},\quad K_\mu \otimes E_s \to K_\mu E_s$$

是满的线性映射. 还要证明以上映射是单的. 这只须证明 $K_\mu E_s (\mu \in \mathbb{Z}I, s \in \Omega)$ 是线性无关的.

设有一组实数 $c_{\mu,s}$ 使得 $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}I, s \in \Omega} c_{\mu,s} K_\mu E_s = 0$. 由分次性，我们有

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{N}_0 I} \sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda, \mu \in \mathbb{Z}I} c_{\mu,s} K_\mu E_s = 0.$$

于是，对 $\forall \lambda \in \mathbb{N}_0 I$ 有

$$\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda, \mu \in \mathbb{Z}I} c_{\mu,s} K_\mu E_s = 0.$$

由引理 2 中 Δ 的定义，我们容易得到

$$\Delta(E_s) = E_s \otimes 1 + (\cdots) + K_{\mathrm{wt}(s)} \otimes E_s.$$

其中，$(\cdots)$ 是次数不为 $(\mathrm{wt}(s), 0)$ 和 $(0, \mathrm{wt}(s))$ 的项. 于是我们有

$$0 = \Delta\Big(\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda, \mu \in \mathbb{Z}I} c_{\mu,s} K_\mu E_s\Big) =$$

$$\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda, \mu \in \mathbb{Z}I} c_{\mu,s} (K_\mu \otimes K_\mu)(E_s \otimes 1 + (\cdots) + K_\lambda \otimes E_s) =$$

$$\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda, \mu \in \mathbb{Z}I} c_{\mu,s} (K_\mu E_s \otimes K_\mu + (\cdots) + K_{(\lambda+\mu)} \otimes K_\mu E_s).$$

考虑上式中次数为 $(0, \lambda)$ 的项，我们得到

$$\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda, \mu \in \mathbb{Z}I} c_{\mu,s} K_{(\lambda+\mu)} \otimes K_\mu E_s = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}I} K_{(\lambda+\mu)} \otimes \Big(\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda} c_{\mu,s} K_\mu E_s\Big) = 0.$$

由引理 5，$K_{(\lambda+\mu)} (\mu \in \mathbb{Z}I)$ 线性无关，从而对任意的 $\mu \in \mathbb{Z}I$，$\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda} c_{\mu,s} K_\mu E_s = 0$. 由于 K_μ 可逆，所以 $\sum_{\mathrm{wt}(s) = \lambda} c_{\mu,s} E_s = 0$. 再由引理 5 即知对任意的 $s \in \Omega$，$\mu \in \mathbb{Z}I$，$c_{\mu,s} = 0$. 从而 $K_\mu E_s (\mu \in \mathbb{Z}I, s \in \Omega)$ 是线性无关的.

现在我们给出 $\widetilde{U}$ 的三角分解，同时可以看到 $\{F_a K_\mu E_b \mid a, b \in \Omega, \mu \in \mathbb{Z}I\}$ 是 $\widetilde{U}$ 的一组基.

命题 2 下面的乘法映射

$$\widetilde{U}^- \otimes \widetilde{U}^0 \otimes \widetilde{U}^+ \to \widetilde{U},\quad u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \to u_1 u_2 u_3$$

$$\widetilde{U}^+ \otimes \widetilde{U}^0 \otimes \widetilde{U}^- \to \widetilde{U},\quad u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \to u_1 u_2 u_3$$

是向量空间的同构.

证明　我们只须证明前一个同构,再由引理 1 即得后一个同构.类似引理 6 的说明,我们只须证明 $\{F_aK_\mu E_b \mid a, b \in \Omega,\ \mu \in \mathbb{Z}I\}$ 是线性无关的.设有一组实数 $c_{a,\mu,b}$ 使得 $\sum_{a,b\in\Omega,\mu\in\mathbb{Z}I} c_{a,\mu,b}F_aK_\mu E_b = 0$.由 $\widetilde{U}$ 的分次性,我们可以将上式改写成对任意 $\gamma \in \mathbb{Z}I$

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Z}I,\mathrm{wt}(b)-\mathrm{wt}(a)=\gamma} c_{a,\mu,b}F_aK_\mu E_b = 0. \tag{1}$$

由引理 2 中 Δ 的定义,我们容易得到

$$\Delta(E_b) = E_b \otimes 1 + (\cdots) + K_{\mathrm{wt}(b)} \otimes E_b,$$

$$\Delta(F_a) = F_a \otimes K_{\mathrm{wt}(a)}^{-1} + (\cdots) + 1 \otimes F_a.$$

于是我们有

$$0 = \Delta\Big(\sum_{\mu\in ZI,\mathrm{wt}(b)-\mathrm{wt}(a)=\gamma} c_{a,\mu,b}F_aK_\mu E_b\Big) =$$

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Z}I,\mathrm{wt}(b)-\mathrm{wt}(a)=\gamma} c_{a,\mu,b}(F_a \otimes K_{\mathrm{wt}(a)}^{-1} + (\cdots) + 1 \otimes F_a)\cdot$$

$$(K_\mu \otimes K_\mu)(E_b \otimes 1 + (\cdots) + K_{\mathrm{wt}(b)} \otimes E_b).$$

在单根集 I 上规定一个排序,则我们可以按字典序给 $\mathbb{N}_0 I$ 定义一个全序 $\leqslant$.考虑出现在等式 (1) 的非零项的下标中的所有有限单根序列的集合 Ω'.在全序 $\leqslant$ 下,我们可以在 Ω' 中取到两个子集 Ω_0 和 Ω_1,满足如果 $a \in \Omega_0$,则 $\mathrm{wt}(a) = -\deg F_a$ 极大 如果 $b \in \Omega_1$,则 $\deg E_b = \mathrm{wt}(b)$ 极大.注意在 Ω_0(或 Ω_1) 里的使得 $\mathrm{wt}(a)$(或 $\mathrm{wt}(b)$) 极大的单根序列 a(或 b) 可能不止一个.若 $\mathrm{wt}(b) - \mathrm{wt}(a) = \gamma$,则 $a \in \Omega_0$ 当且仅当 $b \in \Omega_1$.注意到上面式子中次数为$(\alpha, \beta) =$ (极大,极小) 的项必须是 0. 于是我们得到

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Z}I,a\in\Omega_0,b\in\Omega_1} c_{a,\mu,b}K_\mu E_b \otimes F_aK_\mu = 0.$$

由引理 6,$F_aK_\mu(a \in \Omega_0, \mu \in \mathbb{Z}I)$ 是线性无关的,所以对任意 $\mu \in \mathbb{Z}I, a \in \Omega_0$ 有

$$\sum_{b\in\Omega_1} c_{a,\mu,b}K_\mu E_b = 0.$$

再由引理 6 即得对任意 $\mu \in \mathbb{Z}I, a \in \Omega_0, b \in \Omega_1, c_{a,\mu,b} = 0$.

重复以上过程我们得到 $c_{a,\mu,b} = 0$ 对任意的 $\mu \in \mathbb{Z}I, a, b \in \Omega$.

4　U 的三角分解

设 $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ 是一个 Hopf 代数,我们可以考虑它的伴随表示.对任意 $a, b \in A$,设 $\Delta(a) = \sum_t a_t \otimes a'_t$,定义

$$\mathrm{ad}(a)(b) = \sum_t a_t b S(a'_t).$$

特别地,考虑 $A = \widetilde{U}$.则对任意 $i \in I, u \in \widetilde{U}$ 有

$$\mathrm{ad}(E_i)u = E_iu - K_iuK_i^{-1}E_i,$$

$$\mathrm{ad}(F_i)u = (F_iu - uF_i)K_i,$$

$$\mathrm{ad}(K_i)u = K_iuK_i^{-1}.$$

由最后一个式子即有对 $\forall \mu \in \mathbb{Z}I$

$$\mathrm{ad}(K_\mu)u = K_\mu uK_\mu^{-1}.$$

引理 7　设 $i\in I^{re}, j\neq i$. 记 $r=1-a_{ij}$，则

$$\mathrm{ad}(E_i^r)(E_j)=u_{ij}^+,\quad \mathrm{ad}(F_i^r)(F_jK_j)=u_{ij}^-K_jK_i^r.$$

引理 8　设 $i\in I^{re}, j\neq i$. 则对任意 $t\in I$

$$[F_t,u_{ij}^+]=0,\quad [E_t,u_{ij}^-]=0.$$

证明　我们只要证前一式,再由引理 1.3 即得后一式. 当 $t\neq i,j$ 时,由(R2)有 $[F_t,E_i]=0=[F_t,E_j]$,从而 $[F_t,u_{ij}^+]=0$. 当 $k=i$ 或 j 时，见参考文献[3].

记 J^+（或 J^-）为所有 u_{ij}^+,v_{ij}^+（或 u_{ij}^-,v_{ij}^-）在 $\widetilde{U}^+$（或 $\widetilde{U}^-$）中生成的双边理想.

引理 9　所有的 u_{ij}^+,v_{ij}^+（或 u_{ij}^-,v_{ij}^-）在 $\widetilde{U}$ 中生成的双边理想是 $\widetilde{U}^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes J^+$（或 $J^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes\widetilde{U}^+$）在命题 2 定义的乘法映射下的象.

证明　我们只须证前一种情况;后一种情况再由引理 1 即得. 记 $\widetilde{U}^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes J^+$ 在乘法映射下的象为 V. 显然 V 包含在引理中的理想里;而它包含此理想的所有生成元,因此我们只要证 V 是双边理想. 作为向量空间, V 由所有形如 $uu_{ij}^+E_s$ 和 $uv_{ij}^+E_s$ 的元素线性张成. 显然 V 是 $\widetilde{U}$ 的左理想. 要证 V 是右理想只须验证 $\widetilde{U}$ 的生成元右乘保持 V 不变. 设 $t\in I, \mu\in\mathbb{Z}I$ 则有

$$uu_{ij}^+E_sE_t=uu_{ij}^+E_{(s,t)},\quad uu_{ij}^+E_sK_\mu=q^{-(\mu,\mathrm{wt}(s)+ri+j)}uK_\mu u_{ij}^+E_s,$$

$$uv_{ij}^+E_sE_t=uv_{ij}^+E_{(s,t)},\quad uv_{ij}^+E_sK_\mu=q^{-(\mu,\mathrm{wt}(s)+i+j)}uK_\mu v_{ij}^+E_s.$$

这里 $r=1-a_{ij}$. 以上说明 V 在 $\widetilde{U}^{\geqslant 0}$ 的右乘下不变. 注意到

$$uu_{ij}^+E_sF_t=uF_tu_{ij}^+E_s-u[F_t,u_{ij}^+]E_s-uu_{ij}^+[F_t,E_s].$$

由引理 8 上式右边的第二项为 0;由(R2) $[F_t,E_s]\in\widetilde{U}^{\geqslant 0}$,这证明了 $uu_{ij}^+E_sF_t\in V$. 最后注意到

$$uv_{ij}^+E_sF_t=uv_{ij}^+[E_s,F_t]+uv_{ij}^+F_tE_s=uv_{ij}^+[E_s,F_t]+uF_tv_{ij}^+E_s.$$

类似前面的说明, $uv_{ij}^+E_sF_t\in V$. 以上证明了 V 是右理想.

定理　(a)乘法映射

$$U^-\otimes U^0\otimes U^+\to U,\quad u_1\otimes u_2\otimes u_3\to u_1u_2u_3$$

是向量空间的同构.

(b) 代数 U^+ 由 $\{E_i\mid i\in I\}$ 生成且其定义关系恰是(R5)和(R7).

(c) 代数 U^- 由 $\{F_i\mid i\in I\}$ 生成且其定义关系恰是(R6)和(R8).

(d) $\{K_\mu\mid\mu\in\mathbb{Z}I\}$ 是 U^0 的一组基.

证明　设 $\pi:\widetilde{U}\to U$ 是自然满同态,其核为 J. 则 J 是由所有 u_{ij}^+,u_{ij}^- 和 v_{ij}^+,v_{ij}^- 生成的理想. 由引理 9, J 是 $(\widetilde{U}^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes J^++J^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes\widetilde{U}^+)$ 在乘法映射下的象. 于是 $J\cap\widetilde{U}^0$ 为

$$(\widetilde{U}^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes J^++J^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes\widetilde{U}^+)\cap\mathbb{R}\otimes\widetilde{U}^0\otimes\mathbb{R}=0$$

在乘法映射下的象,所以是 0. 这样 π 诱导出同构 $\widetilde{U}^0\twoheadrightarrow U^0$. 由引理 5 即得(d).

由引理 9, $J\cap\widetilde{U}^+$ 是

$$(\widetilde{U}^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes J^++J^-\otimes\widetilde{U}^0\otimes\widetilde{U}^+)\cap\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes\widetilde{U}^+=\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes J^+$$

在乘法映射下的象,即是 J^+. 于是 π 诱导出同构 $\widetilde{U}^+/J^+\twoheadrightarrow U^+$, 此即(b). 至于(c),可同样证明. 特别地,我们得到同构 $\widetilde{U}^-/J^-\twoheadrightarrow U^-$.

注意到

$$(\widetilde{U}^{-}\otimes\widetilde{U}^{0}\otimes\widetilde{U}^{+})/(\widetilde{U}^{-}\otimes\widetilde{U}^{0}\otimes J^{+}+J^{-}\otimes\widetilde{U}^{0}\otimes\widetilde{U}^{+})$$

同构于 $(\widetilde{U}^{-}/J^{-})\otimes\widetilde{U}^{0}\otimes(\widetilde{U}^{+}/J^{+})$，从而命题 3.4 中定义的乘法映射诱导以下向量空间同构：

$$(\widetilde{U}^{-}/J^{-})\otimes\widetilde{U}^{0}\otimes(\widetilde{U}^{+}/J^{+})\twoheadrightarrow\widetilde{U}/J,\ (u_1+J^{-})\otimes u_2\otimes(u_3+J^{+})\to u_1u_2u_3+J.$$

由(b)、(c)、(d)即得(a).

类似于引理 5 和命题 1,我们还有以下的向量空间同构：

$$U^{+}\otimes U^{0}\otimes U^{-}\twoheadrightarrow U,$$

$$U^{0}\otimes U^{+}\twoheadrightarrow U^{\geqslant 0},\ U^{-}\otimes U^{0}\twoheadrightarrow U^{\leqslant 0}.$$

致谢：作者感谢章璞教授的悉心指导和对原稿的仔细修改.并感谢冯克勤教授的帮助和鼓励.

参　考　文　献

[1] Borcherds R. Generalized Kac-Moody algebras [J]. J Algebra, 1988, 115: 501-512.

[2] Kang S-J. Quantum deformations of generalized Kac-Moody algebras [J]. J Algebra, 1995, 175: 1041-1066.

[3] Jantzen J C. Lectures on quantum groups, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6 [M]. American Mathematical Society, 1995.

[4] Kac V G. Infinite dimensional Lie algebras [M]. second ed. Cambridge University Press, 1985.

Triangular Decomposition of a Quantized Generalized Kac-Moody Algebra

HUANG Hua-lin, YE Yu, FU Guang-yu

(*University of Science and Technology of China*, *Hefei*, 230026)

Abstract: The structure of a quantized generalized Kac-Moody algebra is studied. In particular, the triangular decomposition and the defining relations of each part are given.

Key words: generalized Kac-Moody algebra; quantized enveloping algebra; triangular decomposition