肌肉力学

第14讲

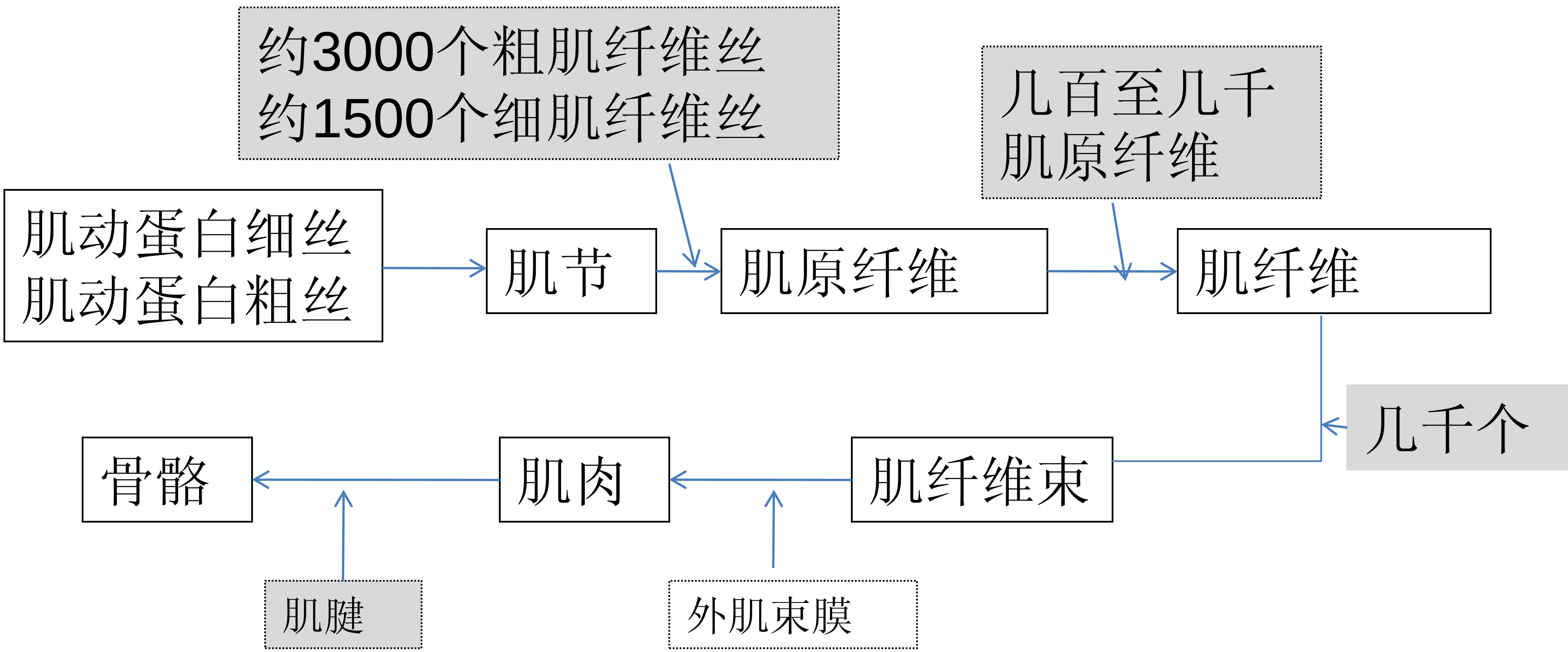
- 肌肉的基本机能：化学能转变为机械能
- 表征肌肉活动的生物力学指标：

1. 肌张力：肌肉端部测得的力
2. 收缩速度：肌肉长度变化的速度
3. 肌肉收缩的两种形式：

等长收缩（静力收缩）：肌肉收缩时肌纤维长度不变，无关节活动，但肌张力增加（isometric）。

等张收缩：张力一定，肌肉缩短 （isotonic）

肌肉的生理学特性



哺乳类骨骼肌舒张时，肌节单元 长2-3 μm， 收缩时 1 μm，

肌肉宏观结构示意图

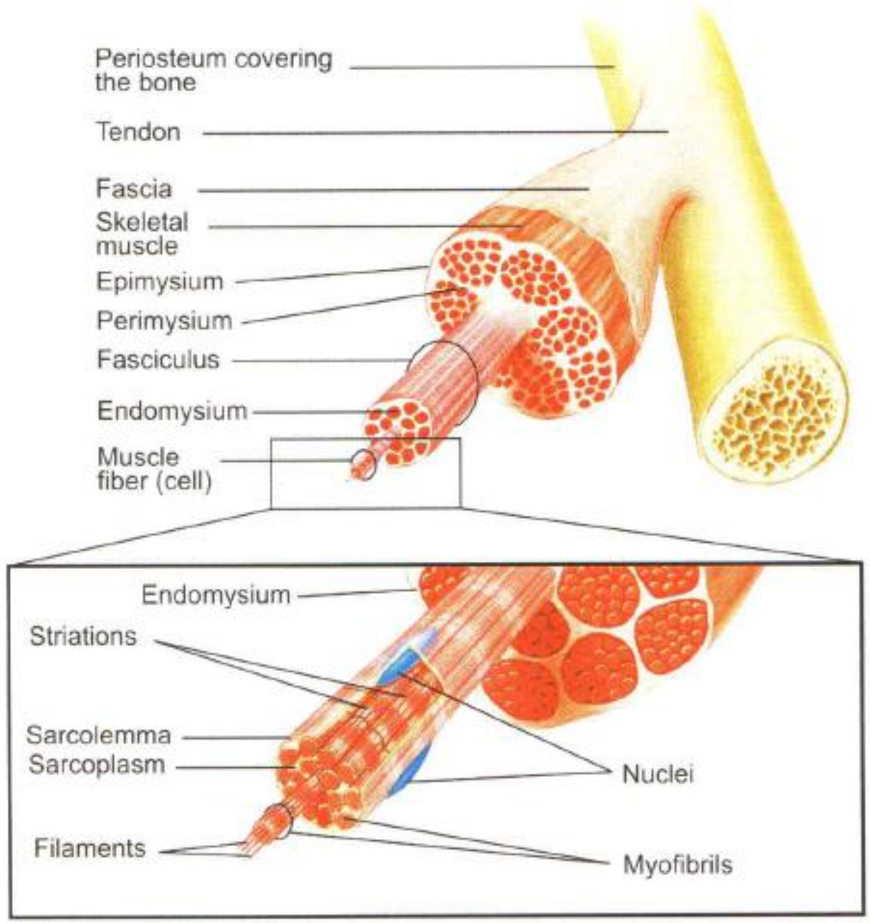


Plate 6 Schematic representation of muscle macrostructure (Fox 2004, with permission from The McGraw-Hill Companies, January 14, 2008) From *Human Physiology*, Fox, (2004), pp. 327 (see Figure 12.1.1)

肌肉的微观结构– 肌节

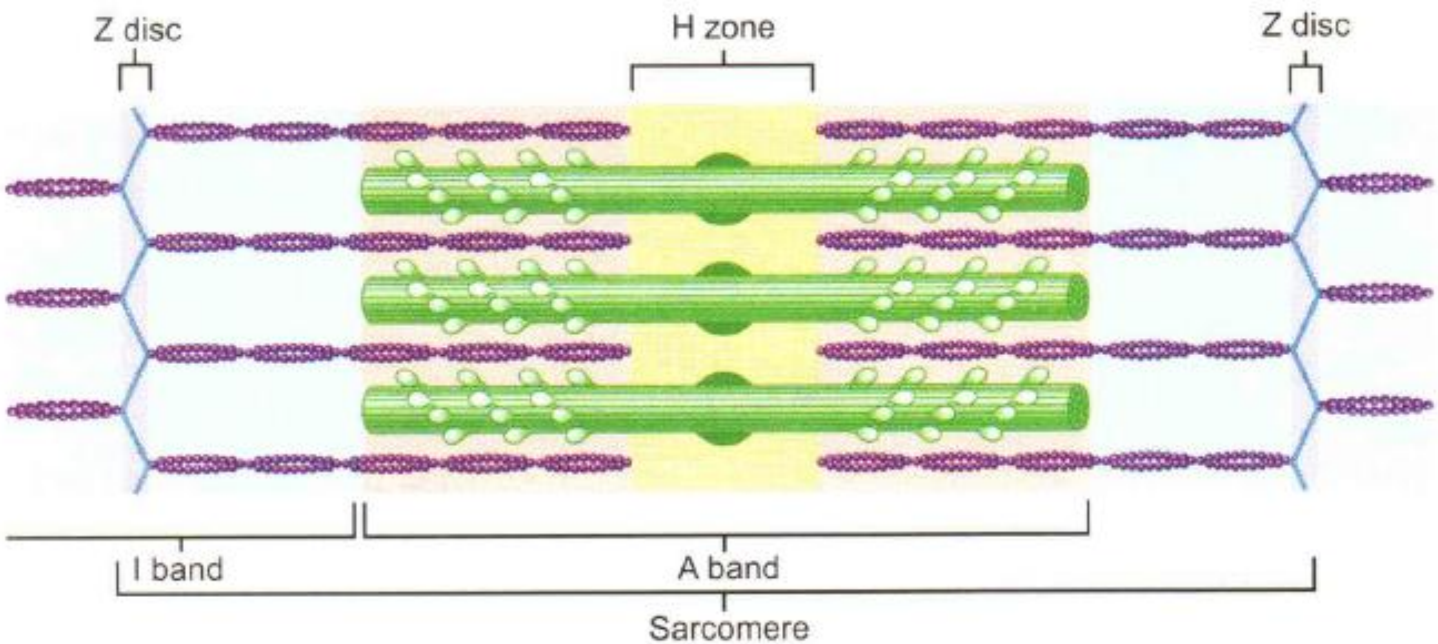


Plate 7 Muscle microstructure (Fox 2004, with permission from The McGraw-Hill Companies, January 14, 2008) From *Human Physiology*, Fox, (2004), pp. 331 (see Figure 12.1.2)

描述肌肉力学的Hill方程

Hill方程：肌肉力学的基础方程。描述了骨骼肌在强直状态下快速释放时张力S（tension）和肌肉收缩速度（contraction）之间的关系

$$(V+b)(S+a)=b(S_0+a)$$

$$\frac{S}{S_0}=\frac{1-(V/V_0)}{1+C(V/V_0)}$$

无量纲的形式

S_0 等长强直收缩时的最大张力

a,b,S_0 ---独立常数

$$V_0=\frac{bS_0}{a}$$

$$C=\frac{S_0}{a}$$

Hill 三元件模型

反应肌肉的张力-收缩以及张力-伸张关系的模型

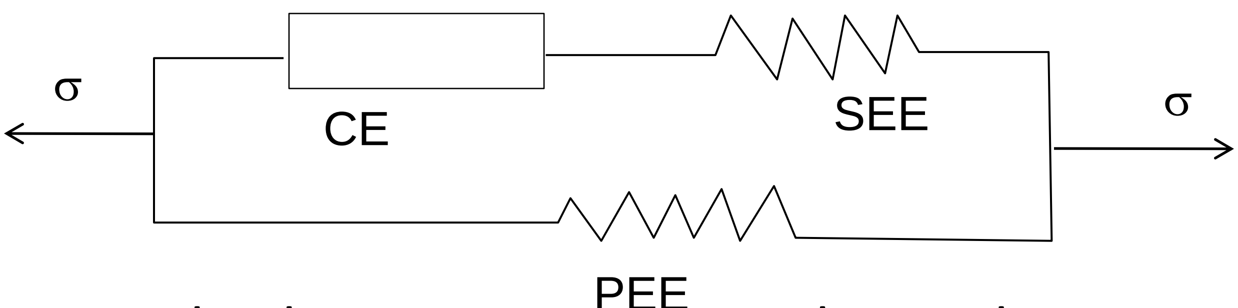
CE收缩元件的特性-用Hill方程和Gordon‘s Curve 描述

张力-拉伸关系（SEE 元件）可由下式描述

$$S = (S^{*} + \beta)e^{\alpha(\lambda - \lambda^{*})} - \beta$$

αβ--物质常数

S^{*} 对应于拉伸率λ^{*}的张力



CE： contratile element SEE: series elastic element

PEE:Parallel elastic element

强直状态下张力-速度曲线

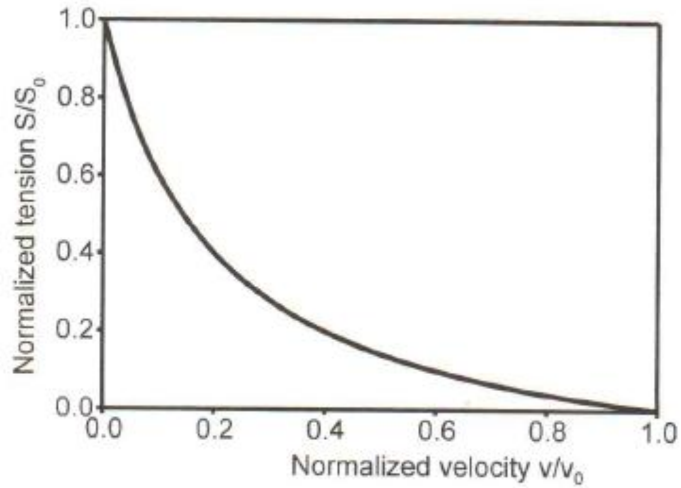


Fig. 12.2.1 Tension–velocity curve corresponding to a muscle in the tetanized condition

等长收缩时，肌节的张力-长度曲线

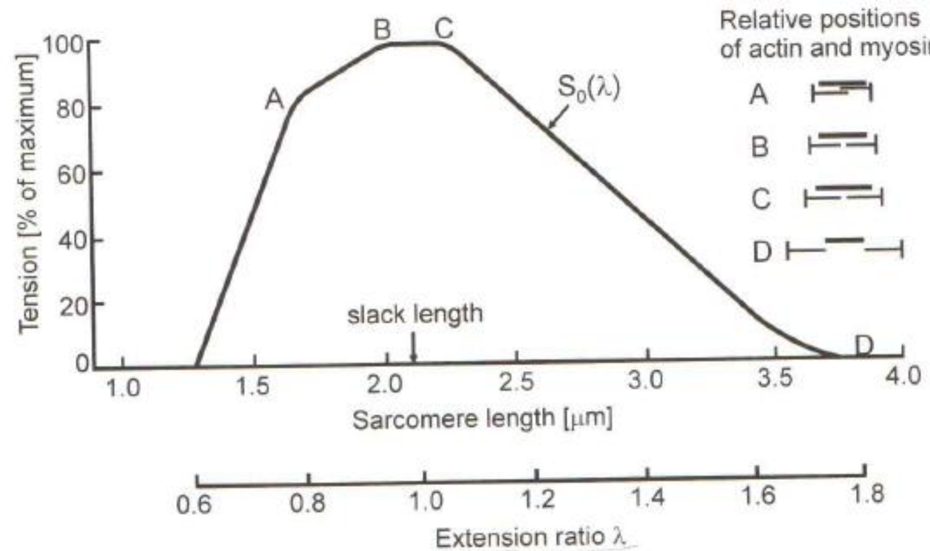


Fig. 12.2.2 Isometric tension–length curve (Gordon *et al.* 1966)

肌纤维内的应力计算

主要任务：确定肌纤维方向上的应力

肌肉建模和其它变形结构的建模原理相同

1. 肌肉被分割成有限单元
2. 每一个有限单元包含有一个肌纤维和积分点
3. 应力作用下肌纤维拉长
4. 每一个肌纤维用三元件Hill模型表示

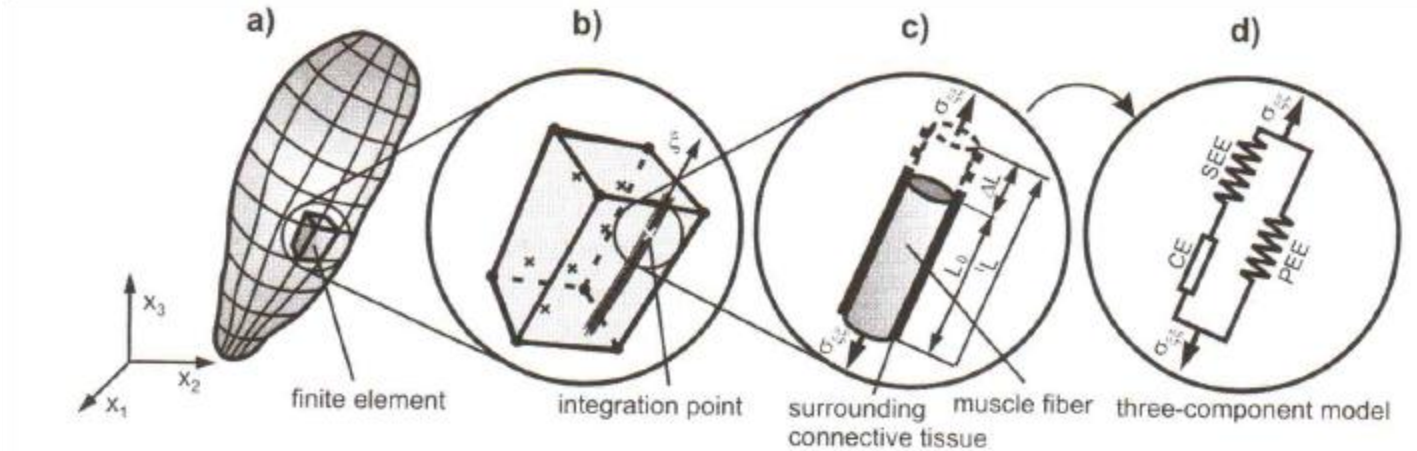


Fig. 12.1.3 Schematics of muscle FE modeling: from muscle as a deformable body to Hill's model. (a) Muscle discretization into finite elements; (b) A 3D finite element with integration points and muscle fiber; (c) Elongation of muscle fiber under the stress $\sigma_{\xi\xi}$; (d) Hill's three-component model

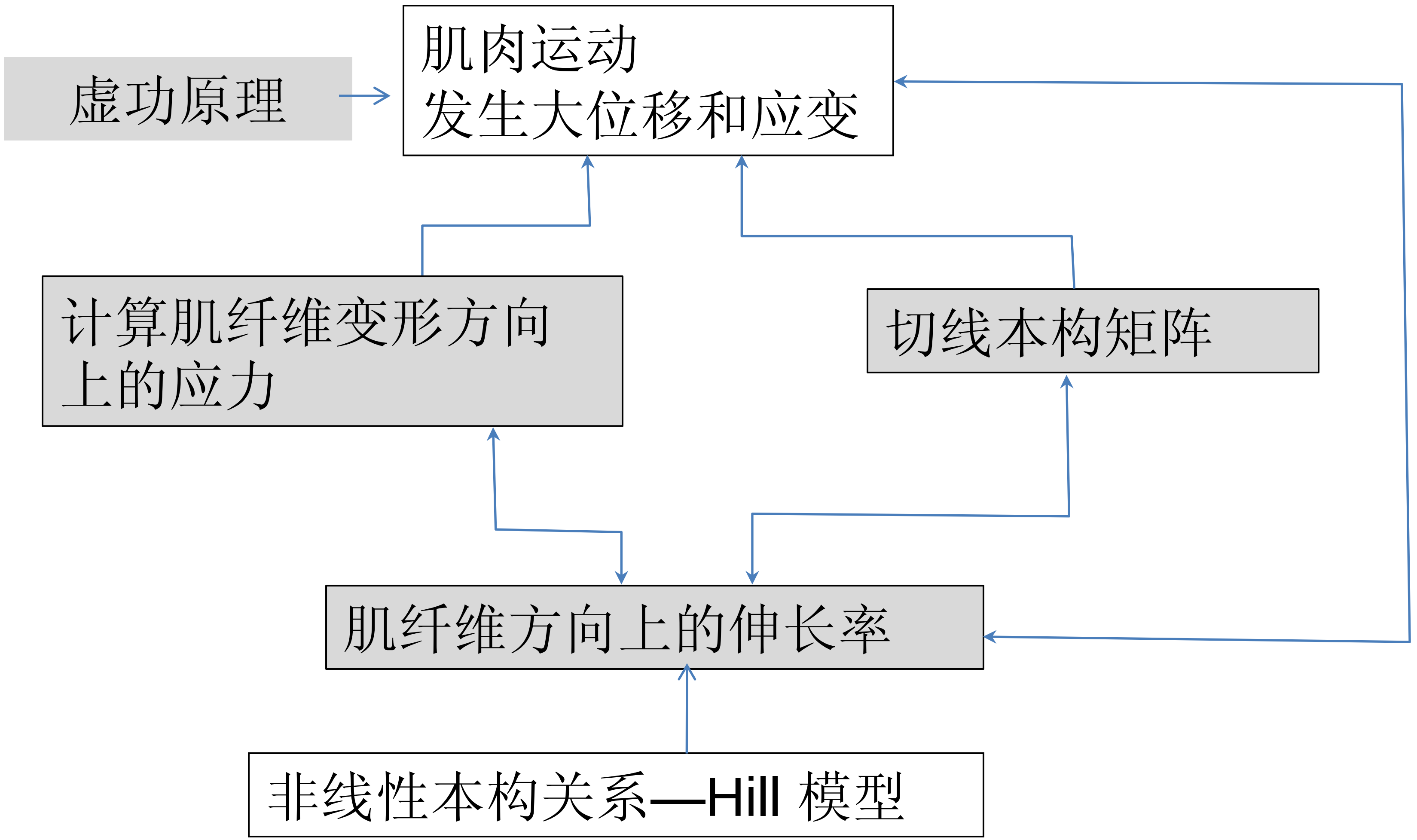
肌肉的有限元模型：

a）将肌肉分割成有限单元

b）有限单元的积分点和肌纤维

c）在肌纤维方向应力作用下肌纤维拉长

d）三元件模型



虚功原理
肌肉运动
发生大位移和应变
计算肌纤维变形方向上的应力
切线本构矩阵
肌纤维方向上的伸长率
非线性本构关系—Hill 模型

虚功原理--有限元平衡方程

$$({}^{n+1}\mathbf{K}_L)^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{n+1}\mathbf{F}^{ext} - {}^{n+1}\mathbf{F}^{\mathrm{int}(i-1)}$$

n 时间步

i 迭代步

${}^{n+1}\mathbf{K}_L$ 线性刚度矩阵

$\Delta\mathbf{U}^{(i)}$ 节点位移的微小增量

${}^{n+1}\mathbf{F}^{ext}$ ${}^{n+1}\mathbf{F}^{\mathrm{int}}$ 节点内部和外部力

$${}^{n+1}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{n}\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{(1)} + \ldots\Delta\mathbf{U}^{(i)}$$

线性应变-位移矩阵

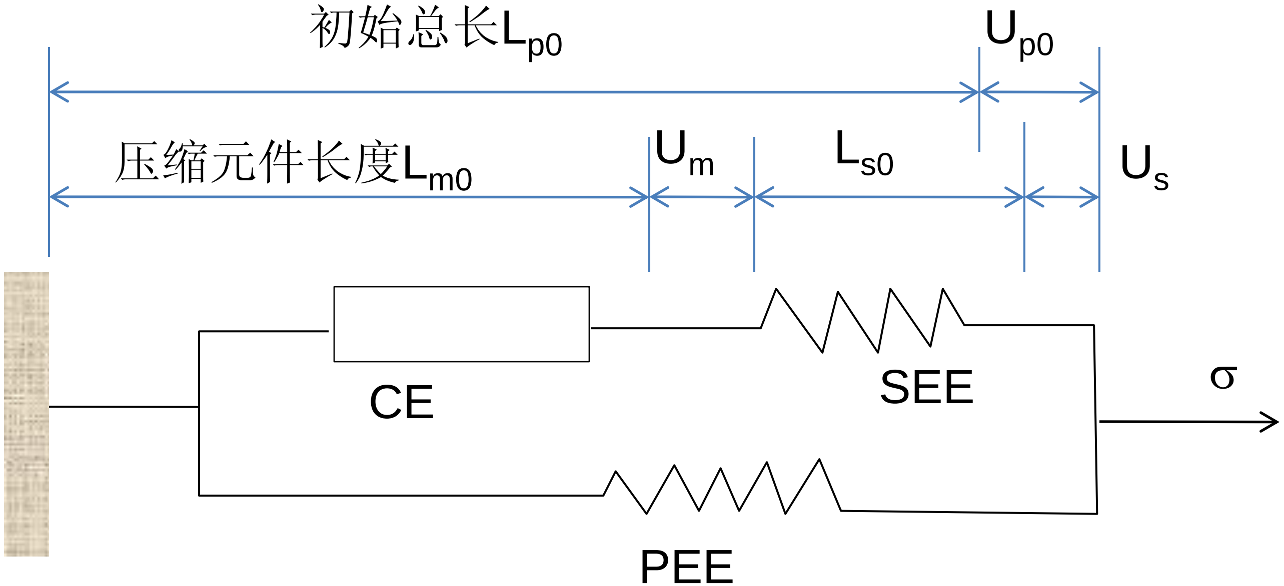
$${}^{n+1}\mathbf{K}_L^{(i-1)} = \int_{{}^{n+1}V^{(i-1)}} ({}^{n+1}\mathbf{B}_L^T\,{}^{n+1}\mathbf{C}\,{}^{n+1}\mathbf{B}_L)^{(i-1)}\,dV$$

切线本构矩阵

$${}^{n+1}\mathbf{F}_L^{\mathrm{int}(i-1)} = \int_{{}^{n+1}V^{(i-1)}} ({}^{n+1}\mathbf{B}_L^T\,{}^{n+1}\boldsymbol{\sigma})^{(i-1)}\,dV$$

肌纤维方向上的应力

肌纤维方向上的伸长率



$$L_{p0} + {}^0U_p = L_{m0} + {}^0U_m + L_{s0} + {}^0U_s$$

$${}^0\lambda_m = (1+k)\,{}^0\lambda_p - k \qquad k = {}^0L_s / {}^0L_m$$

$${}^0\lambda_p = \frac{{}^0\lambda_p + U_p}{{}^0\lambda_p} \qquad {}^0\lambda_m = \frac{\lambda_m + U_m}{\lambda_m}$$

在第n时间步结束时，各个元件的长度变化关系有

$$ {}^{t}L_p = L_{m0} + {}^{0}U_m + \int_{t_a}^{t} V_m dt + L_{s0} + {}^{0}U_s $$

$$ (1+k)\,{}^{n+1}\lambda_p = \lambda_m + \Delta\lambda_m + k\,{}^{n}\lambda_s + k\Delta\lambda_s $$

在任一时间，压缩元件的应力等于弹性元件的应力

$$ {}^{n+1}\sigma_m = {}^{n+1}\sigma_s $$

根据Hill 方程，有

$$ {}^{n+1}\sigma_m = {}^{n}\sigma_0\,{}^{n+1}\alpha_a \frac{1+\Delta\lambda_m/\Delta\lambda_{m0}}{1-c\Delta\lambda_m/\Delta\lambda_{m0}} \qquad \frac{v}{v_0} = \frac{\Delta\lambda_m}{\Delta\lambda_{m0}} $$

${}^{n}\sigma_0$ 伸长率为${}^{n}\lambda_m$ 时的强直应力

${}^{n+1}\alpha_a$ 肌肉动作功能函数 $0 \le \alpha(t) \le 1$

$\alpha_a = 0$ 被动状态 $\alpha_a = 1$ 强直状态

收缩元件特性值，已知

$\Delta\lambda_{m0} = \Delta t \dot{\lambda}_{m0}$ 对应于最大等长强直力的伸长率变化率

弹性元件的本构关系

$$ {}^{n+1}\sigma_s = \beta\left[e^{\alpha({}^n\lambda_s - 1 + \Delta\lambda_s)} - 1\right] = e^{\alpha\Delta\lambda_s}\left({}^n\sigma_s + \beta\right) - \beta $$

$$ \Delta\lambda_m = a_1 - k\Delta\lambda_s $$

$$ a_1 = (1+k)\boxed{{}^{n+1}\lambda_p} - {}^n\lambda_m - k\,{}^n\lambda_s $$

由Gordon曲线给出λ_m

$$ f(\Delta\lambda_s) = (a_2 + a_3\Delta\lambda_s)e^{\alpha\Delta\lambda_s} + a_4\Delta\lambda_s + a_5 = 0 $$

$$ a_2 = \left({}^n\sigma_s + \beta\right)\left(1 - \frac{a_1 c}{\Delta\lambda_{m0}}\right) \qquad a_3 = \left({}^n\sigma_s + \beta\right)\left(\frac{kc}{\Delta\lambda_{m0}}\right) $$

$$ a_4 = k\frac{{}^n\sigma_0\,{}^{n+1}\alpha_a - \beta c}{\Delta\lambda_{m0}} $$

$$ a_5 = -{}^n\sigma_0\,{}^{n+1}\alpha_a - \beta - a_1\frac{{}^n\sigma_0\,{}^{n+1}\alpha_a - \beta c}{\Delta\lambda_{m0}} $$

运用Nowton迭代法可以求得Δλs，从而可以求得σ_s

作用在PEE上的应力

$$ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{E}\,{}^{n+1}\mathbf{e} $$

弹性本构矩阵

肌肉质点的应变

$$ {}^{n+1}\mathbf{e} = {}^{n}\mathbf{B}_{L}\Delta\mathbf{U} $$

应变-位移矩阵

应力由主动部分和被动部分组成

$$ {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{E}(1-\phi)^{n+1} + \phi^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{s} $$

总肌肉体积中肌纤维的占有率

确定总肌节伸长率 ${}^{n+1}\lambda_p$

$$ {}^{n+1}\lambda^{(i-1)} = \left[\left({}_{n+1}^{\;\;0}B^{n+1}\xi_{0i}\;{}^{n+1}\xi_{0j} \right)^{i-1} \right]^{-1/2} $$

逆左Cauchy-Green 变形张量

单位矩阵的分量

$$ {}_{n+1}^{\;\;0}\mathbf{B}^{(i-1)} = \left({}_{n+1}^{\;\;0}\mathbf{F}^{T}\;{}_{n+1}^{\;\;0}\mathbf{F} \right)^{(i-1)} $$

逆变形梯度

$$ {}_{n+1}^{\;\;0}F_{ij}^{\;(i-1)} = \delta_{ij} - \frac{\partial^{n+1}u_i^{(i-1)}}{\partial^{n+1}x_j^{i-1}} $$

插值函数

$$ {}^{n+1}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^{(i-1)} = \sum_{K=1}^{N} \frac{\partial N_K}{\partial^{n+1}x^{(i-1)}}\;{}^{n+1}U_i^{K(i-1)} \qquad i = 1,2,3 $$

节点位移分量

$$ {}^{n+1}\overline{C}_{11} = \phi \frac{\partial^{n+1}\sigma_s}{\partial^{n+1}e_{\xi\xi}} + (1-\phi)C_{11}^E $$

$$ {}^{n+1}\overline{C}_{ij} = (1-\phi)C_{ij}^E $$

在局部坐标系ξηζ内的切线本构矩阵

$$ \frac{\partial^{n+1}\sigma_s}{\partial^{n+1}e_{\xi\xi}} = {}^{n+1}\lambda_p \frac{\partial^{n+1}\sigma_s}{\partial^{n+1}\lambda_p} $$

$$ \frac{\partial^{n+1}\sigma_s}{\partial^{n+1}\lambda_p} = \alpha e^{\alpha\Delta\lambda_s}\left({}^n\sigma_s + \beta\right)\frac{\partial\Delta\lambda_s}{\partial^{n+1}\lambda_p} $$

串联弹性元件本构关系求微分

$$ \frac{\partial\Delta\lambda_s}{\partial^{n+1}\lambda_p} = -\frac{k_2 + k_5}{e^{\alpha\Delta\lambda_s}(a_3 + \alpha(a_2 + a_3\Delta\lambda_3)) + a_4} $$

$$ \frac{\partial a_1}{\partial^{n+1}\lambda_p} = 1 + k \quad \frac{\partial a_2}{\partial^{n+1}\lambda_p} = k_2 = -({}^n\sigma_s + \beta)\left(\frac{C}{\Delta\lambda_{m0}}(1+k)\right) $$

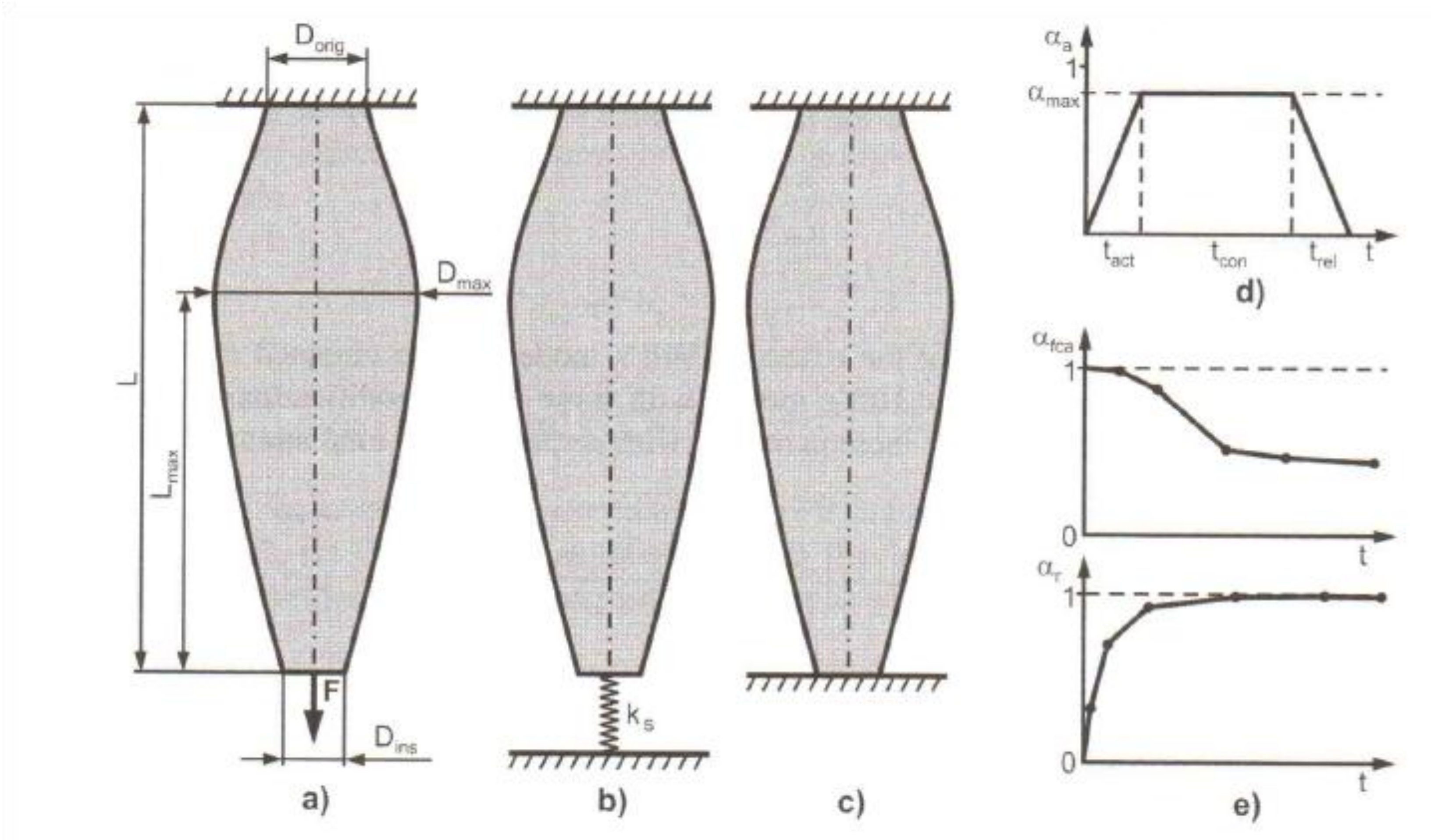
$$ \frac{\partial a_5}{\partial^{n+1}\lambda_p} = k_5 = -\frac{a_4}{k}(1+k) $$

局部坐标与整体坐标的变换矩阵

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^{\sigma}\mathbf{C}(\mathbf{T}^{\sigma})^{T}$$

肌肉作为连续介质时的切线本构矩阵（在整体坐标下）

$$^{n+1}\mathbf{C} = \frac{\partial\, ^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial\, ^{n+1}\mathbf{e}} = \mathbf{C}^{E}(1-\phi)^{n+1} + \phi \frac{\partial\, ^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{s}}{\partial\, ^{n+1}\mathbf{e}}$$

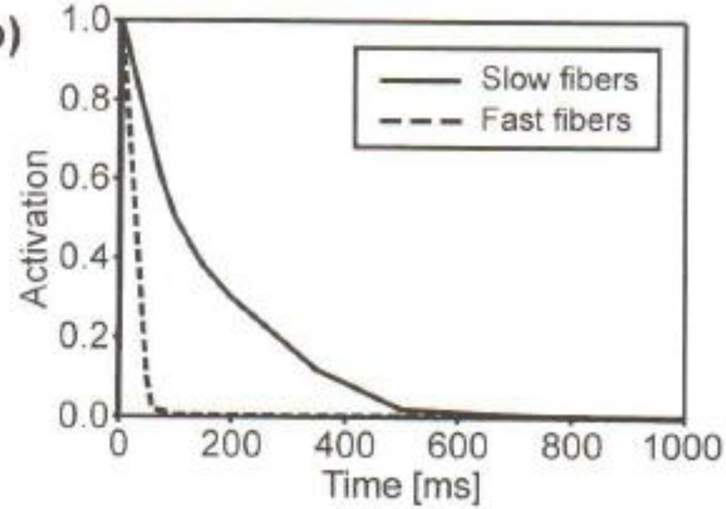


圆柱型肌肉模型：a）施加力F b）一端连接弹簧
c）等长状态 d）肌肉在活性化状态时的活性功能曲线
D）疲劳和恢复功能曲线

a)

Constant	Slow fibers	Fast fibers
α [-]	9.4	9.4
β [MPa]	0.11	0.11
a [MPa]	0.01	0.07
$\dot{\lambda}_{m0}$ [1/s]	2.0	10.0
k	0.3	0.3
σ_0 [MPa]	0.06	0.06

b)

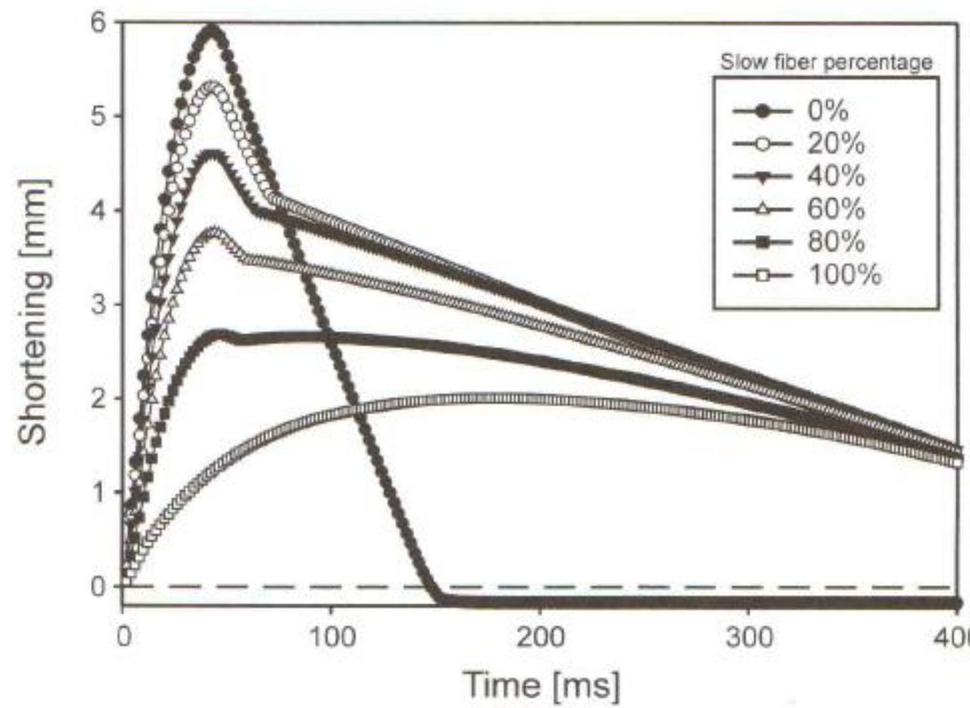


◆Hill方程中的相关参数

◆快速和慢速肌纤维对应的活性化功能曲线

◆快速和慢速肌纤维数量不同时，肌肉的缩短反应

c)



青蛙肌肉变形的有限元模拟

a）有限元网格 b 未变形时的肌肉模型和实验状态

c）肌肉的变形状态