

第五讲 生物流体力学

5.1 静脉系统的流动

概要

- ✧ 静脉系统内血流的压力低,血液通过肌肉组织在血管薄壁上的挤压而被押回心脏.
 - ✧ 透壁压有时会出现负值,这时,血管会出现塌陷(collapse). 原因:压力梯度,肌肉运动,内胸(intrathoracic)压力变化
- 静脉部分压力与管截面积之间的关系

$$p - p_0 = k_p \left[1 - \left(\frac{A}{A_0} \right)^{-3/2} \right] \quad k_p = 0.5 \times 10^6 \text{ Pa}$$

k_p 与管壁厚度和弹性模量成比例

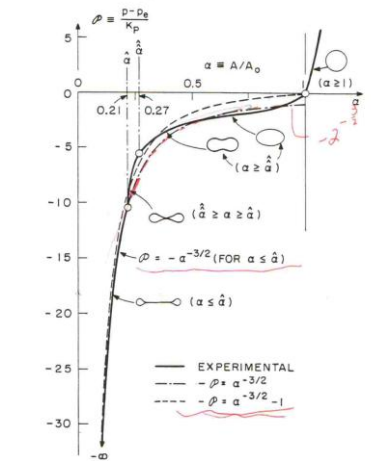


Fig. 1 Behavior of a collapsible tube. Dimensionless transmural pressure difference, ϕ , versus dimensionless area ratio, α . Solid curve shows typical experimental curve for thin-walled latex tube, and adjacent to it, typical cross-sectional shapes for the different ranges of α . Dot-dash curve represents the similarity law, $\phi = -\alpha^{-3/2}$, and coincides with solid curve for $\alpha < \hat{\alpha}$. Dashed curve represents the modified similarity law, $\phi = 1 - \alpha^{-3/2}$. Point contact occurs at $\alpha = \hat{\alpha}$, and line contact occurs at $\alpha = \hat{\alpha}$.

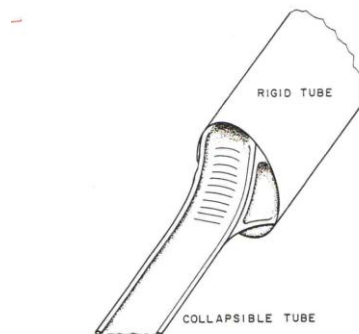


Fig. 2 Adjustment zone of a highly collapsed compliant tube mounted on a circular rigid tube

弹性管与刚性管的比较

Steady Flow in Collapsible Tubes

Shapiro, A., Trans. ASME, J. Biomech. Eng. pp.126-143, 1977

5.2 肺循环

体循环（大循环） 由左心室射出的动脉血入主动脉，又经动脉各级分支，流向全身各器官的毛细血管。然后血液经过毛细血管壁，借助组织液与组织细胞进行物质和气体交换。经过交换后，使动脉血变成了静脉血，再经过小静脉、中静脉，最后经过上、下腔静脉流回右心房。血液沿着上述路径的循环称为体循环或大循环。体循环主要特点是路程长，流经范围广泛，以动脉血滋养全身各部，并将其代谢产物经静脉运回心。

体循环的途径：动脉血从左心室泵→主动脉→各级动脉分支→全身各部毛细血管→静脉血经各级静脉→上、下腔静脉和冠状窦→右心房

肺循环（小循环） 从右心室射出的静脉血入肺动脉，经过肺动脉在肺内的各级分支，流至肺泡周围的毛细血管网，在此进行气体交换，使静脉血变

成含氧丰富的动脉血，经肺内各级肺静脉属支，再经肺静脉注入左心房。血液沿上述路径的循环称为肺循环或小循环。肺循环的特点是路程短，只通过肺，主要功能是完成气体交换。

肺循环的途径：静脉血从右心室→肺动脉干及其分支→肺泡毛细血管→动脉血经肺静脉→左心房

肺循环与体循环一样具有动脉→毛细血管→静脉循环,但特点与体循环不同

- ✧ 肺循环压力低,平均血压 15 mmHg,是体循环的 1/6. 动脉血压波动在 11-25mmHg, 静脉在 2-7 mmHg
- ✧ 肺动脉壁薄,杨氏模量与体循环动脉相同,但极易扩张.
- ✧ 血管分支与体循环相似
- ✧ 肺循环血管中具有基本的弹性组织,平滑肌较少.
- ✧ 由于肺循环的动脉系统很短(主肺动脉→毛细血管: 20 cm), 所以波形无很大变化.
- ✧ 血管内速度分布较平坦, Re 远大于 1, Womersley 数 α 也远大于 1.
- ✧ 肺的血容量 肺部的血容量约为 450ml, 占全身血量的 9% 。由于肺组织和肺血管的可扩张性大, 故肺部血容量的变化范围较大。在用力呼气时, 肺部血容量减少至约 200ml; 而在深吸气地可增加到约 1000ml。由于肺的血容量较多, 而且变化范围较大, 故肺循环血管起着贮血库的作用。当机体失血时, 肺循环可将一部分血液转移至体循环, 起代偿作用。
- ✧ 肺循环毛细血管外的液体交换 如前所述, 肺循环毛细血管平均约 0.9kPa(7mmHg), 而血浆胶体渗透压平均 3.3kPa(25mmHg), 故将组织中的液体吸收入毛细血管的力量较大。现在一般认肺部组织液的压力为负压。这一负压使肺泡膜和毛细血管管壁互相紧密相贴, 有利于肺泡沫和血液之间的气体交换。组织液负压还有利于吸收肺泡内的液体, 使肺泡内没有液体积聚。在某些病理情况下, 如左心衰竭时, 肺静脉压力升高, 肺循环毛细血管压也随着升高, 就可使液体积聚在肺泡或肺的组织间隙中, 形成肺水肿。

5.3 肺循环血流动力学模型

A nonlinear fluid model for pulmonary blood circulation, J. Biomechanics, Vol. 26, pp.653-664, 1993.

5.3.1

- ✧ 准一维非线性流体力学模型
- ✧ 肺循环由 18 层分支血管组成,包括:动脉,静脉和毛细血管分支.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(V^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + F = G_z$$

$$G_z = \frac{d\phi}{dx} \quad F = \frac{8\pi}{A} \frac{\mu}{\rho} V$$

G ---外力 ϕ -- 势能函数 F—摩擦力 V—及面积上的平均速度

A—横截面积

在微循环阶段,由 N 个相同血管组成等价管道,这时的摩擦力为

$$F = \frac{8\pi N}{S} \frac{\mu}{\rho} V$$

μ --- 粘度

S --- 总截面积

N --- 血管数量

当 $A \geq A_0$ 时,压力与截面积的关系可表示为

$$A = A_0 + \alpha(P - P_0)$$

α --血管的平均柔量(compliance), P_0 -初始压力

当 $A \leq A_0$ 时,血管会处于部分塌陷状态(collapsed state)

$$P_T = P - P_0 \leq 0 \quad (\text{Transmural pressure})$$

$$P - P_0 = k_p \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{A}{A_0} \right) + \alpha_2 \left(\frac{A}{A_0} \right)^2 \right]$$

$$\alpha_0 = -20.9625 \quad \alpha_1 = -55.9 \quad \alpha_2 = 34.9375$$

当 $A/A_0 \leq 0.8$ 时,

$$P - P_0 = -k_p \left(\frac{A}{A_0} \right)^{-3/2}$$

$$k_p = 1$$

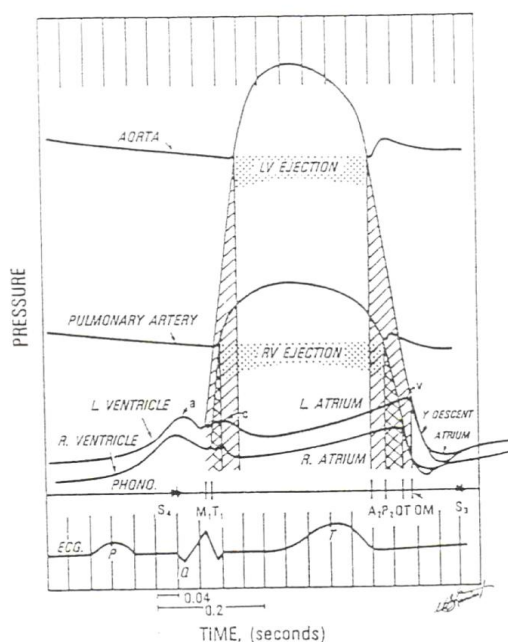
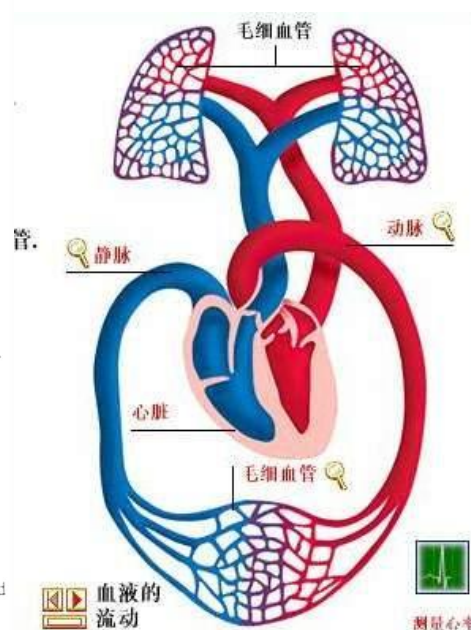


Fig. 1. Diagram of pressure waveforms in the aorta and pulmonary artery, right and left ventricle (West, 1985).



循环系统不同部位的压力波

5.3.2 数值求解

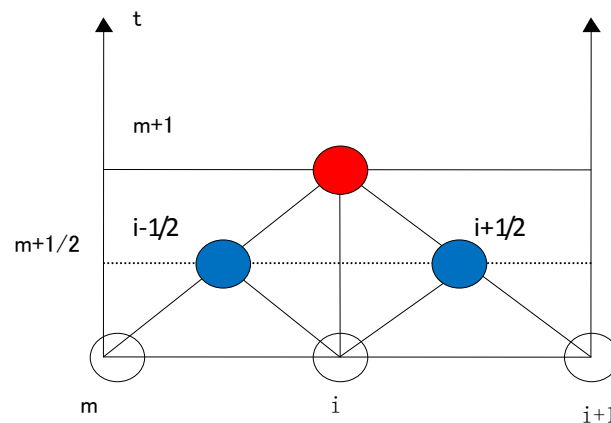
边界条件

1. 给定右心室的压力曲线，扩张期（diastolic）8mmHg 收缩期（systolic）25mmHg
2. 左心房（left atrium）平均压力 2mmHg
3. 分支处，流量守恒，

$$A_m V_m = A_{d1} V_{d1} + A_{d2} V_{d2}$$

$$P(A_m) = P(A_{d1}) \quad P(A_m) = P(A_{d1})$$

4. 内部节点的求解：Two-step Lax-Wendroff 法
求解步骤



例如：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

对于双曲线形的偏微分方程

第一步

$$\phi_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1}^n + \phi_i^n) + \frac{\Delta t}{2} a \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{\Delta x}$$

$$\phi_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_{i-1}^n + \phi_i^n) + \frac{\Delta t}{2} a \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}$$

第二步

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + a \Delta t \frac{\phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \phi_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}$$

5. 分支点的求解

利用压力和流量的边界条件以及控制方程得到关于 A_m , V_m , A_{d1} , V_{d1} , A_{d2} , V_{d2} 的方程，运用 Gauss-Seidel 法进行求解

准一维非线性模型的应用前景：

医疗诊断方面：

- ✧ 建立标准的关于血压和流量的数据库
- ✧ 开发评价循环系统生理功能的软件
- ✧ 评价发生撞车事故时，人体循环系统的反应

肺循环系统的一维血流模型

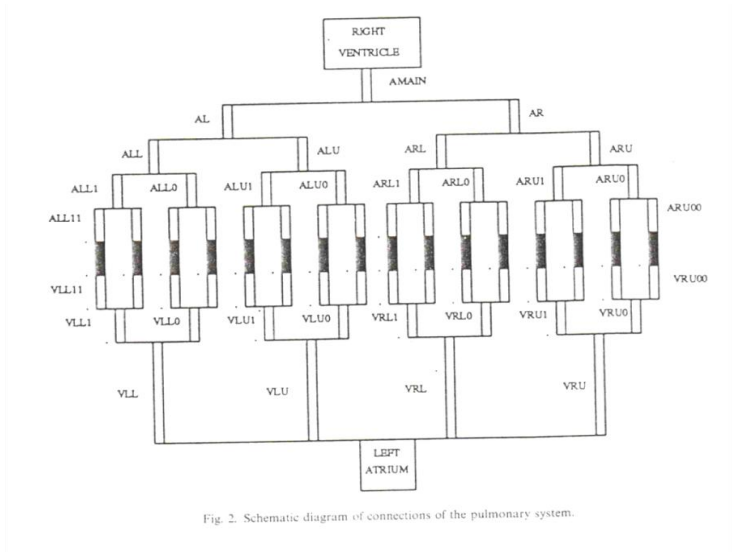


Fig. 2. Schematic diagram of connections of the pulmonary system.

肺循环模型中各级血管的尺寸和力学参数

Table 1. Geometrical and material properties of arterial blood vessels

<i>I</i>	Anatomical measurements				Idealized data		
	<i>N</i>	Diameter (range in cm)	Length (range in cm)	Number of segments	Cross section (cm ²)	Length (cm)	Compliance $\alpha \times 10^{-6}$ (cm ⁴ dyn ⁻¹)
MA	1	3.00	4.0–9.05	1	5.3	4.1	270.0
RA	2	1.483	3.2	1	4.3	3.2	80.0
RL	2	1.483	3.2	1	4.3	3.2	80
RL0	3	0.806	1.09	1	4.982	1.09	50.0
RL00	4	0.582	2.07	1	5.32	2.07	40.0
Arterioles which was taken as equivalent conduit in model							
5	5	0.365	1.79	6	6.906	1.79	30.0
6	6	0.209	1.05	1.3 × 10	1.05	6.960	30.0
7	7	0.133	0.66	1.8 × 10 ²	1.42	13.38	34.0
	8	0.085	0.469				
	9	0.053	0.316				
8	10	0.035	0.21	1.5 × 10 ²	0.54	59.54	39.0
	11	0.0224	0.138				
	12	0.0138	0.091				
	13	0.0086	0.065				
9	14	0.0054	0.044	2.3 × 10 ⁶	0.186	595.91	230.0
	15	0.0034	0.029				
	16	0.0021	0.020				
	17	0.0013	0.013				

Notes: The data are from Cumming *et al.* (1969); Singhal *et al.* (1973) and Horsfield (1978).
I: idealized model segment, *N*: generation index in the experiments, *D*: diameter, *L*: length, *A*: area, MA: main artery, RA: right artery.

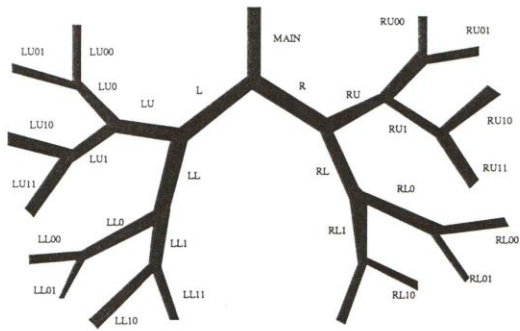


Fig. 3. Schematic diagram of human pulmonary artery system.

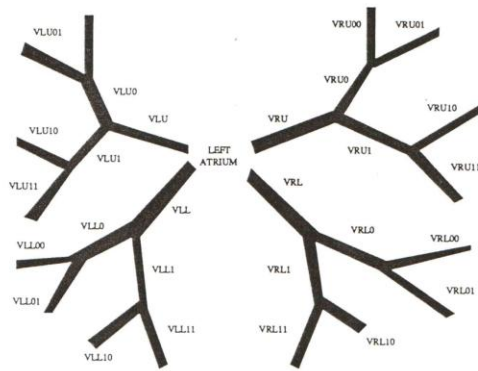


Fig. 4. Schematic diagram of human pulmonary venous system.

肺循环各级血管的拓扑结构

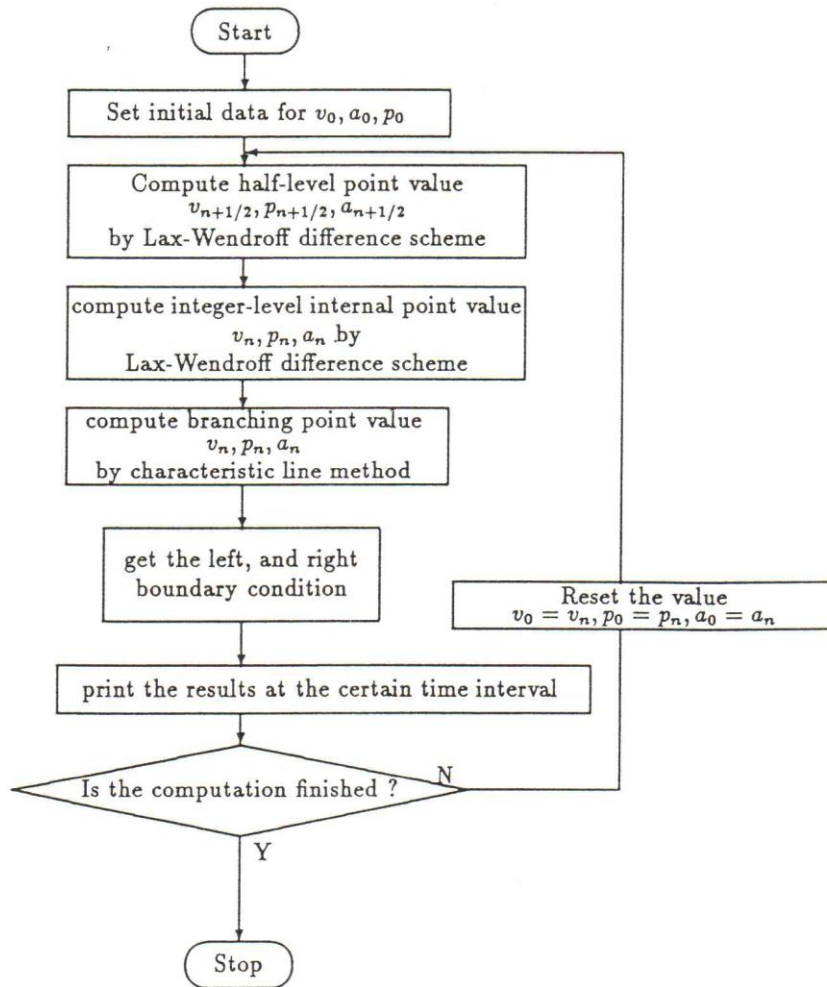


Fig. 5. Flow chart of the proposed algorithm.

计算流程图

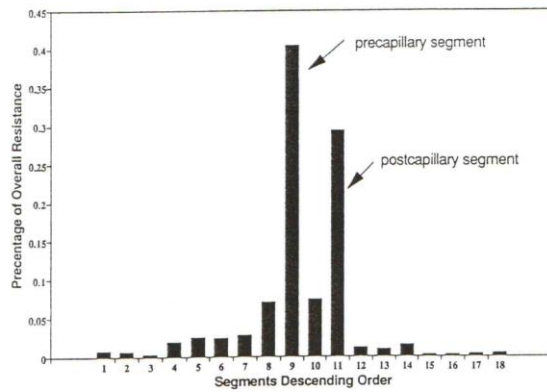


Fig. 8. Resistance distribution in the pulmonary circulation. The resistance is only shown as a relative value. The numerical result gives $192.7 \text{ dyn cm}^{-5}$ as total resistance. Bergel (1972) reported that it varied between 50 and 200 dyn cm^{-5} for human subjects.

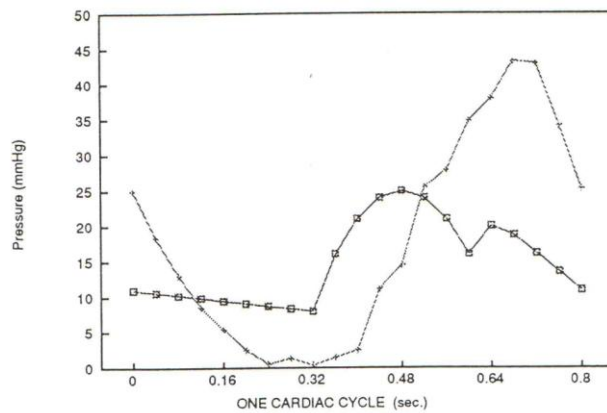


Fig. 9. The pressure transmission in pulmonary artery. The line with $\square$ symbols is the pressure in right ventricle. The line with $+$ symbols is the pressure in the entrances of RU00 segments, 17 cm away from right ventricle.

各级血管阻抗和压力的变化

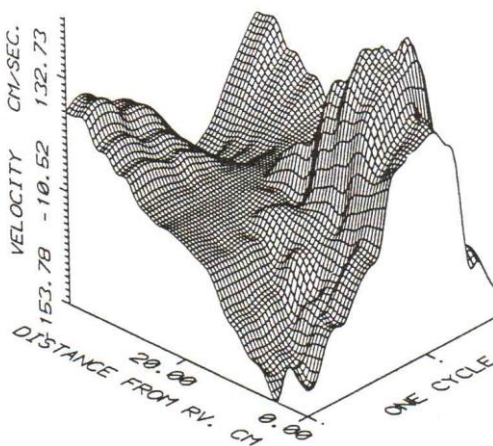


Fig. 11. Velocity (cm s^{-1}) is plotted as a function of two variables t and x . The time variable t is from 0 to 0.8 s (one cardiac cycle). The spatial variable x is from right ventricle ($x=0$) to left atrium ($x=40$) via RU00 branch.

各级血管的速度变化曲线

在微重力下不同血管的压力变化

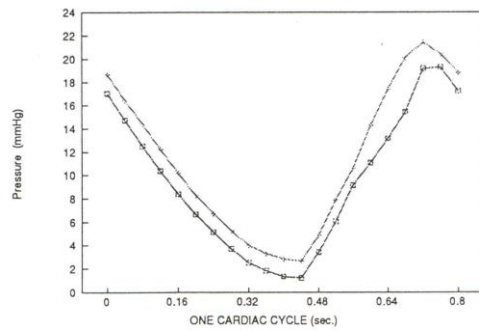


Fig. 15. Pressure comparison between capillaries of RU00 and RL11 branches, for $g = 180 \text{ cm s}^{-2}$. The line with $\square$ symbols is the pressure at entrance of capillaries of RU00 branch. The line with $+$ symbols is the pressure at entrance of capillaries of RL11 branch.

特征方程(characteristic equation)

$$C \frac{dV}{dt} + C \frac{dA}{dt} = -F + G_z$$

$$G_z = kg \cos \theta \quad g=0, \quad 180\text{cm/s}^2$$

θ --流动方向和外力方向的夹角 C —波动速度

$$C = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}}$$

对于由一个母血管和两个子血管组成的系统, 特征方程可离散为

$$A_m^{n+1}(V_m^{n+1} - V_m^n) + C_m^{n+1}(A_m^{n+1} - A_m^n) = f_m^{n+1}$$

$$A_{d1}^{n+1}(V_{d1}^{n+1} - V_{d1}^n) - C_{d1}^{n+1}(A_{d1}^{n+1} - A_{d1}^n) = f_{d1}^{n+1}$$

$$A_{d2}^{n+1}(V_{d2}^{n+1} - V_{d2}^n) - C_{d2}^{n+1}(A_{d2}^{n+1} - A_{d2}^n) = f_{d2}^{n+1}$$

$$A_{d2}^{n+1}(V_{d2}^{n+1} - V_{d2}^n) - C_{d2}^{n+1}(A_{d2}^{n+1} - A_{d2}^n) = f_{d2}^{n+1}$$

$$A_m^{n+1}V_m^{n+1} = A_{d1}^{n+1}V_{d1}^{n+1} + A_{d2}^{n+1}V_{d2}^{n+1} \quad P_m^{n+1}(A_m^{n+1}) = P_{d1}^{n+1}(A_{d1}^{n+1})$$

$$P_m^{n+1}(A_m^{n+1}) = P_{d2}^{n+1}(A_{d2}^{n+1})$$

$$f_i^{n+1} = \left[\frac{8\eta\mu}{\rho} N_i \frac{V_i^{n+1}}{S_i^{n+1}} + gk \cos \theta_i \right] \Delta t$$

其中 $m', d1', d2'$ 为 m 和 $m-1$, $d1$ 和 $d2$ 中 1 和 2 之间的点。通过特征线法就可以得到分支点的 V 和 A (characteristic line method)

(详细考察特征线法)

总结

血流动力学的关键词

- ✧ Poiseuille flow
- ✧ Peripheral resistance
- ✧ Viscoelastic
- ✧ Pulsatile flow
- ✧ Wave velocity
- ✧ Womersley number
- ✧ Human systemic circulation
- ✧ Bifurcation
- ✧ Microcirculation
- ✧ Two-phase flow model
- ✧ One-dimensional nonlinear fluid model
- ✧ Finite element analysis
- ✧ Rheology
- ✧ Hematocrit
- ✧ Two-step Lax-Wendroff
- ✧ Characteristic line method

Coffee Break 茶歇时间

最大的计算家

在数学领域，我们知道 e 是指数， π 是圆周率， i 是虚数单位。我们也知道在表示三角形顶角时用大写字母 A , B , C ，表示边时用 a , b , c 。这些习惯都是从欧拉开始的。三角函数的记号用 $\sin$, $\cos$, $\tan$ 等表示， x 的函数用 $f(x)$ 表示等也是欧拉最先开始使用的。积分因子的使用，齐次和非齐次形的区别，特解和一般解的区别等都是由他而来。甚至现代教科书中微积分的演算习题的好多都是从他的著作中出来的。虽然是 18 世纪的人，但他好像就在我们中间。像他这样的人实在为数不多。

Euler, Leonhard: 1707-1783

被称为数学家中的最大的计算家，他去世时 76 岁，共留下了超过 800 篇的书籍和论文。由于数量太多，在他活着期间不能发表完，等到终于发表完时，已是他去世以后的半个世纪了。它的研究不仅包括数学，还包括天文，物理，医学，植物学，化学等学科。59 岁时，虽然双目失明，但凭借非凡的记忆力和精神，17 年间仍然坚持不懈进行数学研究，撰写论文。在去世之前，和孙子一边玩耍，还一边计算天王星的轨道。有记载说，这时，插管突然从他口中滑落，呼吸和计算同时停止了。还有一种说法说，在他失去意识前，他说，我要走了。