

第七讲 生物传热
代表性的生物传热模型

7.1 概要

- ◇ Mitchell and Myers 模型
- ◇ Keller and Seilers 模型
- ◇ 多孔介质理论在生物传热中的应用: Wulff 模型

7.2 Mitchell 和 Myers 模型

考虑血流对传热的影响---如何考虑生物体内的逆向对流换热 (countercurrent heat exchange)

假定:

- ◇ 血管作为一维来考虑, 动静脉温度只依赖于轴向血流。沿径向方向的变化忽略不计。
- ◇ 动静脉之间以及单个血管与周围组织的热传导在血管轴向方向是常数
- ◇ 没有血管分支从动脉分出至静脉, 所以从动静脉中流入流出的流量相等
- ◇ 组织内的新陈代谢量与对流换热相比忽略不计。
- ◇ 组织和血液的物性参数为常数

分析方法: 对动静脉微小单元体, 周围组织写出能量平衡方程

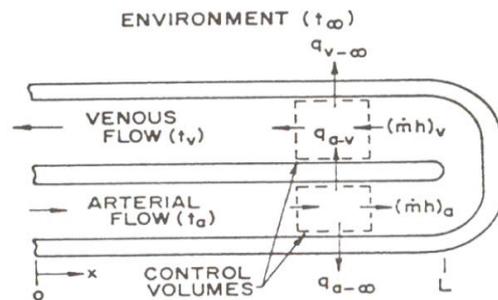


FIG. 6. A schematic view of countercurrent heat exchange between vessels and the surroundings used in the mathematical model of Mitchell and Myers. (Reproduced from [45], the *Biophysical Journal* 8, 897-911, by copyright permission of the Biophysical Society.)

Biophys. J., Vol. 8(1968) pp.897 Mitchell 和 Myer 模型示意图

对于 dx 长度的动脉，其能量平衡方程为

$$mh_{ax} = mh_{a(x+dx)} + [(UA')_a(T_a - T_\infty) + (UA')_c(T_a - T_v)]dx \quad (7.1)$$

h_a —动脉血液的焓 enthalpy

m —质量流量（假定在 x 方向为定值）

UA' —对流换热系数与单位长度表面积之积

下标 c —动静脉之间，下标 a —动脉与组织之间

假定没有压力变化，则

$$h = c_p T$$

这样带入 7.1 式，整理为

$$mc_p \frac{dT_a}{dx} = (UA')_a(T_\infty - T_a) + (UA')_c(T_v - T_a) \quad (7.2)$$

那么对静脉血流同样可以写出

$$-mc_p \frac{dT_v}{dx} = (UA')_v(T_\infty - T_v) + (UA')_c(T_a - T_v) \quad (7.3)$$

下标 v —静脉和组织之间

赋予两个边界条件

$$T_a(0) = T_{a0} \quad (\text{入口}) \quad T_a(L) = T_v(L)$$

$x=L$ 处可以看成动脉的拐点，也可看成微循环部分，这时，细动脉，细静脉，毛细血管和组织的温度都达到完全平衡

对方程 2 和 3 进行无量纲化

$$\theta_a = \frac{T_a - T_\infty}{T_{a0} - T_\infty} \quad \theta_v = \frac{T_v - T_\infty}{T_{a0} - T_\infty} \quad (7.4)$$

$$N_a = \frac{(UA')_a L}{mc_p}, N_v = \frac{(UA')_v L}{mc_p}, N_c = \frac{(UA')_c L}{mc_p}, Z = \frac{x}{L} \quad (7.5)$$

这样，微分方程变为

$$\frac{d\theta_a}{dx} = N_c(\theta_v - \theta_a) - N_a\theta_a \quad (7.6)$$

$$\frac{d\theta_v}{dx} = N_c(\theta_a - \theta_v) - N_v\theta_v \quad (7.7)$$

$$\theta_a(0) = 1 \quad \theta_a(1) = \theta_v(1) \quad (7.8)$$

7.6 和 7.7 式为一次线性常微分方程，将 7.6 式写成 $\theta_v = f(\theta_a)$ 的形式，然后代入 7.7 式可以得到 2 阶线性常微分方程

$$\frac{1}{N_c} \frac{d^2 \theta_a}{dx^2} + \left(2 + \frac{N_a}{N_c} + \frac{N_v}{N_c}\right) \frac{d\theta_a}{dx} + \frac{N_c - (N_c + N_v)(N_c + N_a)}{N_c} \theta_a = 0 \quad (7.9)$$

7.9 为齐次微分方程的形式，一般解的形式

$$y = ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x}$$

那么动静脉的无量纲温度

$$\theta_a = \exp(N_v - N_a) \frac{z}{2} \frac{C_2 \cosh C_1 (1 - Z) + \sinh C_1 (1 - Z)}{C_2 \cosh C_1 + \sinh C_1}$$

$$\theta_a = \exp(N_v - N_a) \frac{z}{2} \frac{C_2 \cosh C_1 (1 - Z) - \sinh C_1 (1 - Z)}{C_2 \cosh C_1 + \sinh C_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(N_a + N_v + 4N_c)(N_a + N_v)}$$

$$C_2 = \sqrt{(N_a + N_v + 4N_c)/(N_a + N_v)} \quad (7.10)$$

(试着推导一下动静脉温度)

Mitchell 和 Myer 考虑了一种特殊情况，如大腿部成对的动静脉。这时，无量纲的温度只依赖于 N_v , N_c 。（静脉与组织之间以及动静脉之间的换热）

$$\theta_a = \frac{C_2 \cosh C_1 (1 - Z) + \sinh C_1 (1 - Z)}{C_2 \cosh C_1 + \sinh C_1} \quad \theta_v = \frac{C_2 \cosh C_1 (1 - Z) - \sinh C_1 (1 - Z)}{C_2 \cosh C_1 + \sinh C_1}$$

$$C_1 = N_v \sqrt{1 + 2(N_c / N_v)}$$

$$C_1 = \sqrt{1 + 2(N_c / N_v)} \quad (7.11)$$

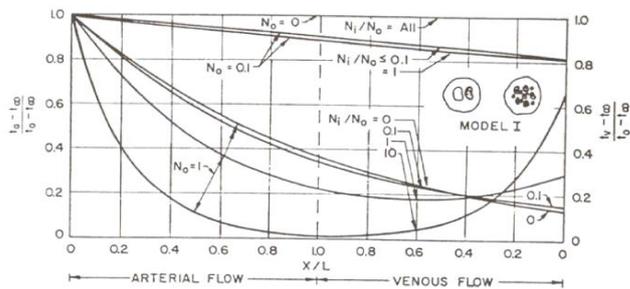


FIG. 7. Normalized arterial and venous blood temperature profiles along the length of a limb or rete with a symmetrical vascular arrangement of type I that implies $N_i \equiv N_c$, as modeled by Mitchell and Myers. The parameters N_0 and N_1 correspond to N_a and N_c , respectively. (Reproduced from [45], the *Biophysical Journal* 8, 897-911, by copyright permission of the Biophysical Society.)

无量纲温度随各种换热系数的变化

(2) Keller 和 Seiler 的模型

在 Mitchell 和 Myer 的模型中未考虑血管分支和新陈代谢，Keller 和 Seiler 的模型试图在这方面有所改进。模型认为对流换热在末梢循环中很重要，是最早的关于微循环传热的数学模型。它的研究方法已经成为生物传热研究的经典。

组织的微型单元：单个动脉，单个静脉，动静脉之间的毛细血管，组织

末梢组织：一维平板，垂直于热流方向的截面积 A_x 一定

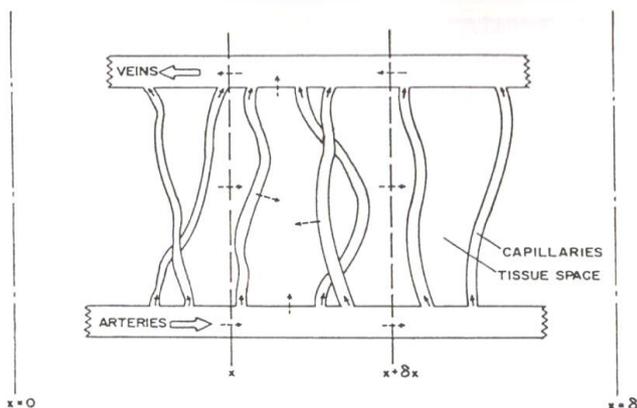


FIG. 10. A schematic diagram of an element, thickness dx , in the subcutaneous tissue region with heat flows indicated by dashed arrows and blood flow directions indicated with outlined arrows. The one-dimensional model of Keller and Seiler is derived from an energy balance across the vertical dashed lines. (Reproduced from [36], with permission.)

$$\text{对于动脉单元: } (m_a c_b T)_{ax} = m_a c_b T_{a(x+dx)} + (UA)_a (T_a - T_t) + c_b \omega \rho_b T_a A_x dx \quad (7.12)$$

ω 由动脉至组织的血液灌注率 ml/ml/min

对 12 式变形

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{m_a c_b T_a}{A_x} \right) = \frac{(UA')_a}{A_x} (T_t - T_a) - c_b \omega \rho_b T_a \quad (7.13)$$

那么对于静脉有

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{m_v c_b T_v}{A_x} \right) = \frac{(UA')_v}{A_x} (T_t - T_v) + c_b \omega \rho_b T_a \quad (7.14)$$

对于血液流量，相对于动脉和静脉而言

$$m_a = m_{a0} - \int_0^x \omega \rho_b A_x dx \quad (7.15)$$

$$m_v = m_{v0} - \int_0^x \omega \rho_b A_x dx \quad (7.16)$$

m_{a0} , m_{v0} 是指 $x=0$ 时的动静脉血流量，不考虑淋巴循环，并假定 $m_{a0}=m_{v0}$ 。这样，由 15 和 16 式得到

$$\frac{dm_a}{dx} = -\omega \rho_b A_x = \frac{dm_v}{dx} \quad (7.17)$$

有 13 式，有

$$\frac{dm_a}{dx} \frac{c_b T_a}{A_x} + \frac{m_a c_b}{A_x} \frac{dT_a}{dx} = \frac{(UA')_a}{A_x} (T_t - T_a) - c_b \omega \rho_b T_a \quad (7.18)$$

将 17 式代入 18 式，又由于

在末梢部分，动静脉成对出现，假定动静脉的表面积相等，即

$$(UA')_a = (UA')_v = (UA')$$

则 18 式变为

$$m c_b \frac{dT_a}{dx} = (UA') (T_t - T_a) \quad (7.19)$$

用同样的方法，14 式可变换为

$$-m c_b \frac{dT_v}{dx} = (UA') (T_t - T_v) + c_b \omega \rho_b A_x (T_{v0} - T_v) \quad (7.20)$$

由于可认为在毛细血管内的血液与周围组织达到相平衡，那么就有

$$T_{v0} = T_t \quad T_{v0} \text{ -- 由毛细血管排入静脉的血液温度}$$

这样 20 式中的 T_{v0} 变为 T_t

$$-mc_b \frac{dT_v}{dx} = (UA')(T_t - T_v) + c_b \omega \rho_b A_x (T_t - T_v) \quad (7.21)$$

那么，对于长度为 dx 的组织单元，它的能量平衡方程为

$$\begin{aligned} & \left(-k_t A_x \frac{dT_t}{dx} \right)_x + (UA') dx [(T_a - T_t) + (T_v - T_t)] + \omega \rho_b c_b (T_a - T_t) A_x dx + Q_m A_x dx \\ & = \left(-k_t A_x \frac{dT_t}{dx} \right)_{x+dx} \end{aligned} \quad (7.22)$$

其中 Q_m : 单位体积新陈代谢的产热量

那么组织的微分方程变为

$$k_t \frac{d^2 T}{dx^2} + (UA') dx [(T_a - T_t) + (T_v - T_t)] + \omega \rho_b c_b (T_a - T_t) dx + Q_m = 0 \quad (7.23)$$

如果 $(UA') = 0$ 23 式变成 Pennes 方程

如果 $(UA') \neq 0$ 此时的 T_a - 局部动脉温度

边界条件

在 $x=0$ 处, $T_t(0) = T_a(0) = T_b$

此时，动脉血液以组织中心的温度进入末梢区域

在 $x=\delta$ 处, $T_t(\delta) = T_v(\delta) = T_s$

此时，静脉血温度与组织温度达到相平衡

T_b, T_s - 给定值

对 19, 21, 23 进行求解。

考虑最简单的情形

$(UA') = 0$ 时，即忽略动脉-组织，静脉-组织之间的相互影响，这时，

$$T_a(x) = T_b \quad (7.24)$$

这样，组织的能量平衡方程可求解—Pennes equation

对这一二阶常微分方程求解，得到

$$T_t = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh x + \frac{Q_m}{\omega \rho_b c_b} + T_b \quad (7.25)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega \rho_b c_b}{k_t}} \quad (7.26)$$

有效热传导系数 (effective thermal conductivity)

对于厚度为 δ 的平板，表面热流量定义为

$$q_s \equiv \frac{k_{eff}(T_b - T_s)}{\delta} \quad (7.27)$$

根据傅里叶法则

$$q_s = -k_s \left. \frac{dT_t}{dx} \right|_{x=\delta} \quad (7.28)$$

根据 27 和 28 式，则有

$$\frac{k_{eff}}{k_t} = \frac{-\delta}{(T_b - T_s)} \left. \frac{dT_t}{dx} \right|_{x=\delta} \quad (7.29)$$

引入无量纲温度 $\theta = \frac{T_t(x) - T_b}{T_s - T_b}$

那么 7.25 式就变为

$$\theta = \phi [\cosh \lambda x - 1] + [1 + \phi(1 - \cosh \lambda \delta)] \frac{\sinh \lambda x}{\sin \lambda \delta} \quad (7.30)$$

$$\phi = \frac{Q_m}{\omega \rho_b c_b (T_b - T_s)}$$

这样 29 式可写为

$$\frac{k_{eff}}{k_t} = \frac{\lambda \delta}{\tanh \lambda \delta} + \frac{Q_m \delta^2}{(T_b - T_s)} \frac{\tanh(\lambda \delta / 2)}{k_t \lambda \delta} \quad (7.31)$$

图 1 给出了 $\frac{k_{eff}}{k_t}$ 和 $\lambda \delta$ 之间的关系

$\lambda \delta$ -- 灌流传热量和热传导量之间的比

当 $\lambda \delta < 1.0$ ，新陈代谢产热量的影响很大 (metabolic heat generation)

当 $\lambda \delta \uparrow$ ， $\frac{k_{eff}}{k_t} \uparrow$ ，而 $\lambda \delta > 1.0$ ，新陈代谢的影响很小

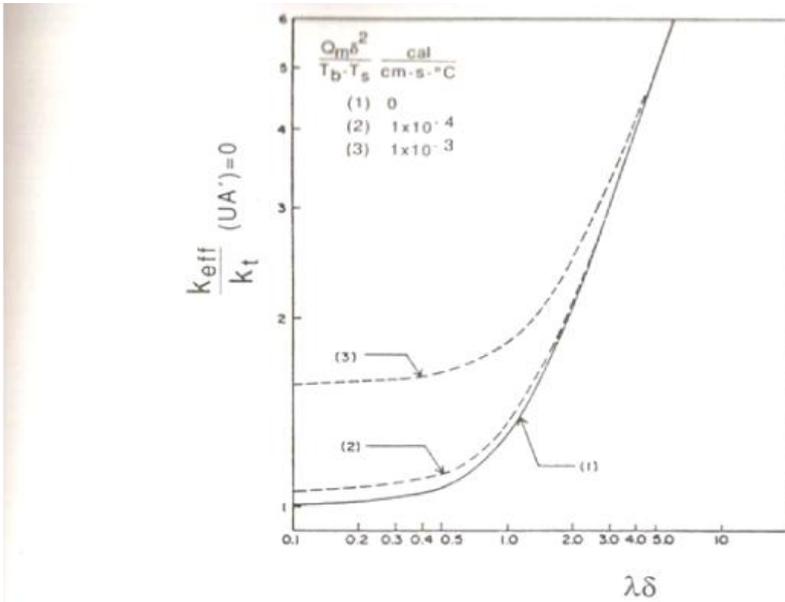


FIG. 11. Tissue effective thermal conductivity relative to the solid tissue conductivity as a function of the dimensionless product $\lambda\delta$, under conditions of zero blood-tissue convection heat transfer ($UA' = 0$). Each curve is based on a different value for the metabolic heat generation term $Q_m\delta^2/(T_b - T_s)$. Based on the bioheat transfer model of Keller and Seiler. (Reproduced from [36], with permission.)

(3) Wulff 模型

对血流影响的思考：组织中血管分布各种各样，并不一定对传热产生贡献这样，Wulff对血流的传热项进行了修正

引入 Darcy 速度：单位体积内的流体速度
对于各向同性的多孔介质

$$\nabla P = -\frac{\mu}{k} \mathbf{v}$$

k —透过率， μ —粘度

Wulff 的公式

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k_t \nabla T_t) - \rho_b c_b U_h \cdot \nabla T_t + q_m \quad (7.32)$$

其中

$$\rho_b H_b U_h = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \rho_b H_b u d\omega \quad (7.33)$$

H_b --比焓

U_h --Darcy 速度

u --毛细血管内流速

ω --- 固体组织角度

难点：局部血流流束不好确定