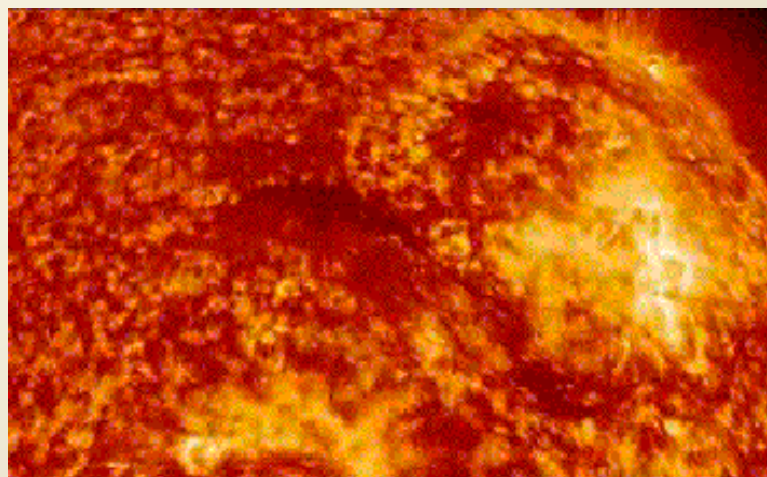
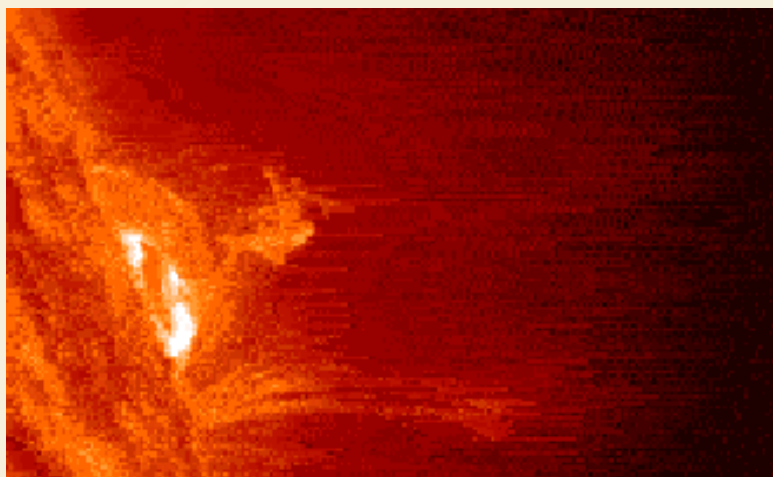
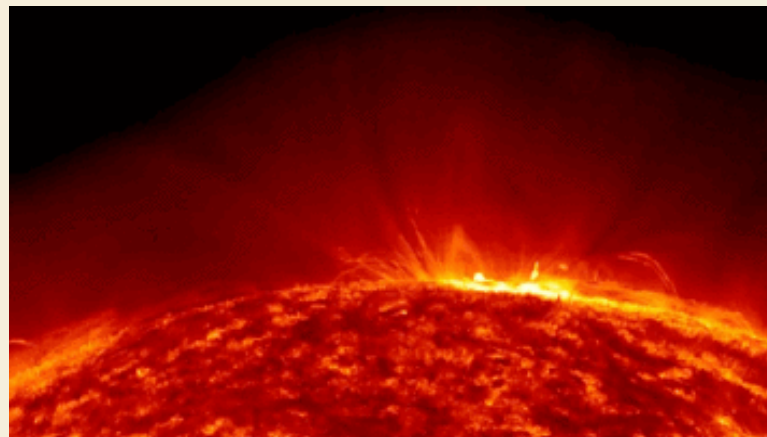
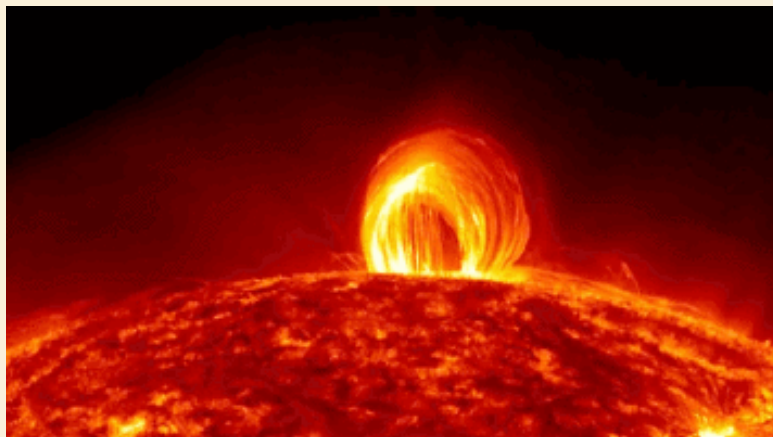
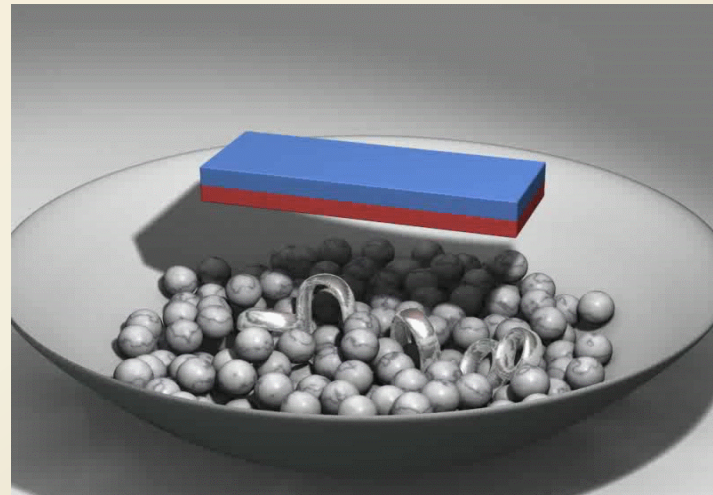
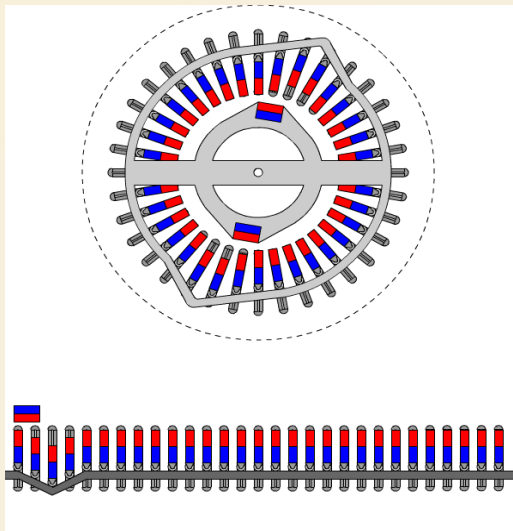
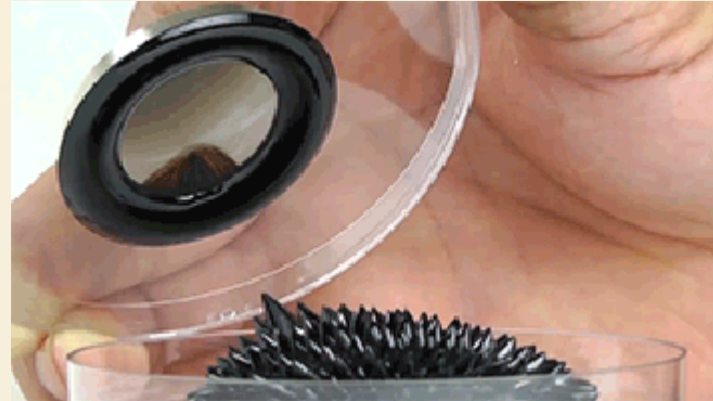
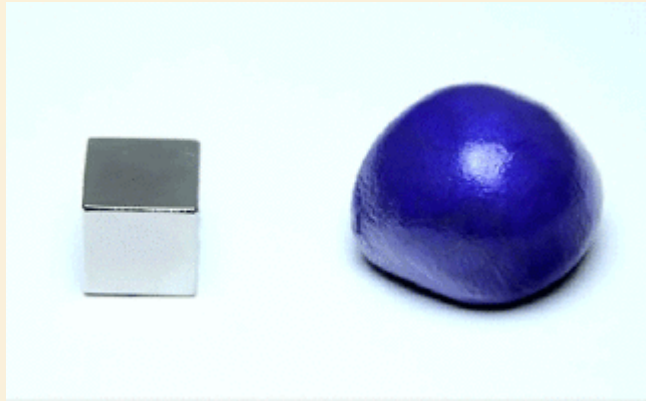
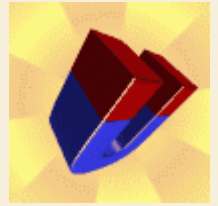


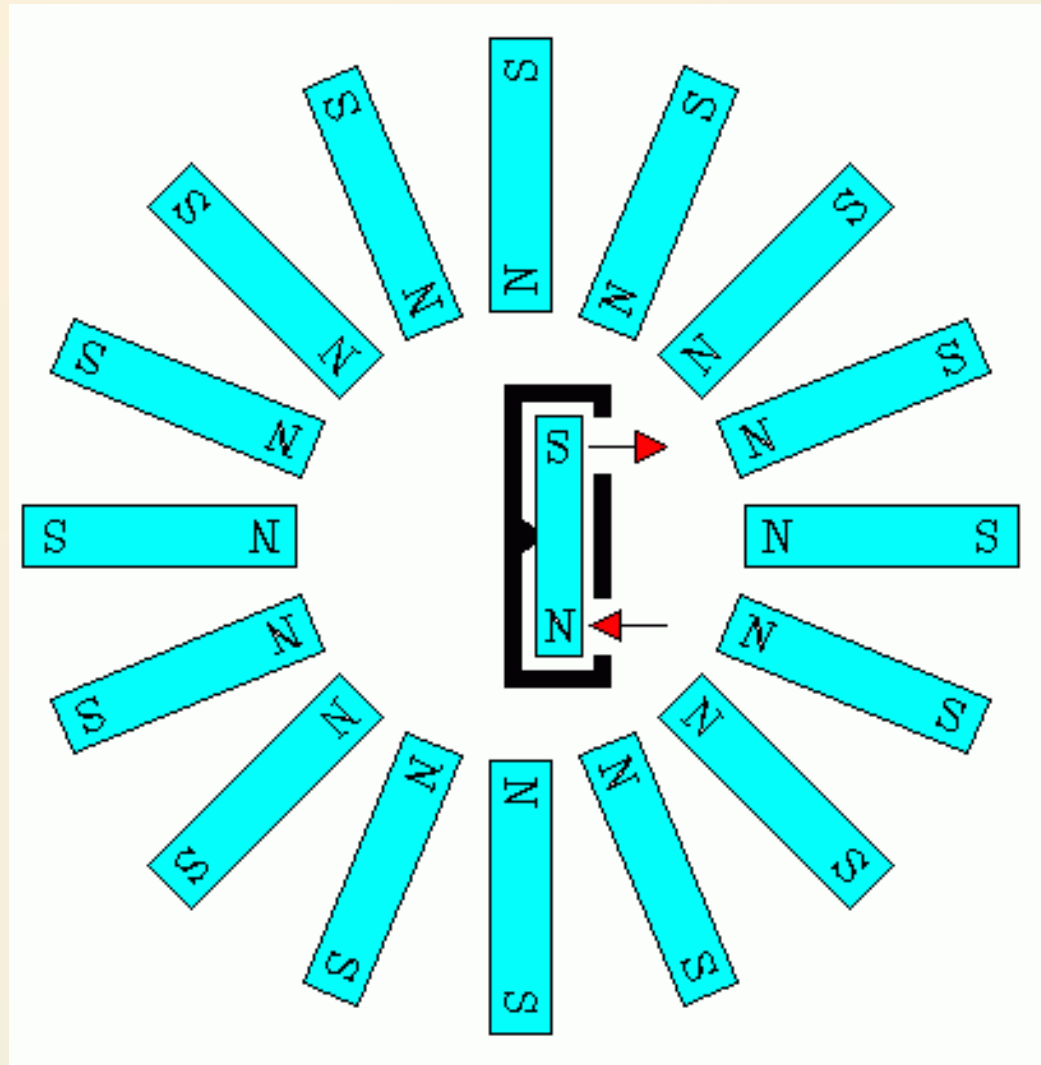
第八章 磁场的能量

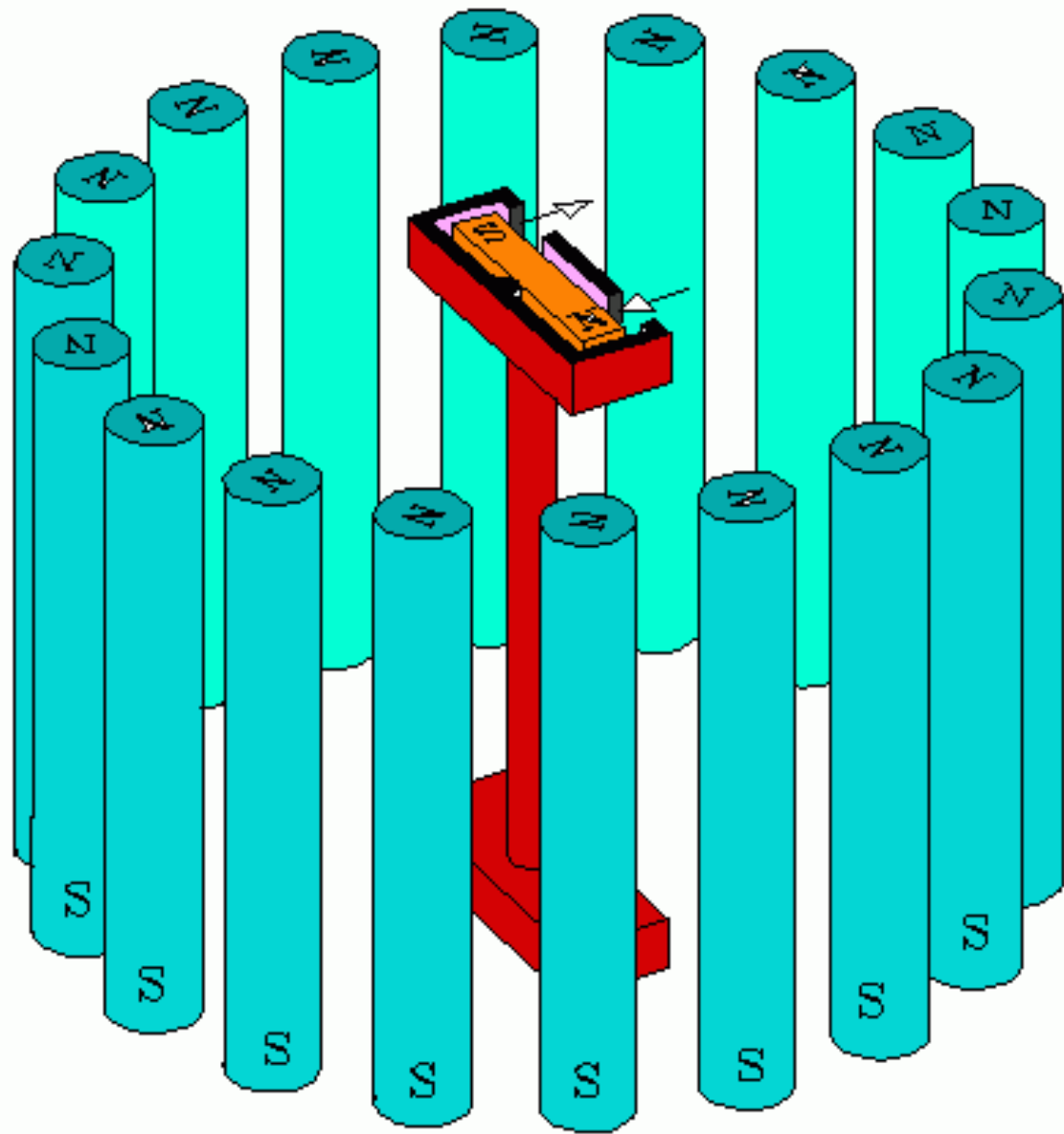


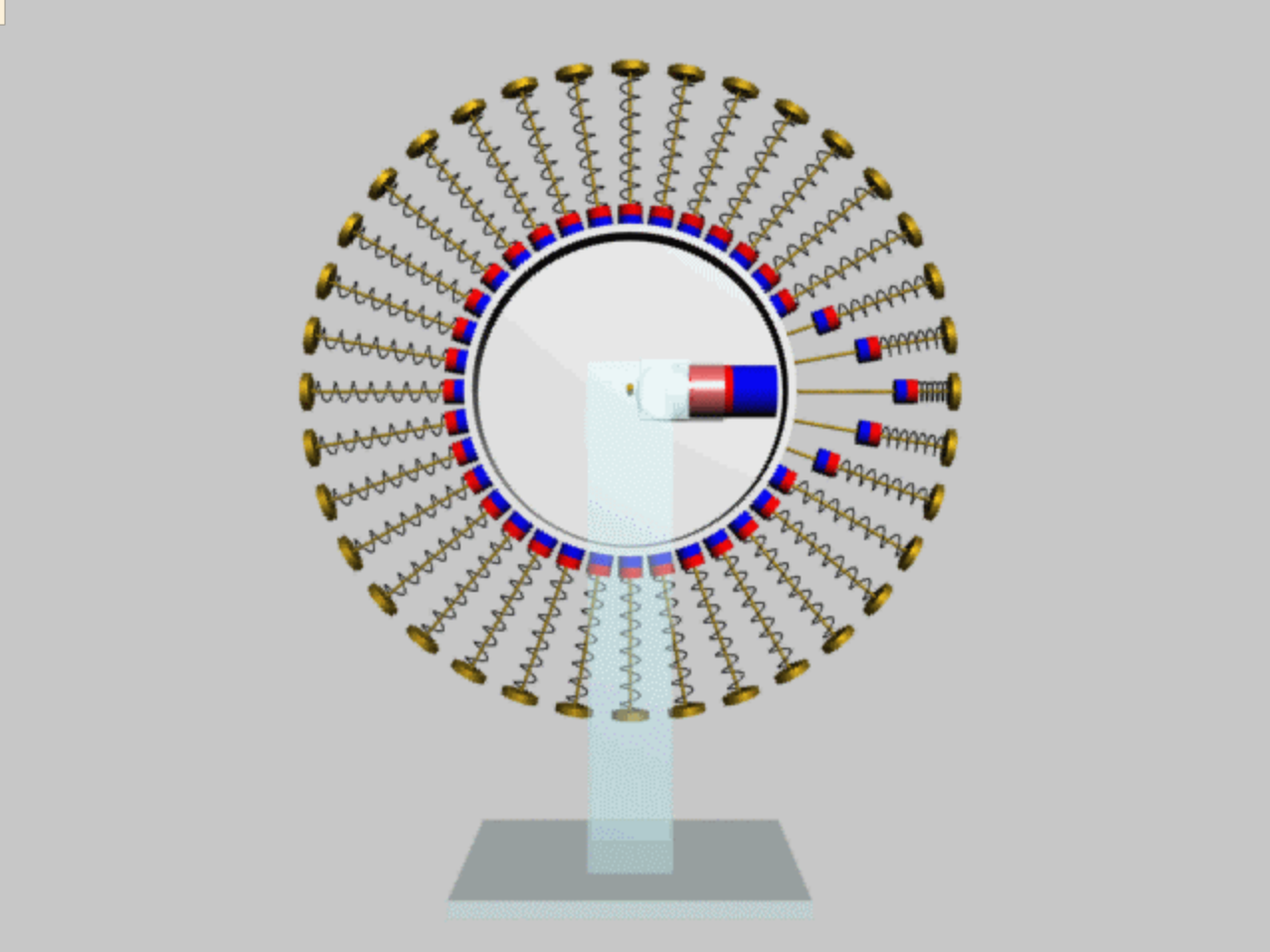
Magnets have unlimited stored energy?

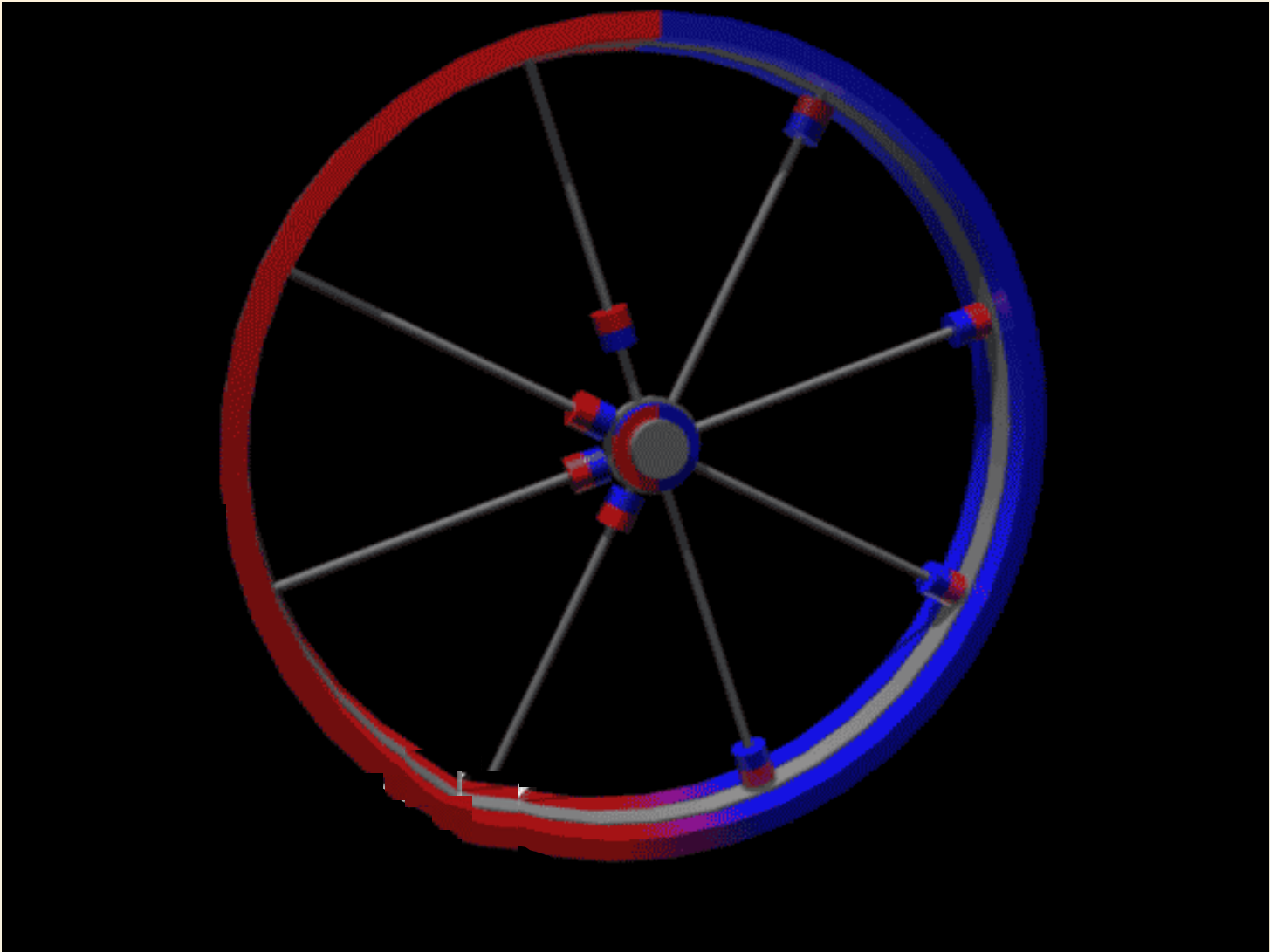


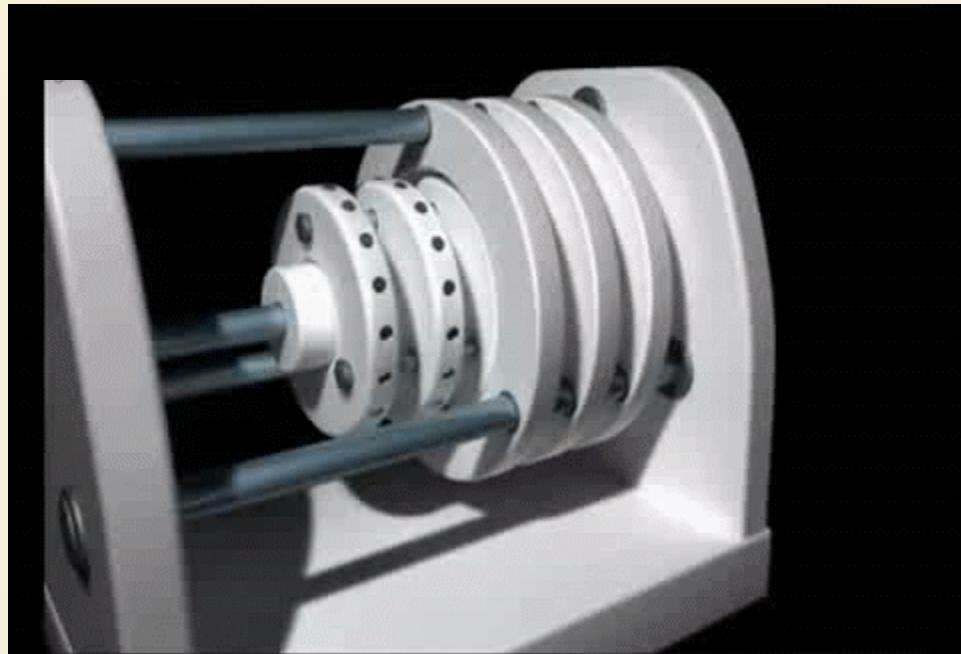
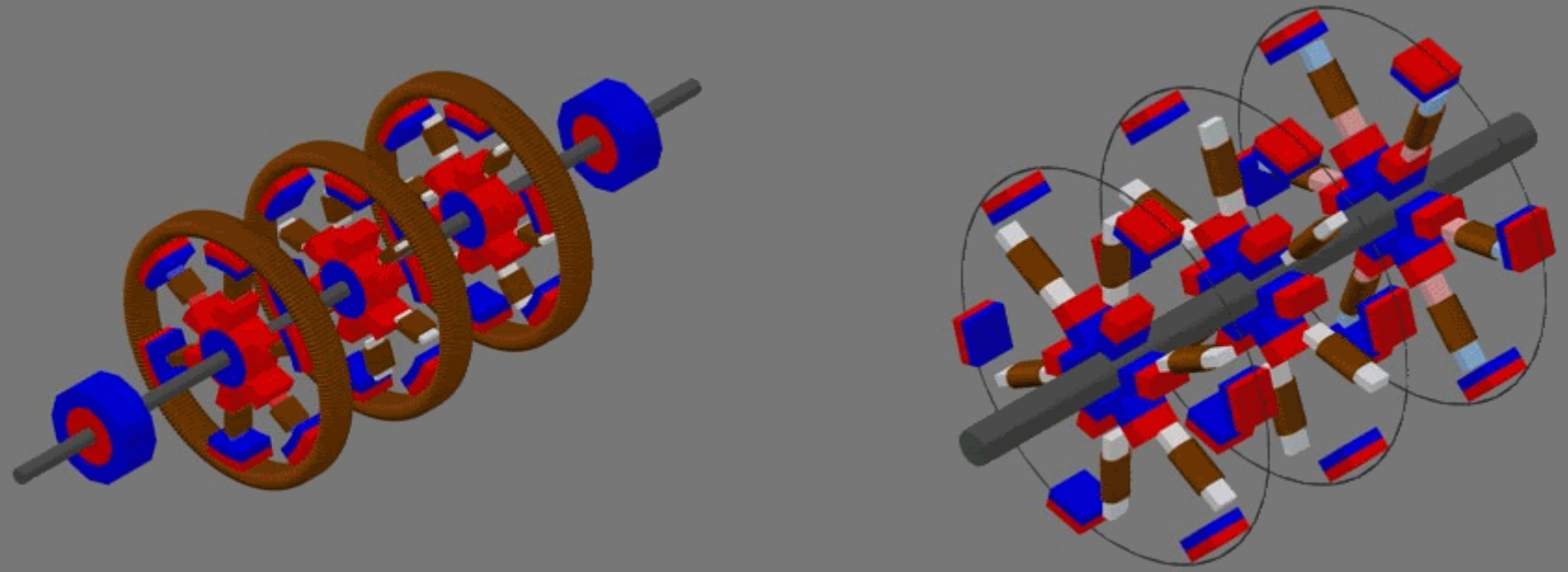
Crazy design: magnet motor

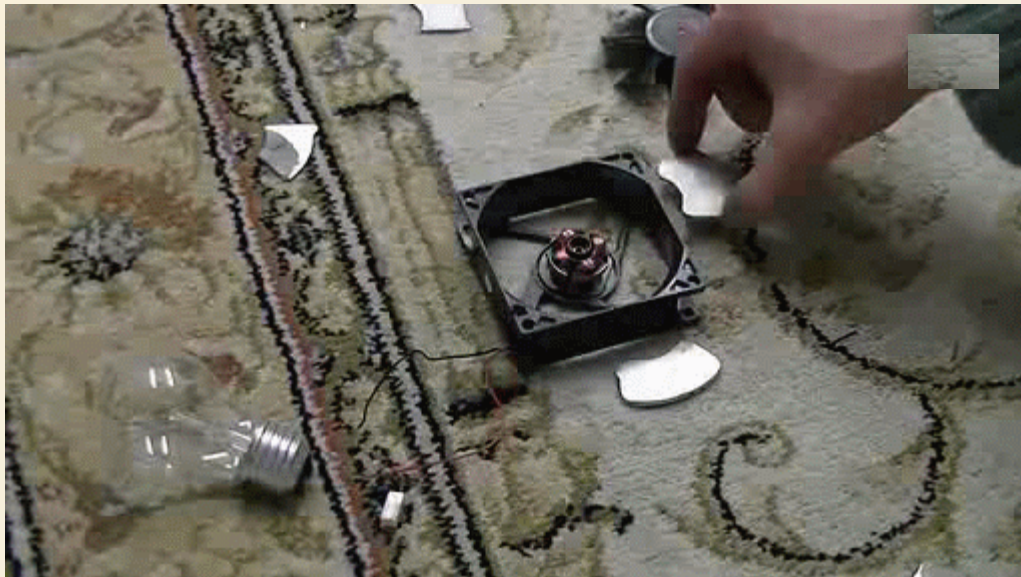
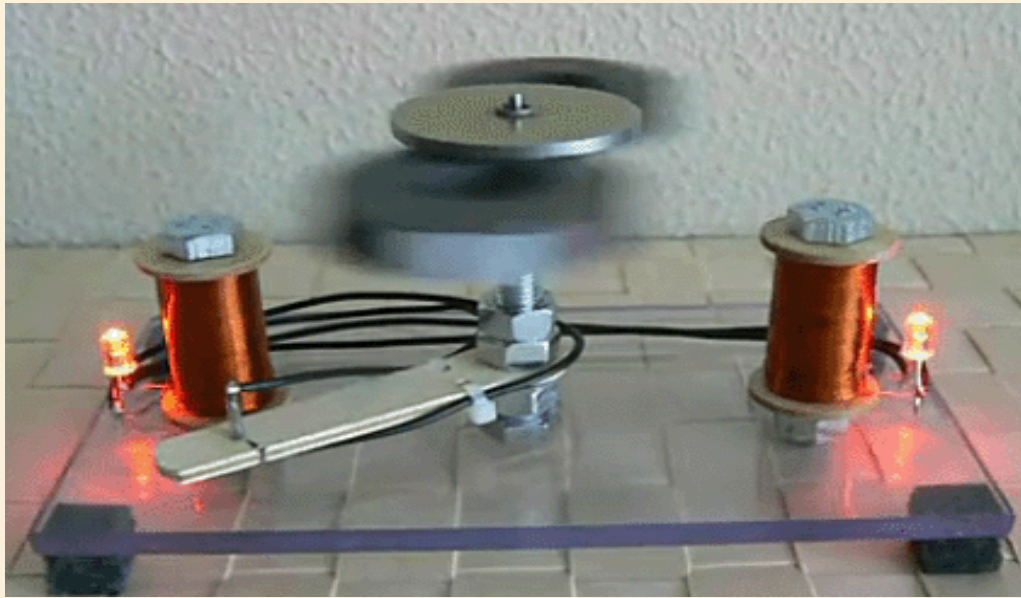












回顾和猜测

- 静电能：介质已经固定于给定位置，电场从无到有建立过程中外界抵抗静电力做功

$$W = \iiint \left(\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) dV = \iiint \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) dV + \iiint \left(\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E} \right) dV$$

- 外界在单位体积上做的功

$$\delta a = \iiint \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV = \epsilon_0 \iiint \vec{E} \cdot \delta \vec{E} dV + \iiint \vec{E} \cdot \delta \vec{P} dV$$

- 极化功密度 $\delta a' = \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$

- 极化能密度(线性介质) $w_{\text{极}} = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$

回顾和猜测

- 磁能：介质已经固定于给定位置，磁场从无到有建立过程中外界抵抗涡旋电场力做功

$$W = \iiint \left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV = \iiint \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dV + \iiint \left(\frac{1}{2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M} \right) dV$$

- 外界在单位体积上做的功

$$\delta a = \iiint \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dV = \mu_0 \iiint \vec{H} \cdot \delta \vec{H} dV + \mu_0 \iiint \vec{H} \cdot \delta \vec{M} dV$$

- 磁化功密度 $\delta a' = \mu_0 \vec{H} \cdot \delta \vec{M}$

- 磁化能密度(线性介质) $w_{\text{极}} = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M}$

RC 回路中的能量分析

■ 撤去电源 (放电)

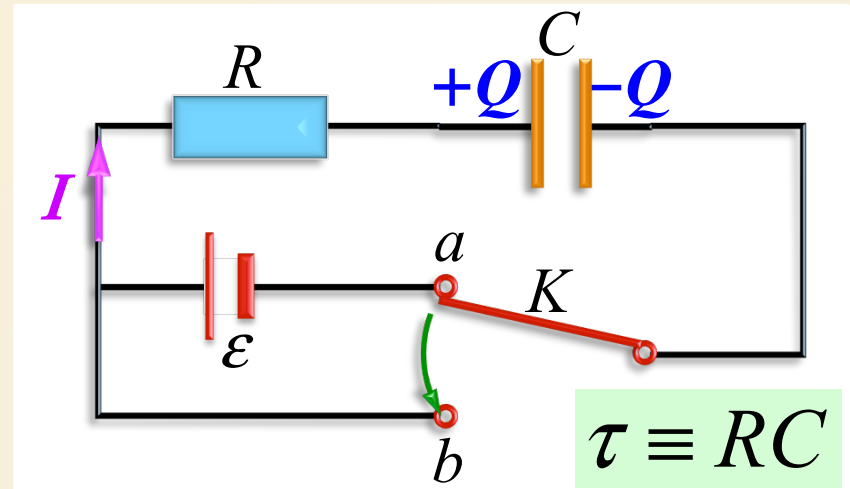
$$Q = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad I = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

能量从何而来?

$$dQ_{\text{热}} = RI^2 dt = R \frac{Q_0^2}{\tau^2} e^{-2t/\tau} dt$$

$$\longrightarrow Q_{\text{热}} = \int dQ_{\text{热}} = \frac{RQ_0^2}{\tau^2} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{RQ_0^2}{2\tau} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

可见电阻上产生的焦耳热来源于电容器中的电能，电容器是一个储能元件。



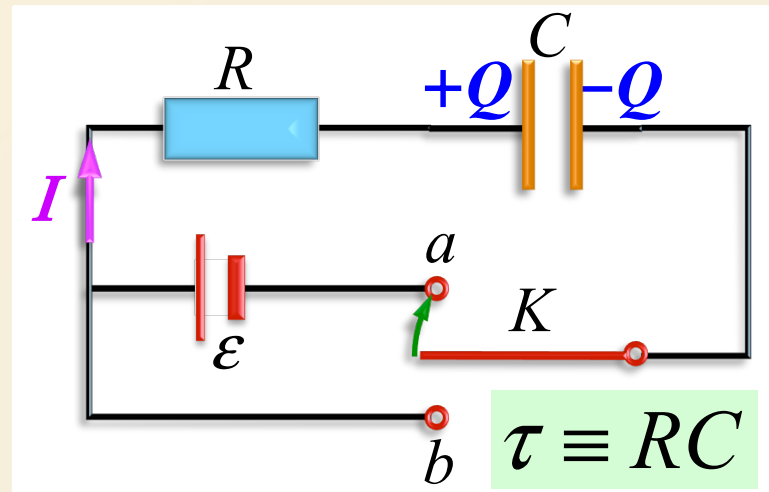
RC 回路中的能量分析

■ 接通电源 (充电)

$$\varepsilon = IR + \frac{Q}{C}, \quad \left(I = \frac{dQ}{dt} \right)$$

■ 电源做功功率

$$P_S = I\varepsilon = I^2R + \frac{IQ}{C} = I^2R + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} \right)$$



电源提供的能量，
一部分转化为焦耳热，一部分克服电场力做功。

RL 回路中的能量分析

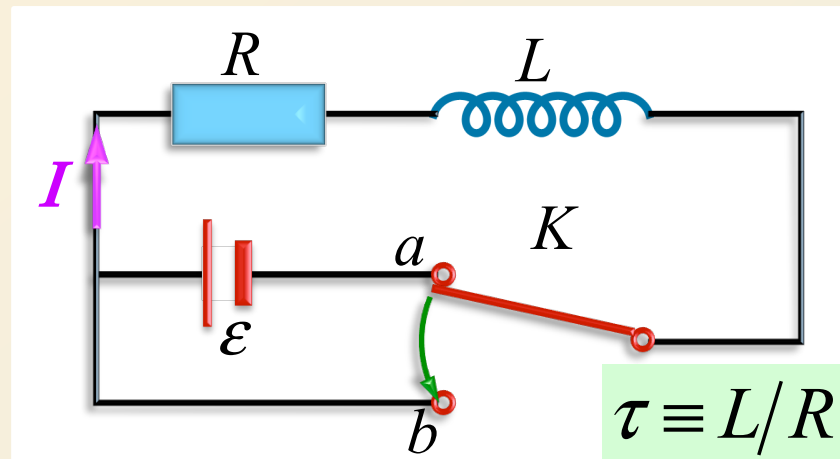
■ 撤去电源 (放磁)

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

能量从何而来 ?

$$dQ_{\text{热}} = RI^2 dt = RI_0^2 e^{-2t/\tau} dt$$

$$\longrightarrow Q_{\text{热}} = \int dQ_{\text{热}} = RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau}{2} RI_0^2 = \frac{1}{2} LI_0^2$$



可见电阻上产生的焦耳热来源于线圈中的磁能，电感线圈是一个储能元件。

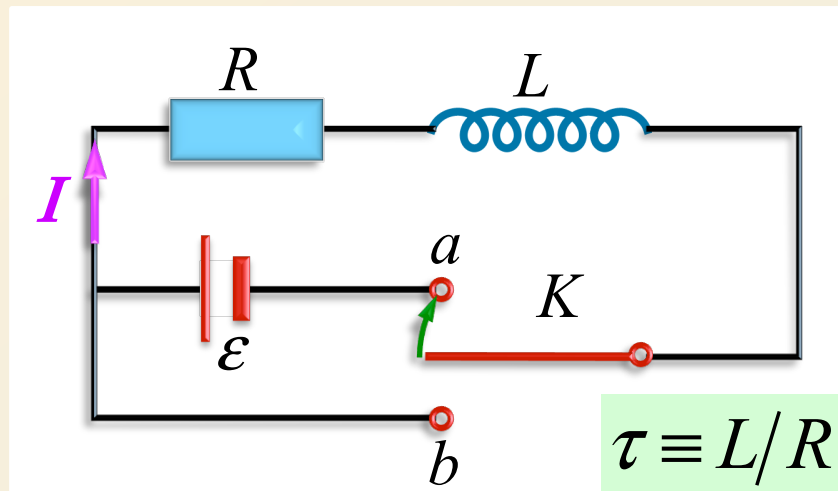
RL 回路中的能量分析

■ 接通电源 (充磁)

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + IR$$

■ 电源做功功率

$$P_s = I\mathcal{E} = I^2R + LI \frac{dI}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right)$$



电源提供的能量，
一部分转化为焦耳热，一部分克服自感线圈电动势做功。

磁能

问题：什么是磁能？

回答：电流从无到有（或曰磁场从无到有）
无限缓慢的建立过程中，
外界抵抗感应电动势（或曰抵抗涡旋电场力）所做的功。

■ 该功仅与电流分布(或磁场)分布有关，而由过程无关

■ 感应电动势 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow 0$

■ 抵抗感应电动势做功功率 $P = -I\varepsilon = +I\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow 0$

■ 抵抗感应电动势做功 $A = \int Pdt = \int Id\Phi$ 有限

单个载流线圈的磁能

- 线圈中 I 从 $0 \rightarrow I_0$ 的过程中，外界抵抗感应电动势做功

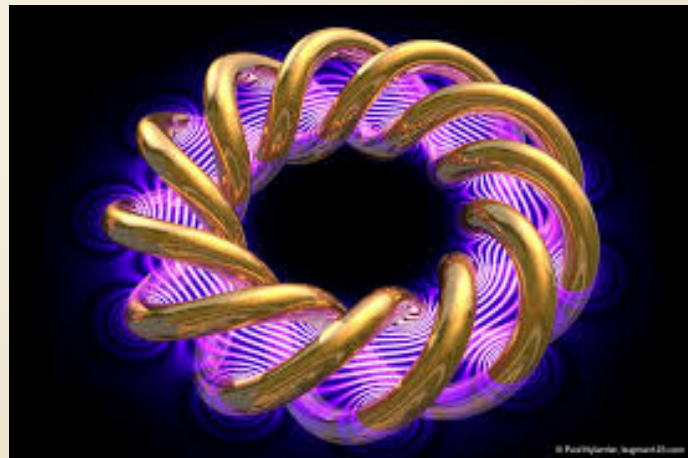
$$A = -\int I \varepsilon dt = \int I d\Phi = \int_0^{I_0} IL dI = \int_0^{I_0} d\left(\frac{1}{2} LI^2\right) = +\frac{1}{2} LI_0^2$$

- 载流线圈通有电流 I 时，其磁能为

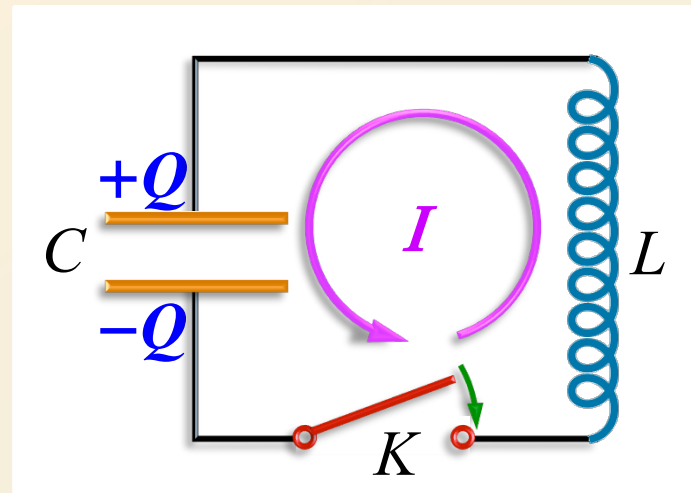
$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\Phi = LI$$

$$W = \frac{1}{2} I\Phi$$



例：一电容 C 蓄有电量 Q_0 ，在 $t=0$ 时刻接通 K ，经自感为 L 的线圈放电
 求：(1) L 内磁场能量第一次等于 C 内电场能量的时刻 t_1 ；(2) L 内磁场能量第二次达到极大值的时刻 t_2 。

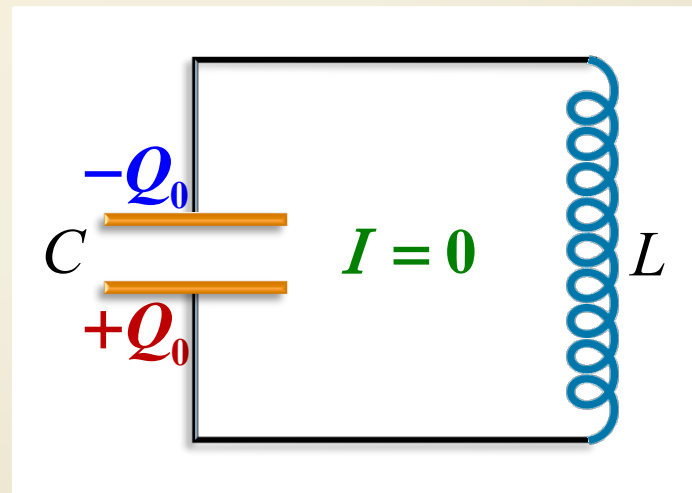
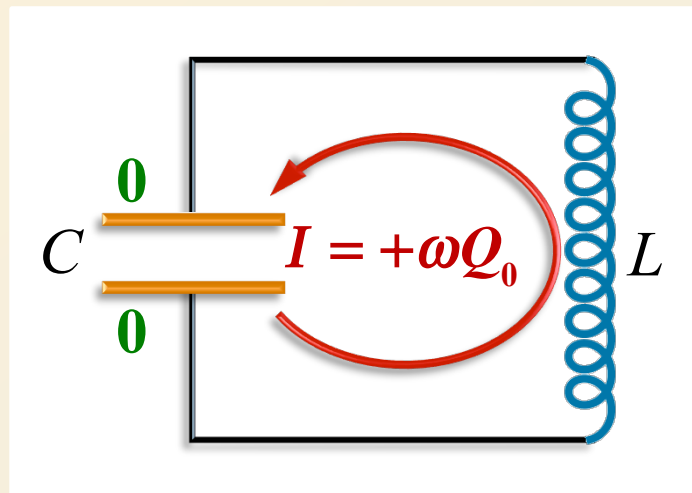
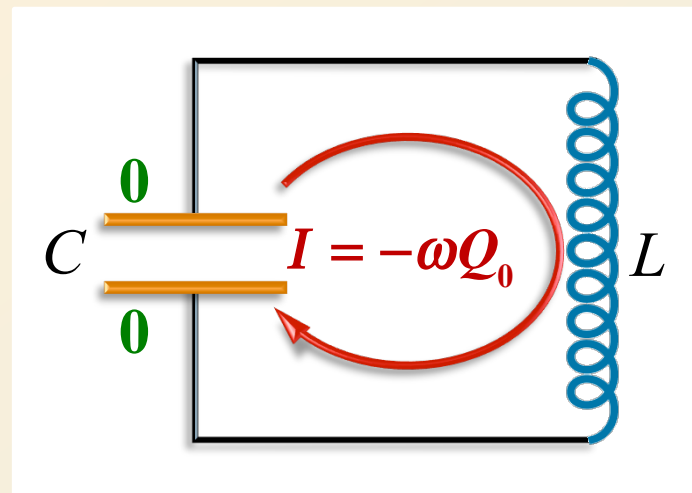
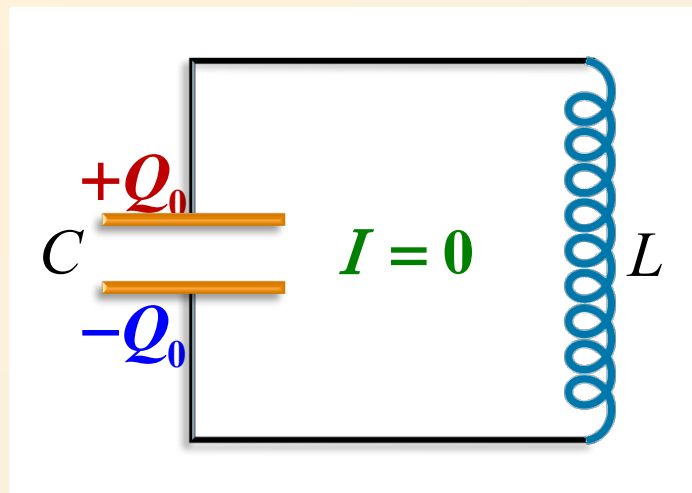


解：约定图示电流 I 和 Q ：
$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

应用回路定律 $L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \longrightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$ $\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$

利用初始条件 $Q(0) = Q_0, I(0) = 0$ 得到

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t, \quad I(t) = -\omega Q_0 \sin \omega t$$



$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t, \quad I(t) = -\omega Q_0 \sin \omega t$$

$$\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

C 与 L 内的能量

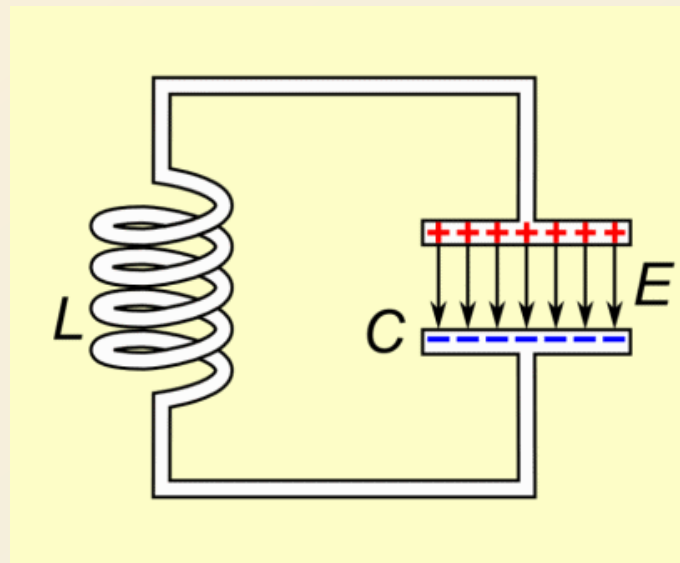
$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t$$

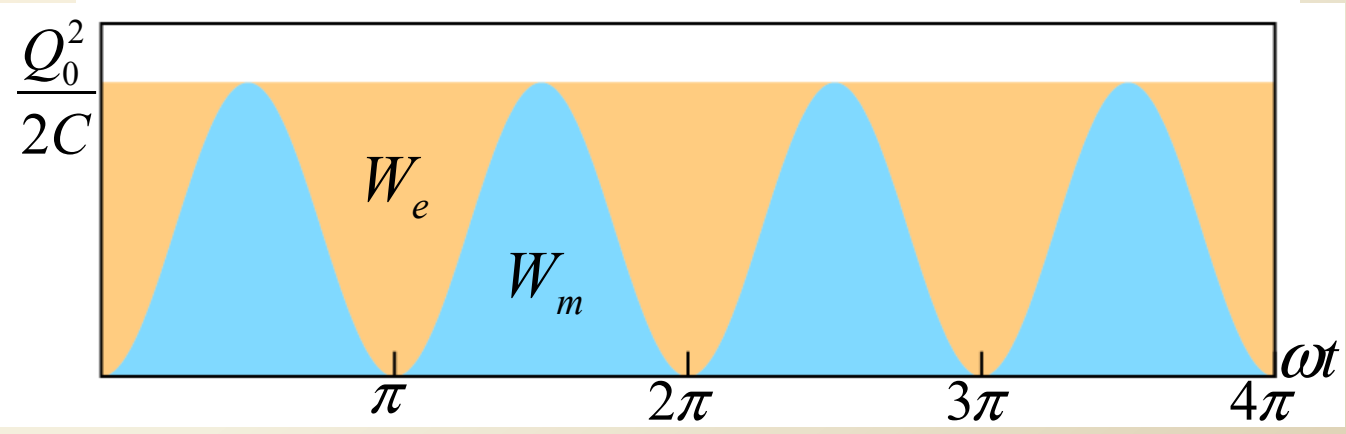
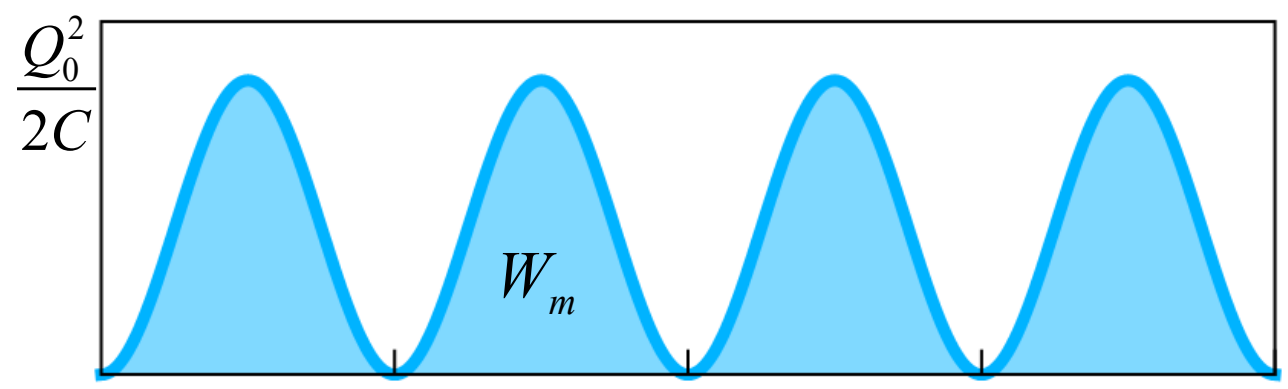
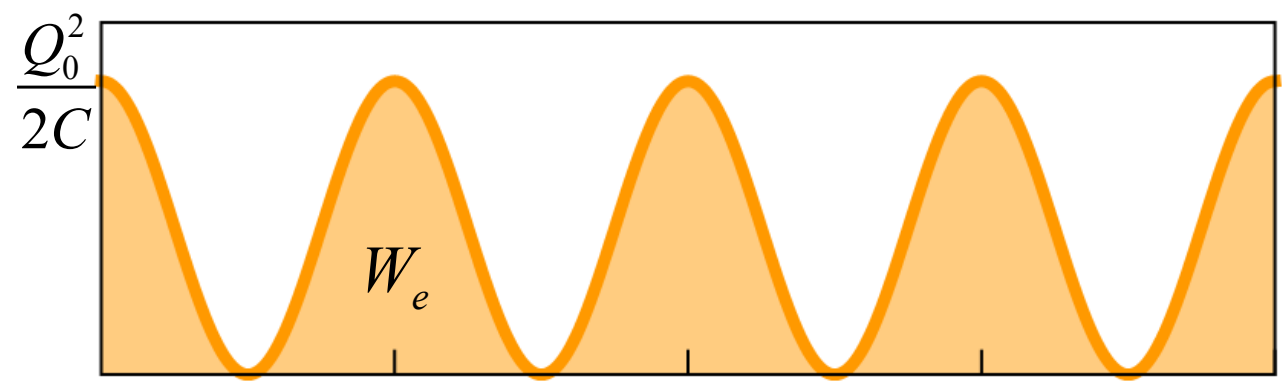
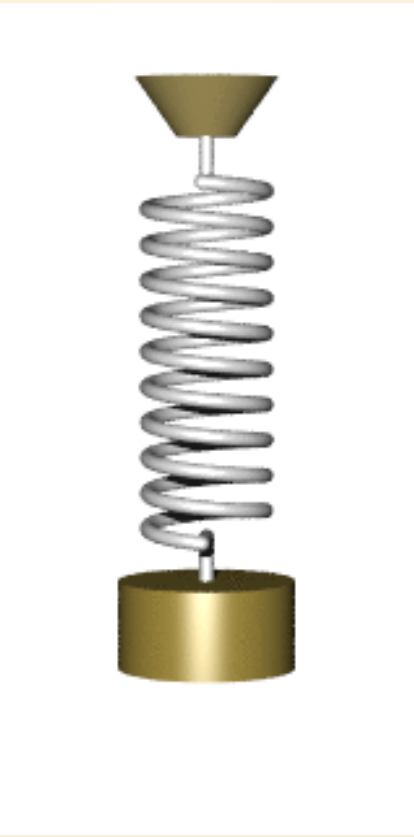
$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega t$$

任一时刻 t 时的总能量

$$W = W_e + W_m = \frac{Q_0^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{Q_0^2}{2C} \text{ 常数}$$

能量在 C 与 L 之间相互交换，但总能量保持不变





载流线圈系统

- 穿过第 i 个线圈中的磁通量

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \Phi_{ij} = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j, \quad (M_{ij} = M_{ji})$$

- 电流变化时，第 i 个线圈上的感应电动势

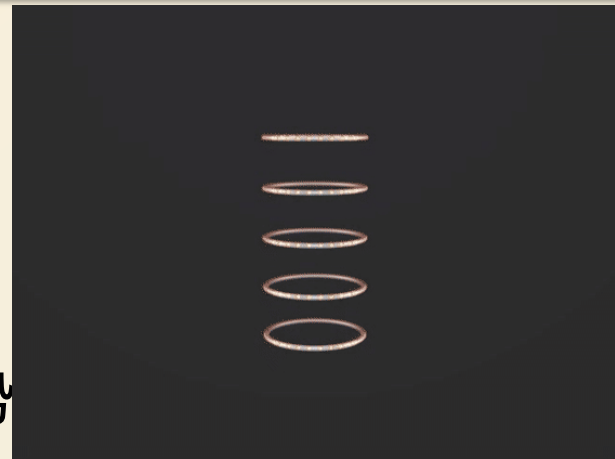
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^N M_{ij} \frac{dI_j}{dt}$$

- 外界抵抗感应电动势做功功率

$$P_i = -I_i \mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt}$$

- 总的功率

$$P = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt}$$



载流线圈系统

■ 总的功率

$$P = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N M_{ji} I_j \frac{dI_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j \frac{dI_i}{dt}$$

$$\therefore P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt} + M_{ji} I_j \frac{dI_i}{dt} \right)$$

$$\rightarrow P = \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{1}{2} M_{ij} I_i I_j \right)$$

设线圈保持不动，
从而 M_{ij} 为常数

载流线圈系统的磁能

- 载流线圈系统的磁能为

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N M_{ij} I_i I_j$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j = \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}$$

穿过第 i 个线圈
的总磁通量

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i$$

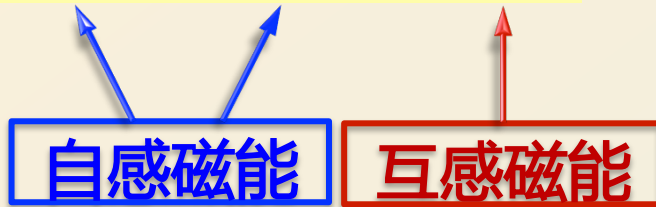
自能与互能

- 由于 $L_i = M_{ii}$, 因此

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{i<j} M_{ij} I_i I_j$$

- 对于两个线圈情形

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$



- 互感磁能即为两个线圈之间的相互作用能

$$W_{12} = M I_1 I_2 = I_1 \Phi_{12} = I_1 \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}$$

Φ_{12} : 2 在 1 中产生的磁通

线圈在外场中的磁能

- 一般地，载流线圈处在**外场中的磁能**为

$$W = I\Phi_e = I \iint_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$$

\vec{B}_e : 外场

Φ_e : 外场穿过线圈的磁通量

- 对于**均匀外场中的线圈**或**非均匀外场中的小线圈**

$$W = I\vec{B}_e \cdot \iint_S d\vec{S} = I\vec{B}_e \cdot \vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

- N 个线圈在外磁场中的磁能

$$W = \sum_{k=1}^N I_k \iint_{S_k} \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$$


外场均匀

$$W = \sum_{k=1}^N \vec{m}_k \cdot \vec{B}_e = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

\vec{m} : 总磁矩

功与能

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

如果解读各个能量 

- (1) 在 ∞ 处分别建立电流 I_1 和 I_2 ,
外界抵抗感生电动势做功

$$A_0 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

- (2) 维持电流 I_1 和 I_2 不变, 将线圈1由 ∞ 移至给定位置,
外界无需做功
- (3) 维持电流 I_1 和 I_2 不变, 将线圈2由 ∞ 移至给定位置,
外界需要抵抗什么力做功? 做多大功?

功与能

(3) 维持电流 I_1 和 I_2 不变，将线圈2 由 ∞ 移至给定位置时，两线圈之间的互感系数会变化

■ 维持线圈1 电流不变，外接电源需抵抗感生电动势做功

$$A_{1\text{感}} = \int_0^{\infty} I_1 \dot{\Phi}_{12} dt = I_1 \int_0^{MI_2} d\Phi_{12} = MI_1 I_2$$

■ 维持线圈2 电流不变，外接电源需抵抗动生电动势做功

$$A_{2\text{动}} = \int_0^{\infty} I_2 \dot{\Phi}_{21} dt = I_2 \int_0^{MI_1} d\Phi_{21} = MI_1 I_2$$

■ 移动线圈2，外界需抵抗安培力做功

$$A_{2\text{安}} = -A_{2\text{动}} = -MI_1 I_2$$

WHY 

外场中的势能

$$A_{1\text{感}} = MI_1 I_2 = A_{2\text{动}} = -A_{2\text{安}}$$

结论1：维持各电流不变，移动线圈过程中电源做功
等于安培力做功两倍，
等于互能或磁能增量的两倍

结论2：维持各电流不变，移动线圈过程中安培力做功
等于互能或磁能的增量

■ 载流线圈处在**外场中的(力学)势能**等于在维持电流不变的情形下，移动线圈的过程中外界抵抗安培力做功

$$U = -I\Phi_e = -W_{\text{互}}$$

■ 安培力 $\vec{F} = -\nabla U$

小载流线圈的势能

■ 小载流线圈处在外场中的势能 $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$

■ 安培力 $\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}_e)$

■ 对于微观粒子，无需电源维持磁矩不变，因而在外场中的磁能指的就是(力学)势能，即

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

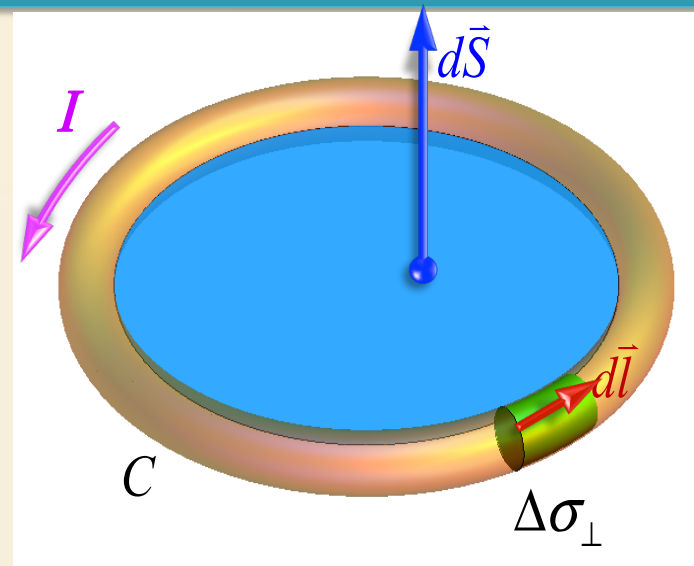
任意电流分布的磁能

■ 载流线圈系统的磁能为

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i$$

$$I_i = j \Delta \sigma_{\perp}$$
$$\Phi_i = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N j \Delta \sigma_{\perp} \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{j} \cdot \vec{A} dl \Delta \sigma_{\perp}$$



■ 对于一般电流分布，磁能为

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV$$

磁场的能量

- 螺线管长 l , 面积 S , 体积 $V = lS$, 总匝数 $N = ln$, 电流 I

$$B = \mu_0 n I$$

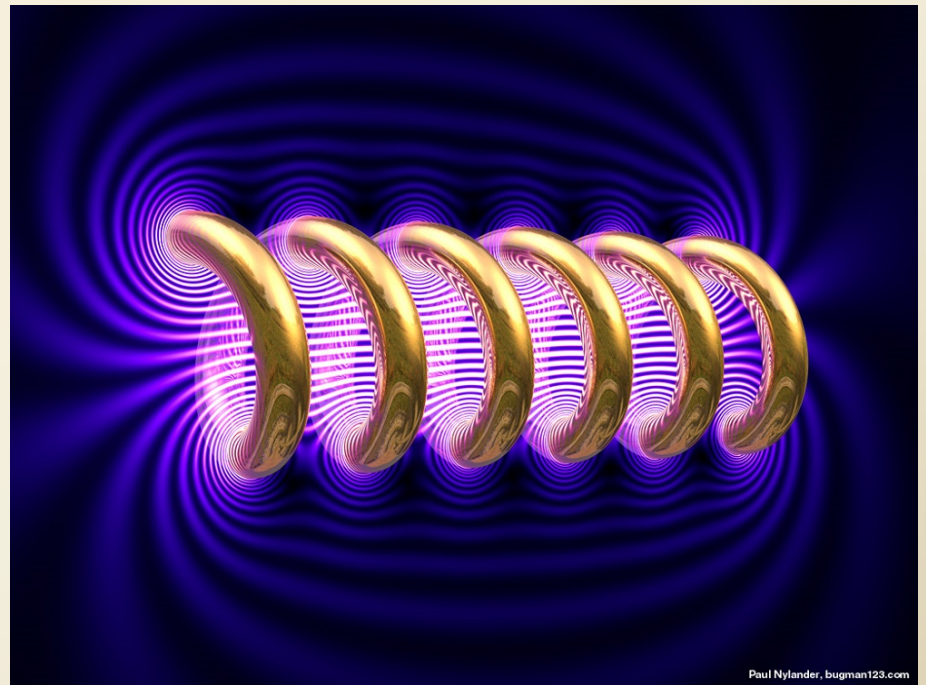
$$\rightarrow \Phi = NBS = \mu_0 N n I S = \mu_0 n^2 I l S$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 V$$

$$\rightarrow W = \frac{B^2}{2\mu_0} V$$

- 磁场的能量密度

$$w_e = \frac{B^2}{2\mu_0}$$



磁场能量

■ 考察某根很细的 B 管 C

- 由 Ampere 环路定理

$$\mu_0 I = \int_C B dl$$

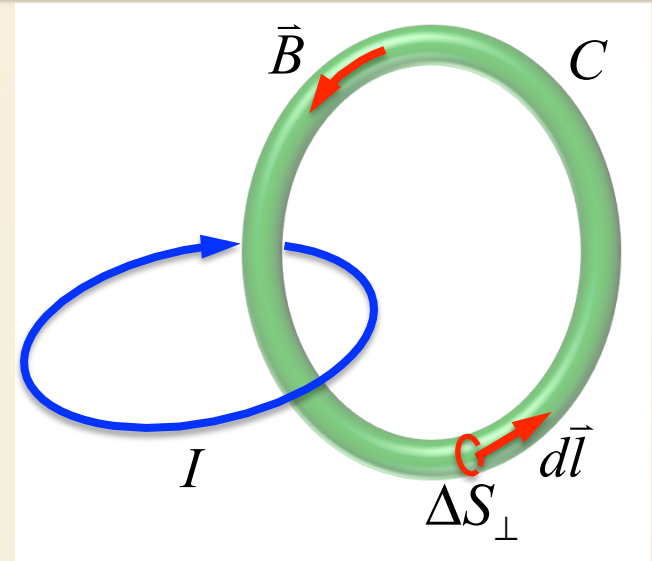
- 通过每一(横)截面的磁通量相同

$$\Delta\Phi = B\Delta S_{\perp}$$

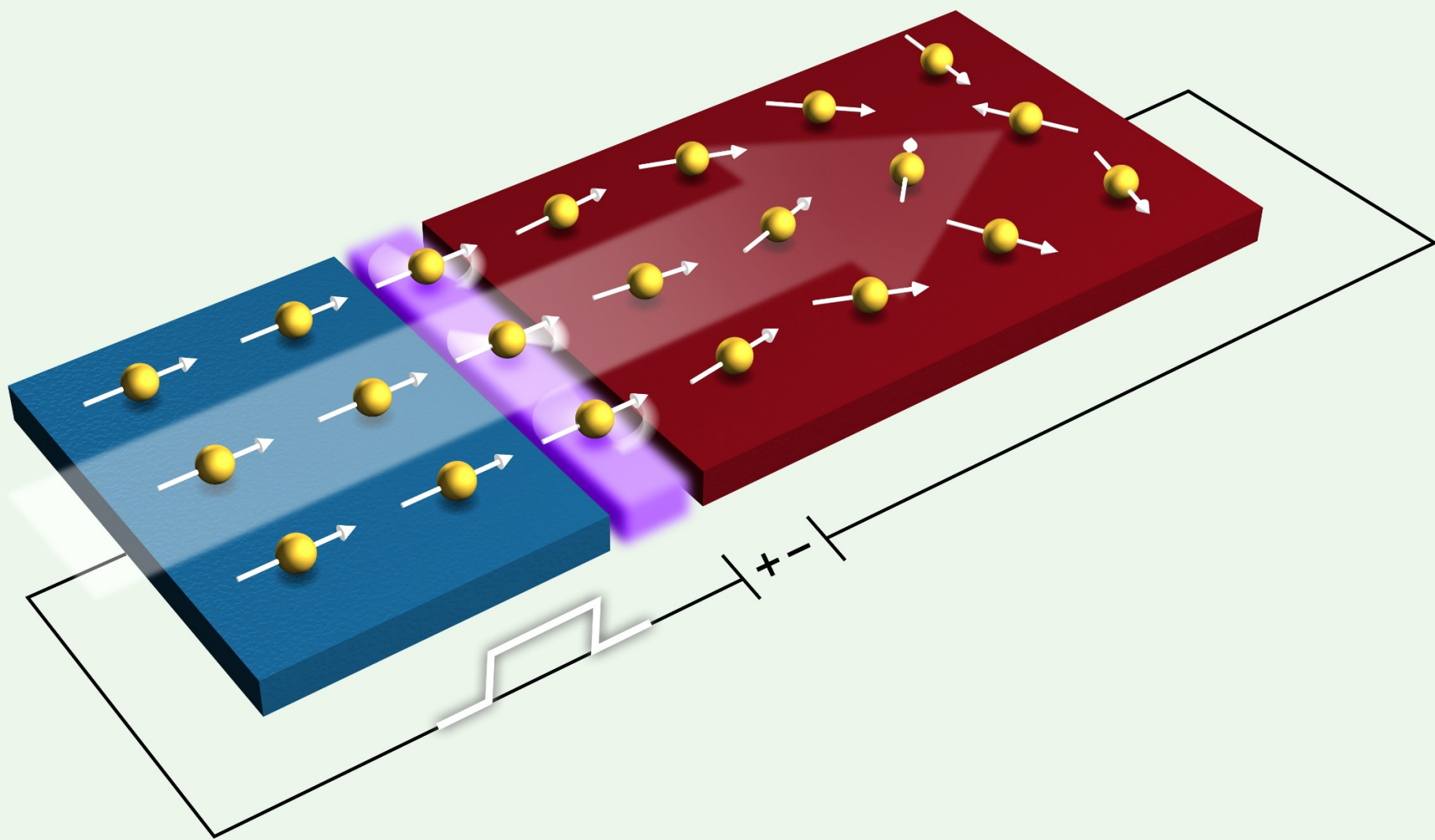
$$\rightarrow \frac{1}{2} I \Delta\Phi = \int_C \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta S_{\perp} dl$$

- 对所有 B 管求和得到

$$W = \frac{1}{2} I \Phi = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$



五、磁介质存在时的磁能



磁介质存在时的磁能

- 同一载流线圈在真空中与处在介质中产生的磁场是不同的，所以电流变化时感应电动势是不同的，因而磁能与磁介质有关。存在磁介质时，自感与互感电动势仍为：

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

- 介质存在对磁场的影响反映在自感和互感系数中。
- 例如：无限长螺线管中充满磁介质，

$$H = nI, B = \mu_0 \mu_r nI \longrightarrow \Phi = NBS = \mu_0 \mu_r NnIS = \mu_0 \mu_r n^2 I l S$$

$$\longrightarrow L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V \longrightarrow W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r n^2 I^2 V = \frac{1}{2} BHV$$

- 能量密度 $w = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

线性、各向同性介质中磁场的能量

■ 考察某根很细的H管 C

■ 由Ampere环路定理

$$I = \int_C H dl$$

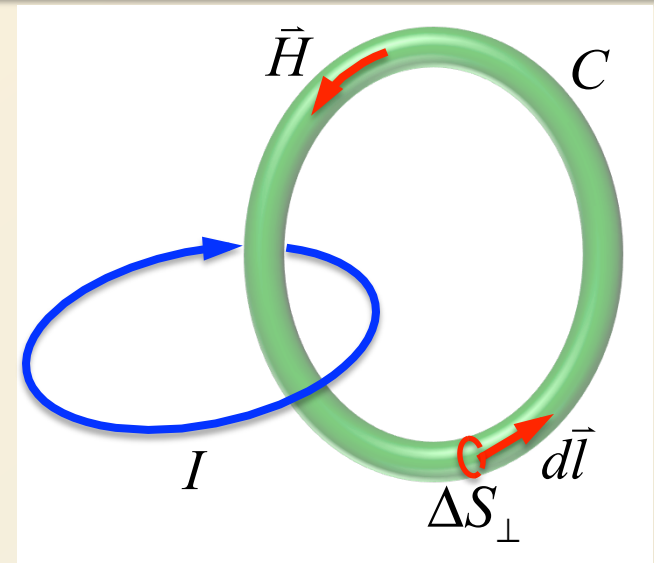
■ 通过每一(横)截面的磁通量相同

$$\Delta\Phi = B\Delta S_{\perp}$$

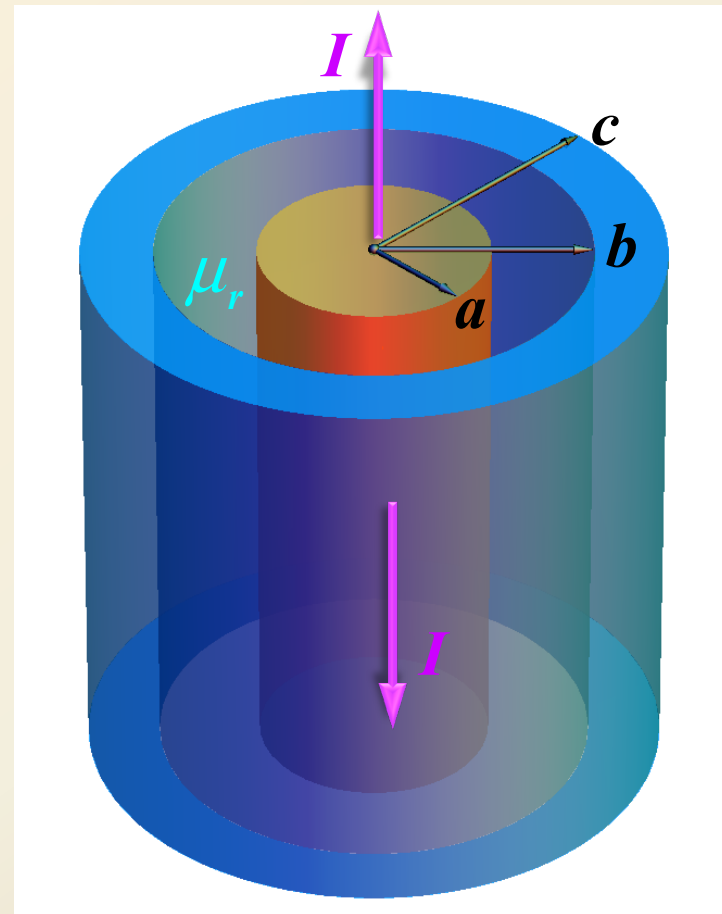
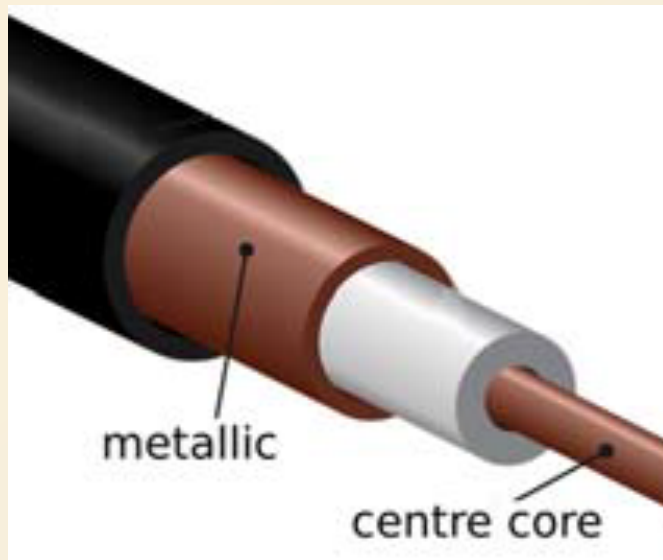
$$\longrightarrow \frac{1}{2} I \Delta\Phi = \int_C \frac{1}{2} BH \Delta S_{\perp} dl$$

■ 对所有H管求和得到

$$W = \frac{1}{2} I \Phi = \iiint_V \frac{1}{2} BH dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$



例：计算一个同轴电缆，中心是半径为 a 的实心导线，外部是内半径为 b 、外半径为 c 的导体圆筒，内外导体之间充满相对磁导率为 μ_r 的介质，电流在内外筒中等大反向且均匀分布，求该电缆单位长度上的电感。



解：分4个区域计算磁能：

区域1： $0 \leq s \leq a, \mu_r = 1$ $H_1 = \frac{I}{2\pi s} \frac{s^2}{a^2} = \frac{Is}{2\pi a^2}, B_1 = \mu_0 H_1$

$$w_1 = \frac{1}{2} \mu_0 H_1^2 = \frac{\mu_0 I^2 s^2}{8\pi^2 a^4}$$

→ $W_1 = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a w_1 s ds = \frac{\mu_0}{16\pi} l I^2$

区域2： $a \leq s \leq b, \mu_r$ $H_2 = \frac{I}{2\pi s}, B_2 = \mu_0 \mu_r H_2$

$$w_2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H_2^2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 s^2}$$

→ $W_2 = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b w_2 s ds = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} l I^2 \ln \frac{b}{a}$

区域 3 : $b \leq s \leq c, \mu_r \approx 1$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi s} \frac{c^2 - s^2}{c^2 - b^2}$$

$$w_3 = \frac{1}{2} \mu_0 H_3^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (c^2 - b^2)^2} \left(\frac{c^4}{s^2} - 2c^2 + s^2 \right)$$



$$W_3 = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_b^c w_3 s ds$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi (c^2 - b^2)^2} I^2 \left[c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4} (c^2 - b^2) (3c^2 - b^2) \right]$$

区域 4 : $s \geq c, \mu_r = 1$

$$H_4 = 0$$

$$W_4 = 0$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \frac{2W}{I^2}$$

单位长度的自感:

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W}{lI^2} \\ = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \mu_r \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{(c^2 - b^2)^2} \left[c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4} (c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right] \right\}$$

计算自感系数的方法

■ 由感应电动势求自感 $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$ \Rightarrow $L = -\frac{\varepsilon_L}{dI/dt}$

■ 在回路中通以已知变化率的电流，能准确测出回路中的感应电动势时，以这一方法一般适用于工程中。

■ 由磁通量求自感 $\Phi = LI$ \Rightarrow $L = \frac{\Phi}{I}$

■ 可能出错的方法！

■ 由磁能求自感 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ \Rightarrow $L = \frac{2W_m}{I^2}$

■ 不会出错的方法！

线性介质的磁能密度和磁化功

- \vec{H} 矢量可由Ampere环路定理直接得到

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl = NI \quad \Rightarrow \quad H = NI/l$$

- 当电流或者磁场增加时

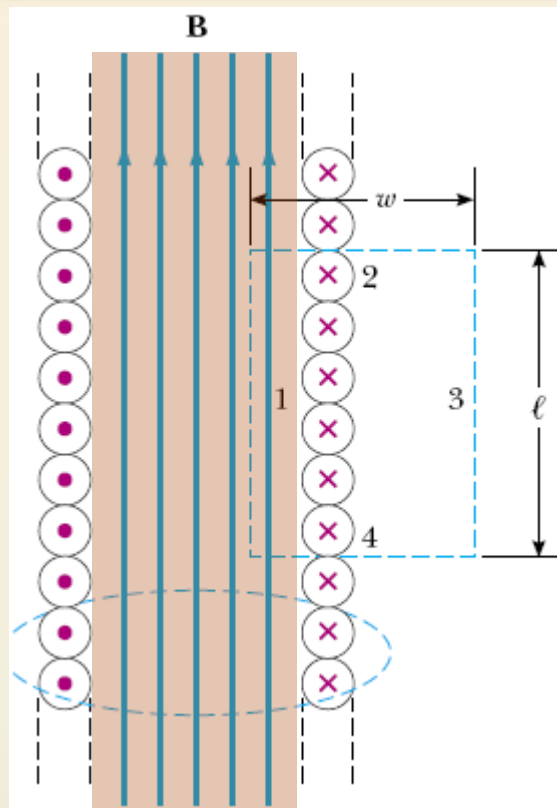
- 全磁通的改变为 $d\Psi = Nd\Phi = NSdB$

- 电源抵抗感应电动势做功为

$$\delta A' = -I\epsilon dt = Id\Psi = NISdB = (HdB)V$$

- 电源对单位体积的介质做功

$$\delta a' = \frac{\delta A'}{V} = HdB = \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad \text{宏观静磁能密度}$$



$$\delta a' = d \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) + \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad \text{磁化功密度}$$

线性、无损耗介质

$$\delta a' = d\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$$

■ 对于线性无损耗介质

$$M_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} H_j$$

$$\chi_{ij} = \chi_{ji}$$



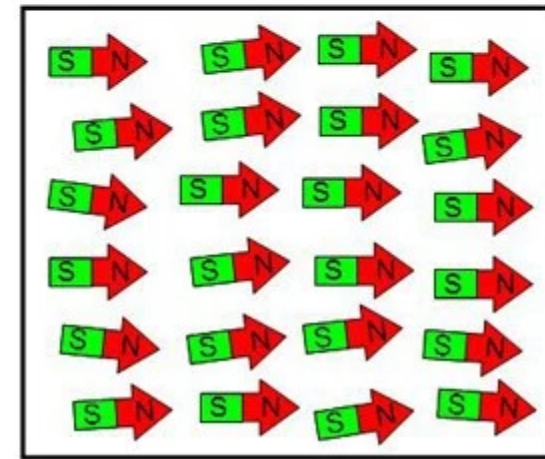
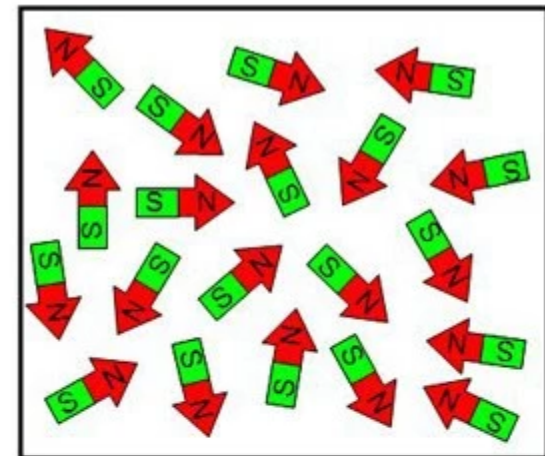
$$\vec{H} \cdot d\vec{M} = \vec{M} \cdot d\vec{H}$$



$$\mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} = d\left(\frac{1}{2}\mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H}\right)$$



$$\delta a' = d\left(\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}\right) = dw$$

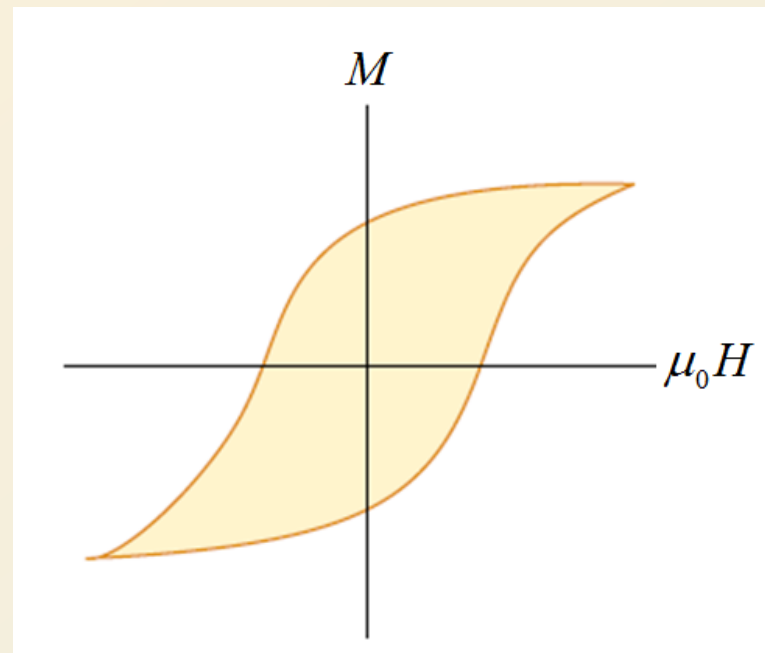


电源所做功全部转化为了路线管内磁场的能量!

非线性磁介质的磁滞损耗

一个周期内电源对单位体积介质做功

$$\begin{aligned} a' &= \oint_C \delta a' \\ &= \oint_C d\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + \oint_C \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} \\ &= \oint_C \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} \end{aligned}$$



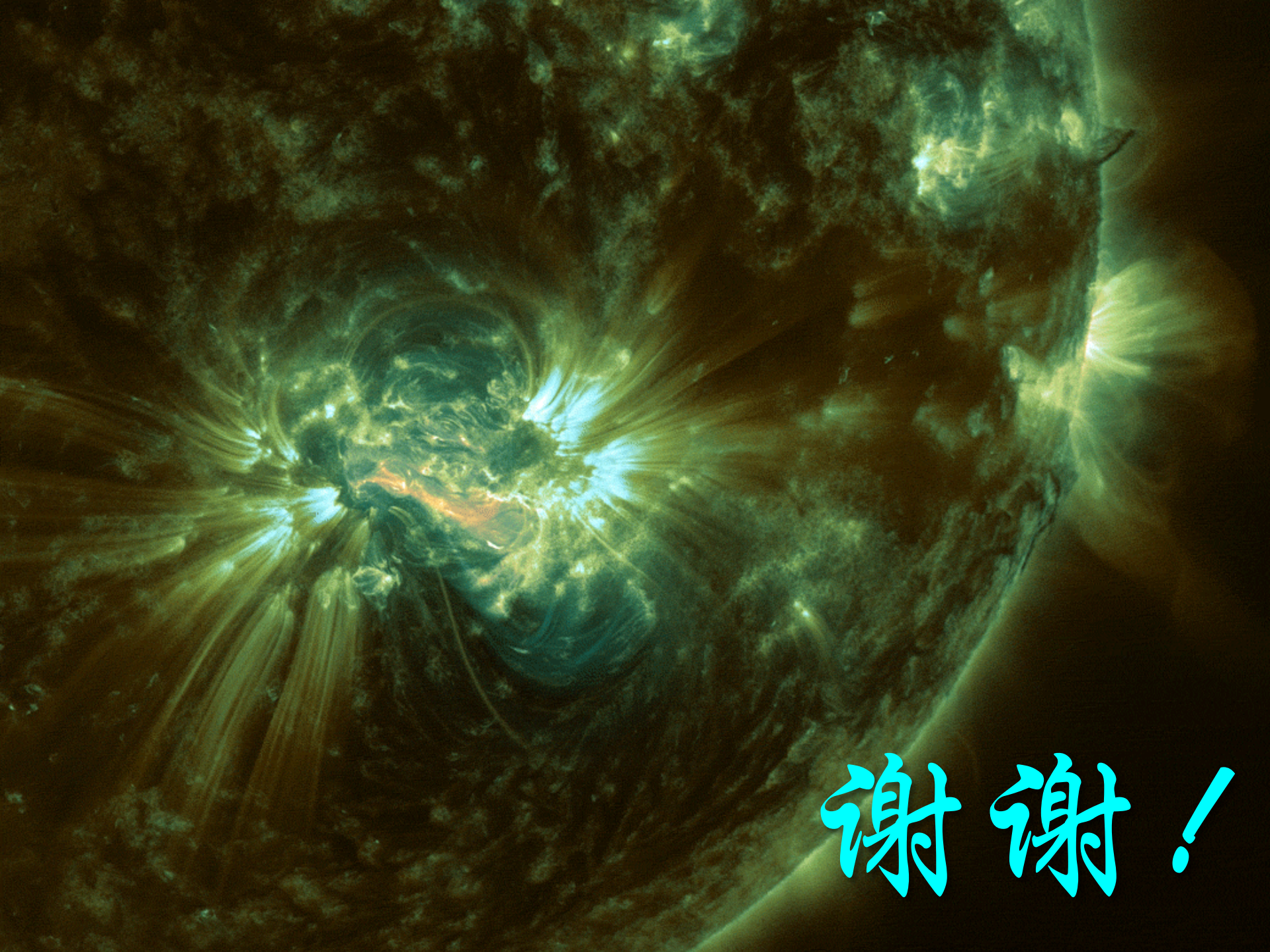
a' = 磁滞回线所围面积



磁滞损耗



热量



谢谢！