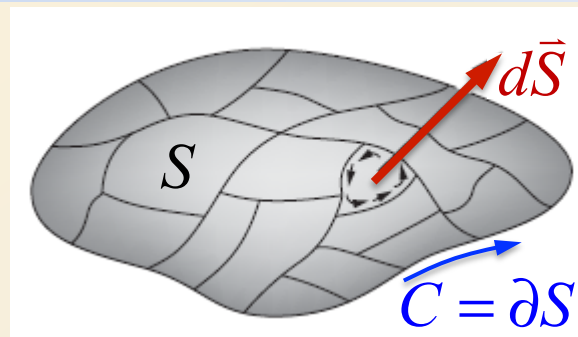


回顾

■ 斯托克斯(Stokes)定理：

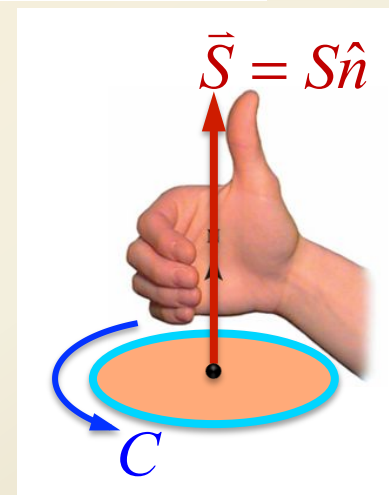
$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$



■ 面积法向与其边界绕行方向：右手法则

■ 矢量场的旋度：

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{S}$$



■ 拉普拉斯(Laplace)算子：

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

回顾

■ 静电场的环路定理 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$

■ 静电势 $\varphi(\vec{r}) \equiv \int_{\vec{r}}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_P^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

■ 对于局域电荷分布，参考点约定为 ∞

■ 电场与电势： $\vec{E} = -\nabla\varphi$

■ 电荷与电势：

➤ Poisson 方程(有源区域)： $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$

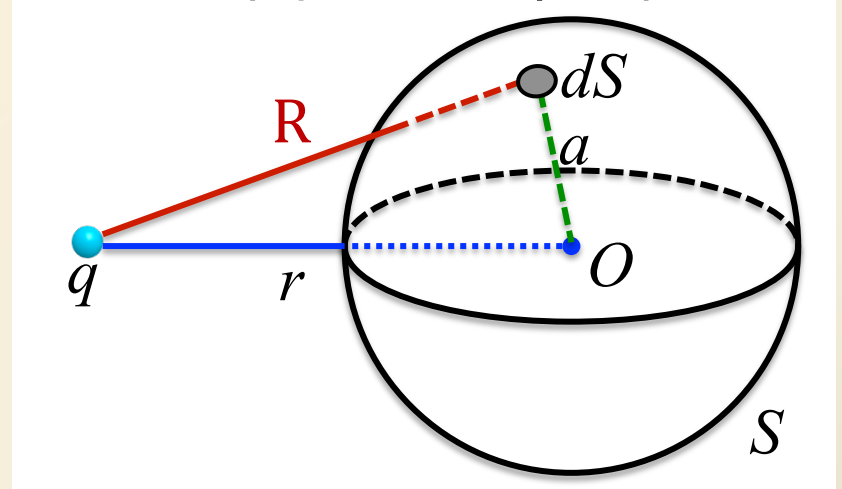
➤ Laplace 方程(无源区域)： $\nabla^2\varphi = 0$

■ 起点1 与 终点2 的电势差 $V_{12} \equiv \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi(1) - \varphi(2)$

电势的平均值

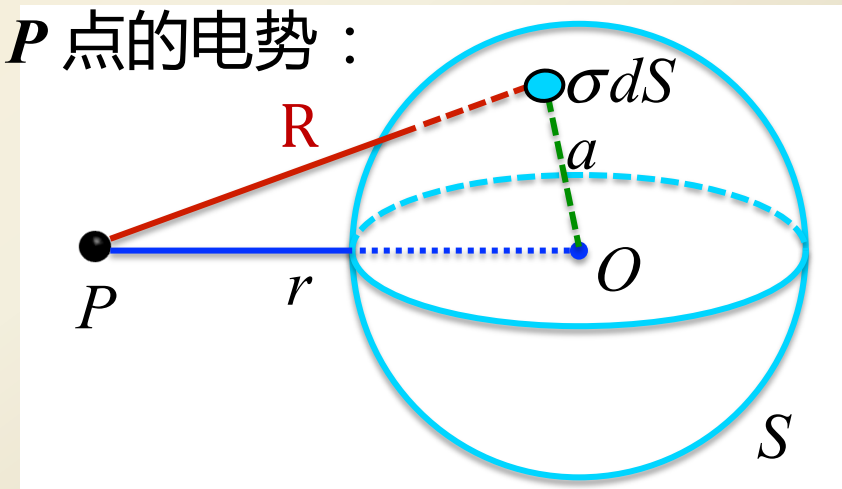
- 求点电荷 q 产生的电势在半径为 a 的球面 S 上的平均值。

$$\begin{aligned}\langle \varphi \rangle &\equiv \frac{1}{S} \oint_S \varphi(\mathbb{R}) dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \mathbb{R}} dS\end{aligned}$$



- 总电量为 q 的均匀带电球壳在 P 点的电势：

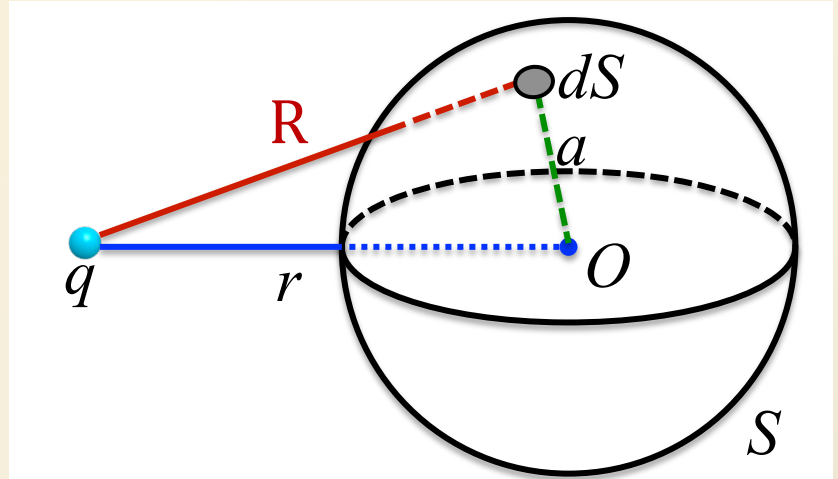
$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \oint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 \mathbb{R}} \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \mathbb{R}} dS\end{aligned}$$



电势的平均值_续

■ 点电荷电势的平均值

$$\langle \varphi \rangle_{r=a} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & (r \geq a) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, & (r \leq a) \end{cases}$$



q 在球面外，电势平均值等于 q 在球心处产生的电势；
 q 在球面内，电势平均值等于球心处的 q 在球面上产生的电势。

■ 任意电荷分布产生的电势在球面上的平均值

$$\langle \varphi \rangle_{r=a} = \varphi_{\text{外}}(O) + \frac{Q_{\text{内}}}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$\varphi_{\text{外}}(O)$ 为球外电荷
在球心处产生的电势

■ 在没有电荷区域，球面上电势平均值等于球心处电势

静电势的平庸性及恩肖定理

■ 推论：在无电荷的区域内，电势没有局部极小值/极大值。

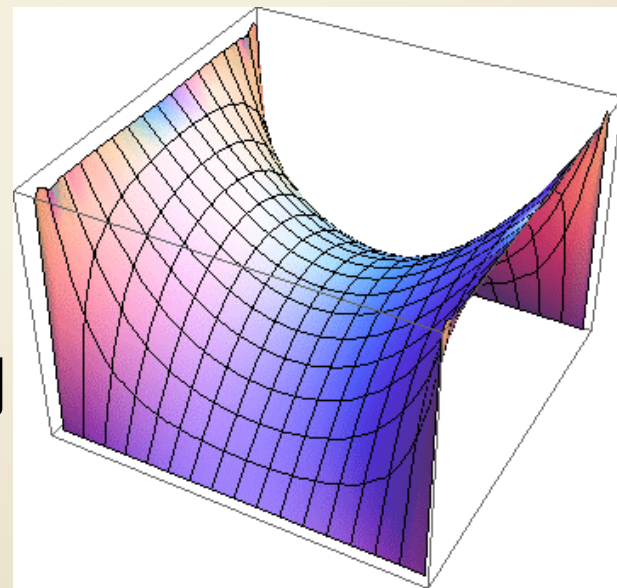
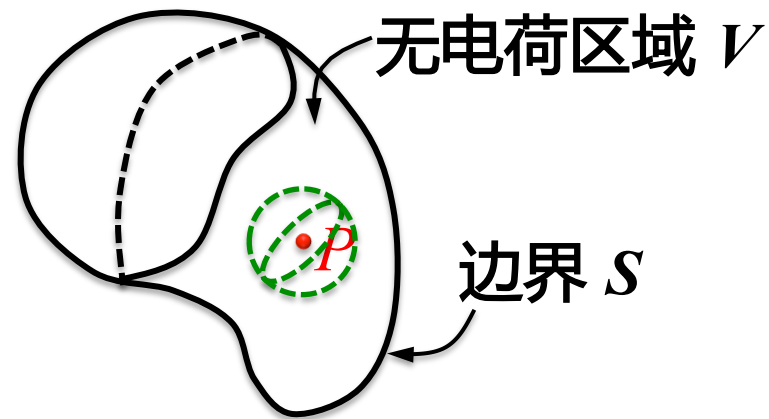
■ 极值只能在区域边界上取得。

证明：(反证)

若 P 为极小值点

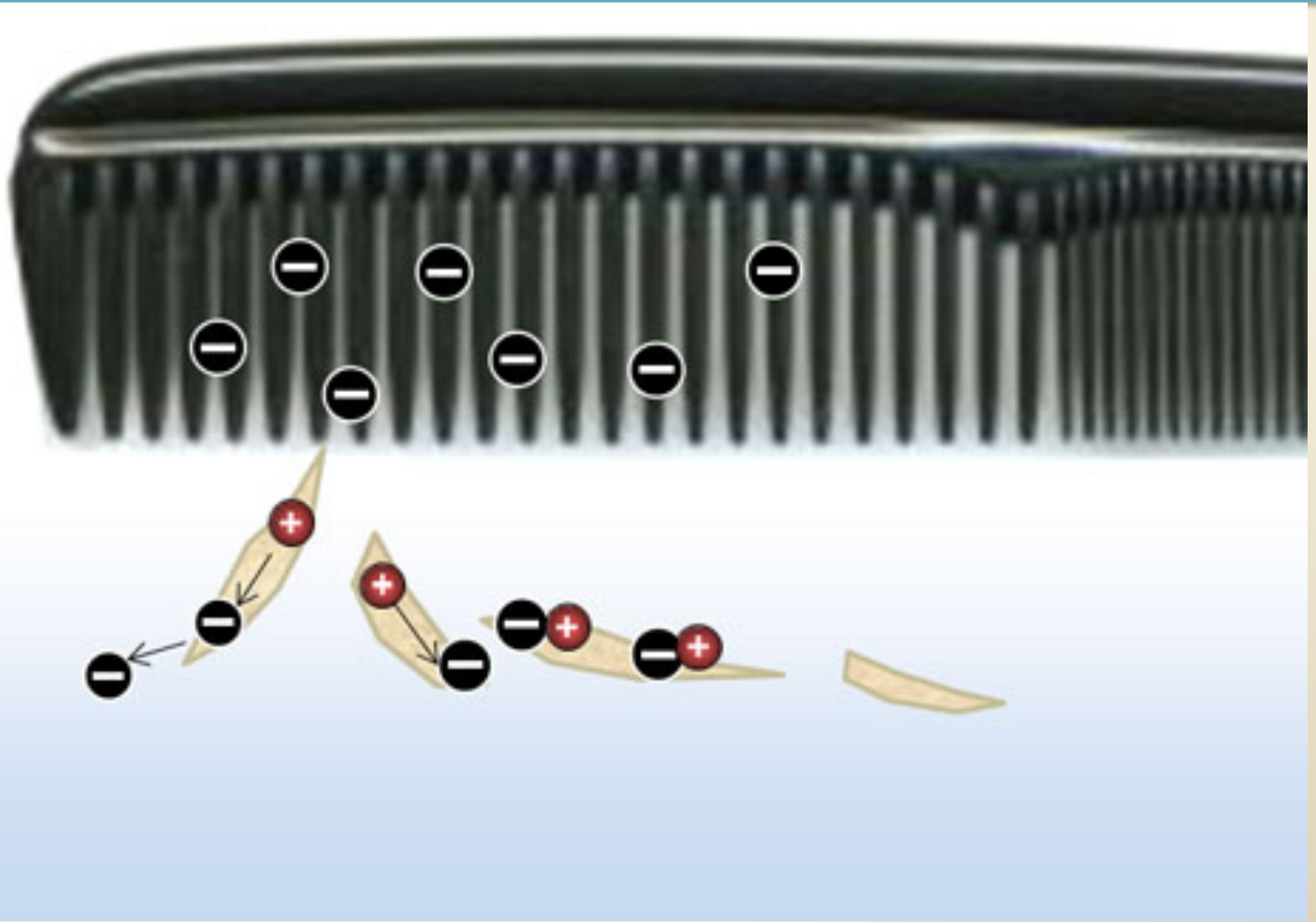
→ P 点电势小于邻近点电势

→ 以 P 为中心的无限小球面上电势平均值大于 P 点电势



■ **恩肖(Earnshaw)定理**：只受静电力作用的电荷，不可能处于静止稳定平衡状态。

§1.7 电场对于带电体的作用



带电体之间的力

- 带电体 A 产生的电场：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

- 带电体 A 对带电体 A^* 施加的力：

$$\begin{aligned}\vec{F}^* &= \int \vec{E}(\vec{r}) \rho^*(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho^*(\vec{r}) dV \int \rho(\vec{r}') dV' \frac{\vec{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

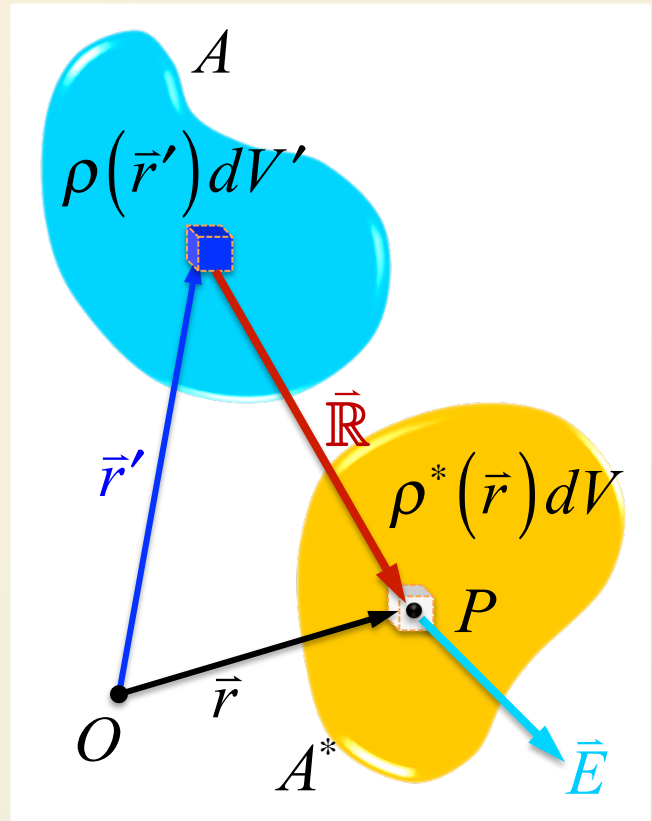
- 带电体 A 受到带电体 A^* 的力：

$$\vec{F} = \int \vec{E}^*(\vec{r}') \rho(\vec{r}') dV$$

- 带电体之间的相互作用满足Newton III

$$\vec{F} = \vec{F}^* (\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}', \rho \leftrightarrow \rho^*) = -\vec{F}^*$$

- 带电体对自身所施加的力为零



带电体之间的力矩

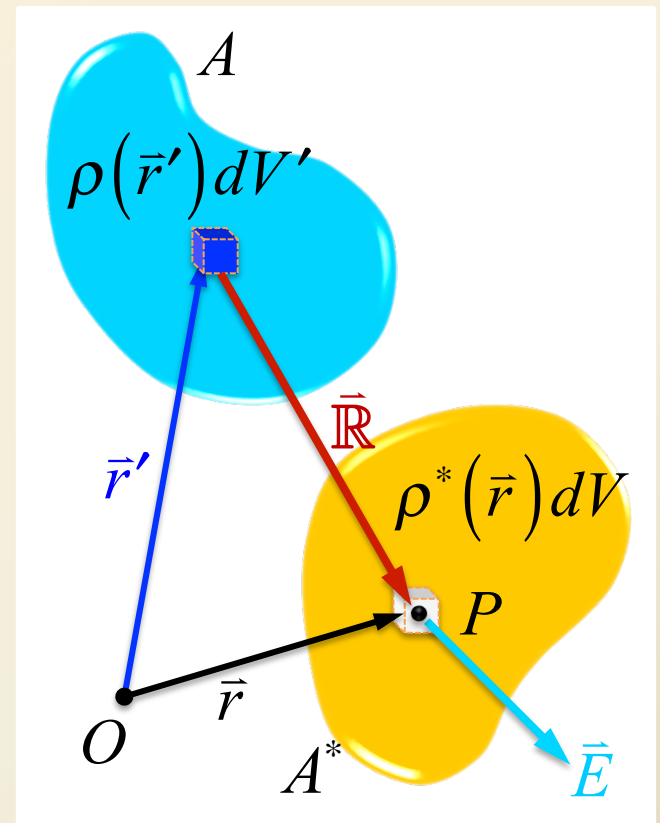
- 带电体 A 对带电体 A^* 施加的力矩
(相对于 O 点)

$$\begin{aligned}\bar{\tau}^* &= \int \bar{r} \times \bar{E}(\bar{r}) \rho^*(\bar{r}) dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho^*(\bar{r}) dV \int \rho(\bar{r}') dV' \frac{\bar{r} \times \bar{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

- 带电体 A 受到带电体 A^* 的力矩：
(相对于 O 点)

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}^*(\bar{r} \leftrightarrow \bar{r}', \rho \leftrightarrow \rho^*) = -\bar{\tau}^*$$

- 带电体对自身所施加的力矩为零



电场中的带电体受力

设某个带电体处在(其他电荷产生的)外场 $E_{\text{外}} = E_e$ (external) 中

■ 点电荷系统受力

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_e(\vec{r}_i)$$

■ 线电荷受力

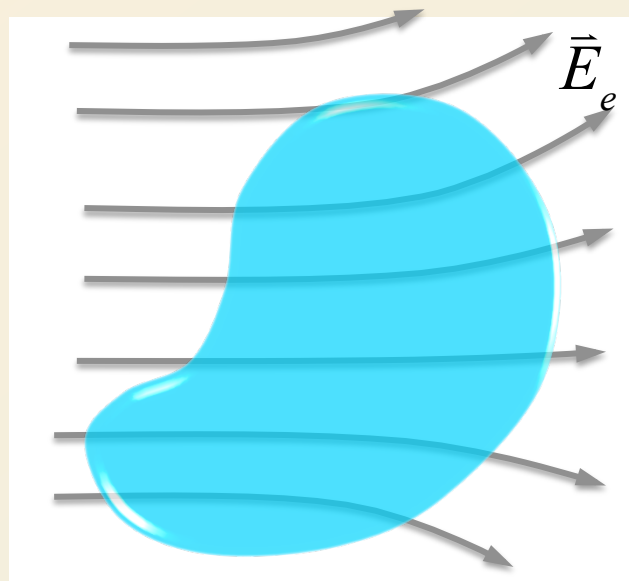
$$\vec{F} = \int_C \lambda(\vec{r}) \vec{E}_e(\vec{r}) d\vec{l}$$

■ 面电荷受力

$$\vec{F} = \iint_S \sigma(\vec{r}) \vec{E}_e(\vec{r}) dS$$

■ 体电荷受力

$$\vec{F} = \iiint_V \rho(\vec{r}) \vec{E}_e(\vec{r}) dV$$



思考:

可以把外电场替换成总电场吗?

外场中的电偶极子受到的力

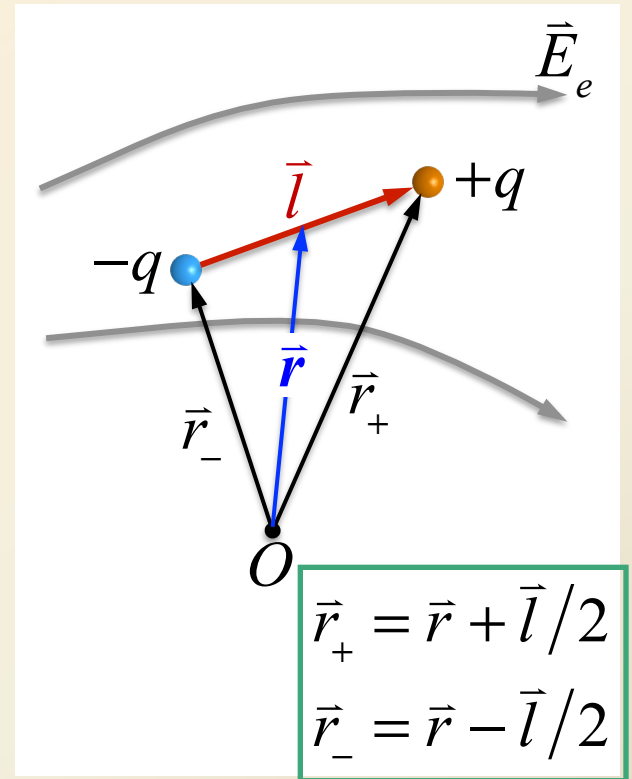
■ 电偶极子受力在的 x 方向的分量

$$\begin{aligned} F_x &= qE_{e,x}(\vec{r}_+) + (-q)E_{e,x}(\vec{r}_-) \\ &= q \left[E_{e,x}(\vec{r} + \vec{l}/2) - E_{e,x}(\vec{r} - \vec{l}/2) \right] \\ &\approx q\vec{l} \cdot \nabla E_{e,x}(\vec{r}) \\ &= \vec{p} \cdot \nabla E_{e,x}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\text{注: } \vec{p} \cdot \nabla E_{e,x} \equiv \vec{p} \cdot (\nabla E_{e,x}) \equiv (\vec{p} \cdot \nabla) E_{e,x}$$

■ 电偶极子受力

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}_e = (\vec{p} \cdot \nabla E_{e,x}) \hat{x} + (\vec{p} \cdot \nabla E_{e,y}) \hat{y} + (\vec{p} \cdot \nabla E_{e,z}) \hat{z} \\ &= p_x \partial_x \vec{E}_e + p_y \partial_y \vec{E}_e + p_z \partial_z \vec{E}_e \end{aligned}$$



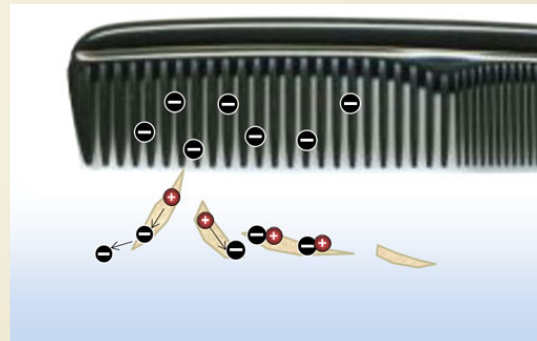
外场中的电偶极子受到的力

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}_e = p_x \partial_x \vec{E}_e + p_y \partial_y \vec{E}_e + p_z \partial_z \vec{E}_e \\ &= (\vec{p} \cdot \nabla E_{e,x}) \hat{x} + (\vec{p} \cdot \nabla E_{e,y}) \hat{y} + (\vec{p} \cdot \nabla E_{e,z}) \hat{z}\end{aligned}$$

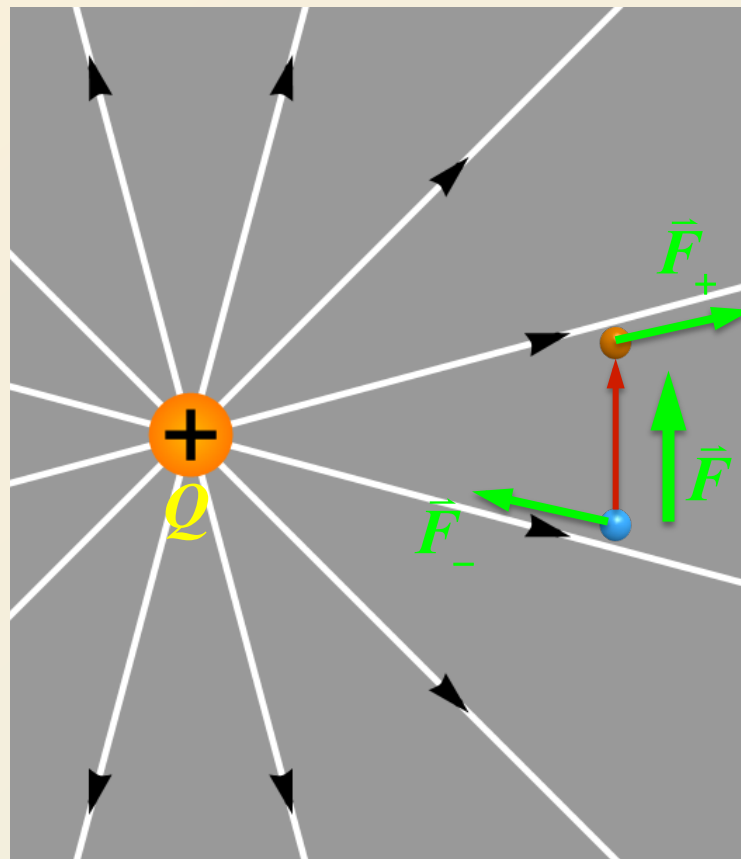
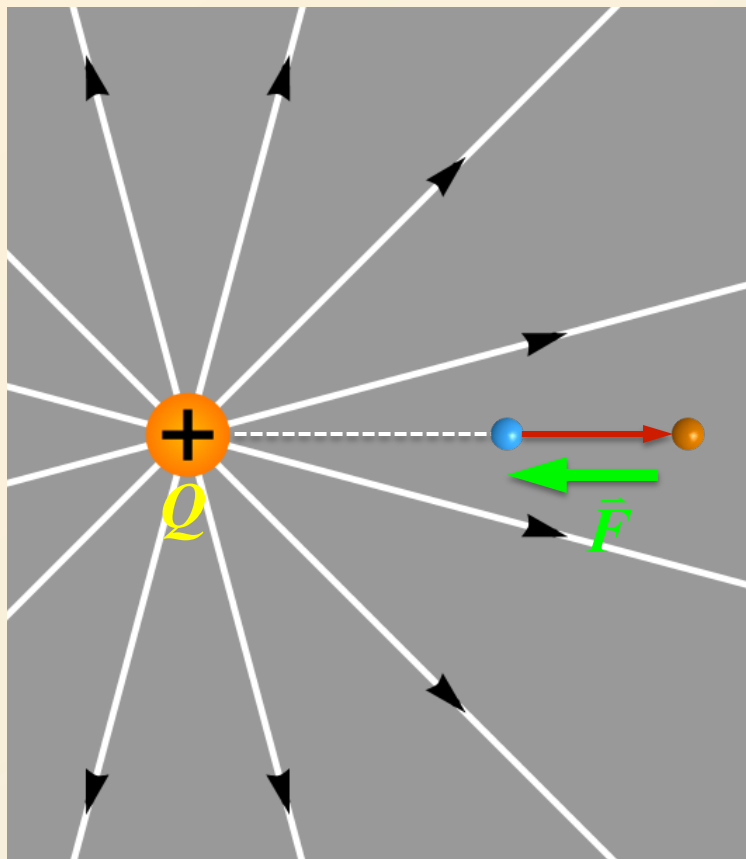
- 均匀外场中的电偶极子不受力
- (整体) 电中性的物体也会有电的效应
 - 对其他电荷施加力(产生场)

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- 在**非均匀**外场中会受力作用
(**梯度力**)



点电荷附近的电偶极子



外场中的电偶极子受到的力矩

■ 电偶极子受到的力矩 (相对于 O 点) :

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \bar{r}_+ \times q\bar{E}_e(\bar{r}_+) - \bar{r}_- \times q\bar{E}_e(\bar{r}_-) \\ &= \bar{r} \times q[\bar{E}_e(\bar{r}_+) - \bar{E}_e(\bar{r}_-)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{l} \times q[\bar{E}_e(\bar{r}_+) + \bar{E}_e(\bar{r}_-)]\end{aligned}$$

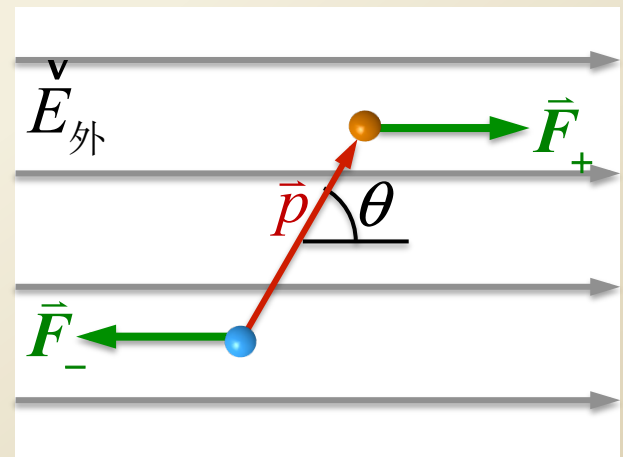
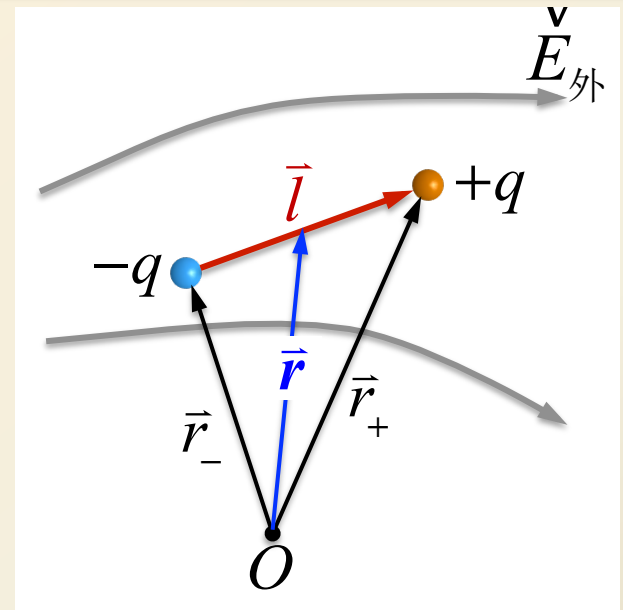
$$\longrightarrow \bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} + \bar{p} \times \bar{E}_e$$

■ 相对于电偶极子中心的力矩

$$\bar{\tau} = \bar{p} \times \bar{E}_e \longrightarrow \tau = pE_e \sin\theta$$

■ 此式也是均匀外场的电偶极子受到的力矩(与原点无关)

■ p 有沿着外场方向排列的趋势



体电荷受力

■ 体电荷受力 $\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{E}_e dV$

■ 总电场 E 等于 $\rho\Delta V$ 产生的电场 E_V 以及其他电荷产生的电场 E' 之叠加:

$$\vec{E} = \vec{E}_V + \vec{E}'$$

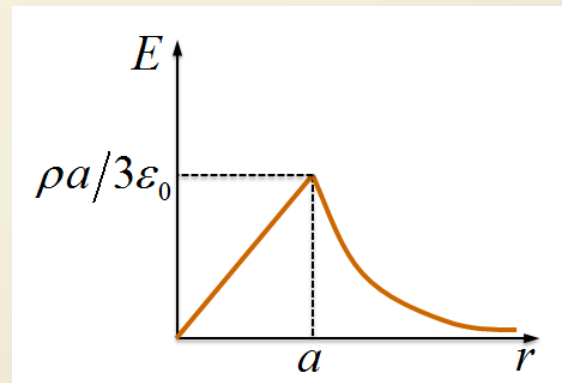
■ 由Newton III, 积分中: $\vec{E}_e \xrightarrow{\text{替换}} \vec{E}'$

■ 由于 $\rho\Delta V$ 在自身附近产生的电场趋于零, 而积分区域有限, 所以

$$\vec{E}' \xrightarrow{\text{替换}} \vec{E}$$

■ 体电荷受力 $\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{E}_e dV = \iiint_V \rho \vec{E} dV$

■ 静电力密度(单位体积受到的静电力) $\vec{f} = \rho \vec{E}$



半球体之间的相互作用

例：对于均匀带电球体，试求北半球受到南半球的静电力。

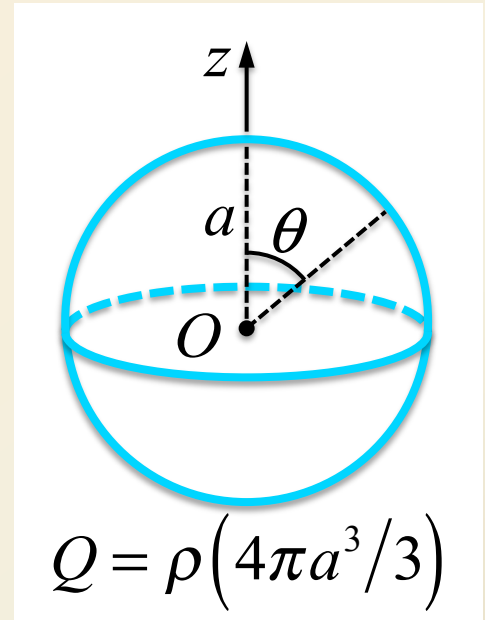
解：球内总电场 $\vec{E} = \rho \vec{r} / (3\epsilon_0)$

由对称性知： $\vec{F} = F\hat{z}$

$$F = \hat{z} \cdot \vec{F} = \hat{z} \cdot \iiint \rho \vec{E} dV = \frac{\rho^2}{3\epsilon_0} \iiint r^2 \cos\theta dV$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$F = \frac{\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^a r^4 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi\rho^2 a^4}{12\epsilon_0} = \frac{(Q/2)^2}{4\pi\epsilon_0 (2a/\sqrt{3})^2}$$



面电荷受力

■ 面电荷受力 $\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E}_e dS$

■ 总电场 E 等于 $\sigma\Delta S$ 产生的电场 E_S 以及其他电荷产生的电场 E' 之叠加: $\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}'$

■ 由Newton III, 积分中: $\vec{E}_e \xrightarrow{\text{替换}} \vec{E}'$

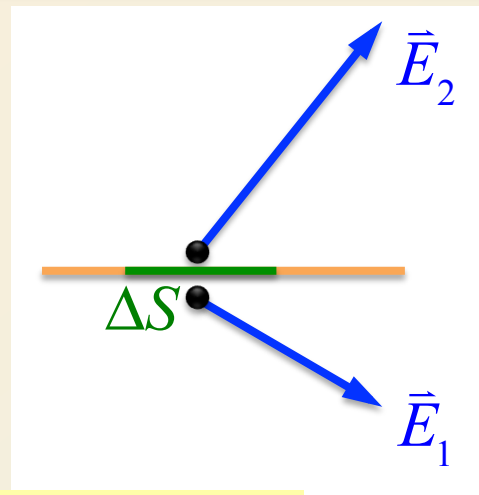
■ 由于 E' 在 $\sigma\Delta S$ 附近连续, 因而 $\vec{E}' = \langle \vec{E}' \rangle \equiv (\vec{E}'_2 + \vec{E}'_1)/2$

■ $\sigma\Delta S$ 在自身两侧产生的电场大小相等、方向相反, 因而

$$\langle \vec{E}' \rangle = \langle \vec{E} \rangle \equiv (\vec{E}_2 + \vec{E}_1)/2$$

■ 面电荷受力 $\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E}_e dS = \iint_S \sigma \langle \vec{E} \rangle dS$

思考: $\sigma\Delta S$ 受到的静电力是?



半球面之间的相互作用

例：对于均匀带电球面，试求北半球面受到南半球面的静电力。

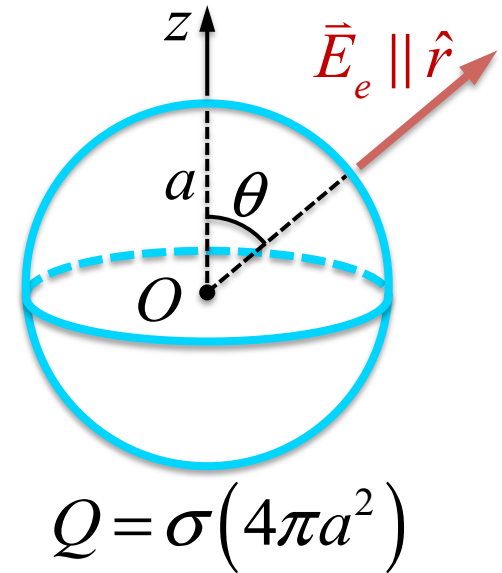
解：球面两侧总电场的平均值 $\langle \vec{E} \rangle = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}$

由对称性知： $\vec{F} = F\hat{z}$

$$F = \hat{z} \cdot \vec{F} = \hat{z} \cdot \iint_S \sigma \langle \vec{E} \rangle dS = \iint_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cos\theta dS$$

$$dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$F = \frac{\sigma^2 a^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sigma^2 \pi a^2}{2\epsilon_0} = \frac{(Q/2)^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}a)^2} > 0$$



压强

■ 面电荷受力 $\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E}_e dS = \iint_S \sigma \langle \vec{E} \rangle dS$

思考： $\sigma \Delta S$ 受到的静电力是？

答案： $\sigma \langle \vec{E} \rangle dS = \sigma \langle \vec{E}' \rangle dS = \sigma \vec{E}' dS$

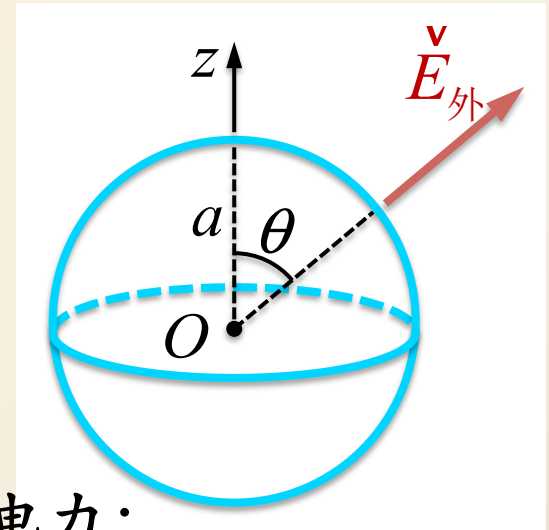
■ 单位面积受到的力 $\sigma \langle \vec{E} \rangle$

■ 对于均匀带电球面，单位面积受到的静电力：

$$\sigma \langle \vec{E} \rangle = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{r} = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_{\diamond}^2 \right) \hat{r}$$

➤ 向外(排斥)

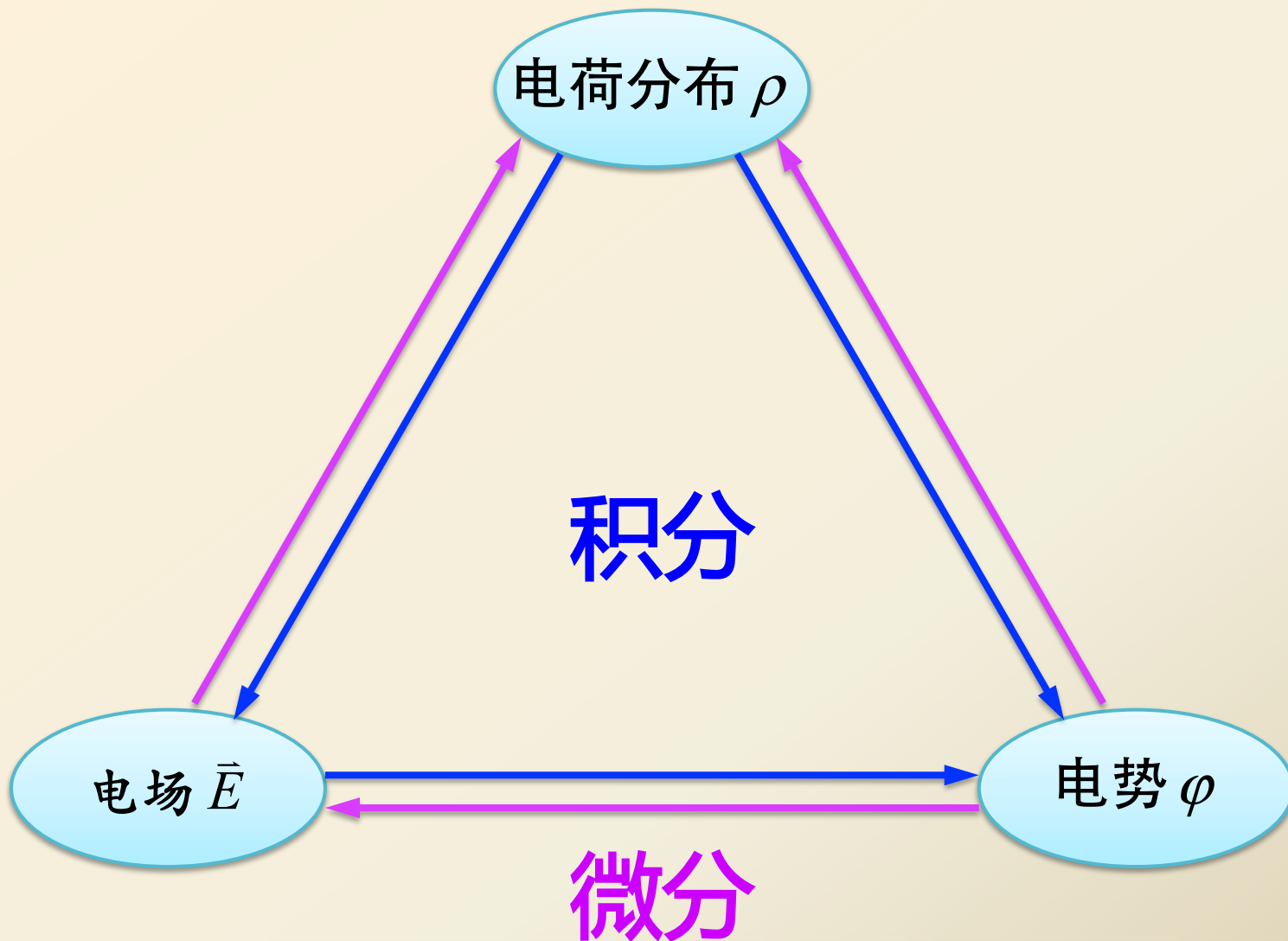
■ 压强 $p = \sigma \langle \vec{E} \rangle \cdot \hat{n}$



量纲：

$$\frac{[F]}{[L]^2} = \frac{[\text{能量}]}{[\text{体积}]} = [\text{能量密度}]$$

小结





Thank You!