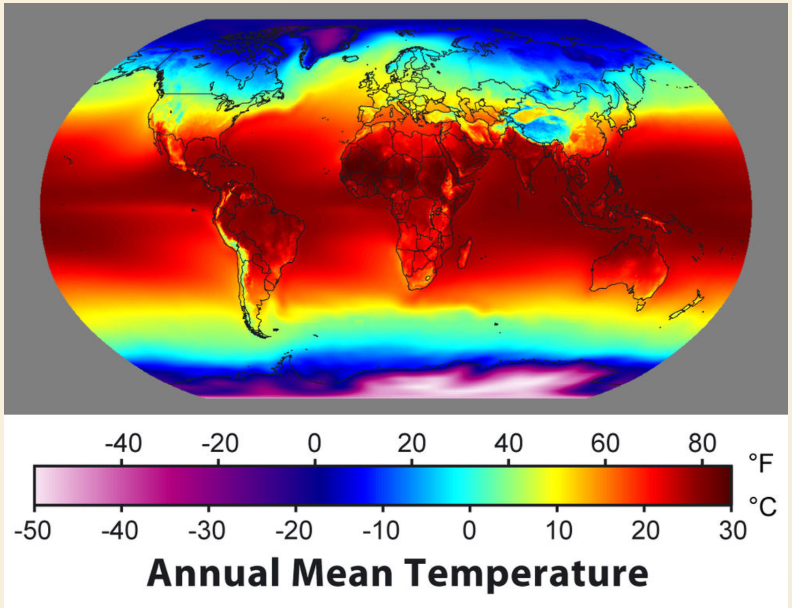
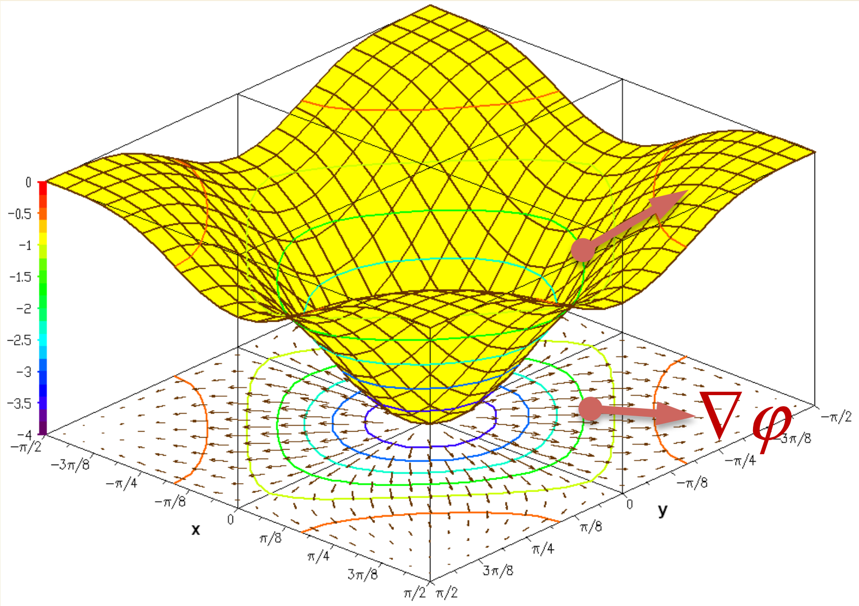
标量场

- 数学上，标量场可以认为是一个标量函数 $\varphi(\vec{r})=\varphi(x,y,z)$，即在空间每一点都指定了唯一的一个标量 (一个数)
  - 例如温度场 $T(x,y,z)$
  - 哪个方向增加最快？(梯度)

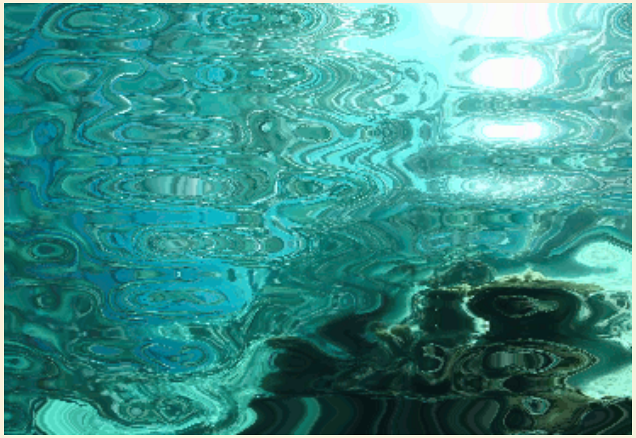




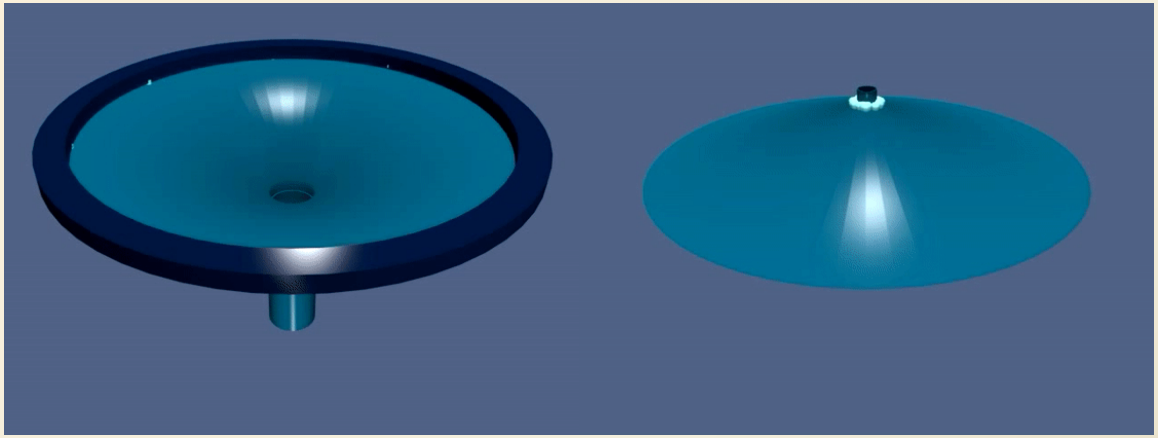
矢量场

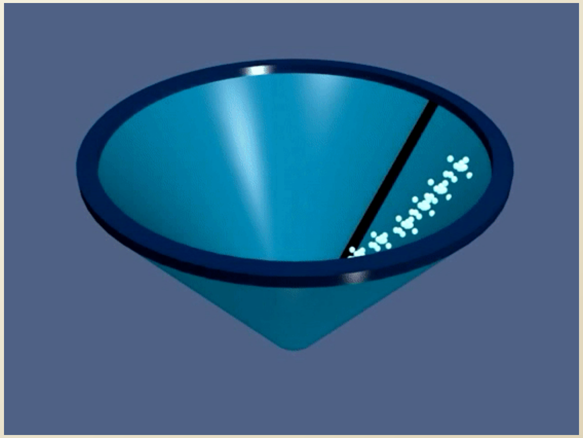
- 数学上，矢量场可以认为是一个矢量函数 $\vec{F}\left(\vec{r}\right)=\vec{F}\left(x,y,z\right)$

即在空间每一点都指定了唯一的一个矢量 (一个箭头)



- 例如速度场 $\vec{v}\left(x,y,z\right)$
- 有源否? (散度及通量)
- 有旋否? (旋度及环量)

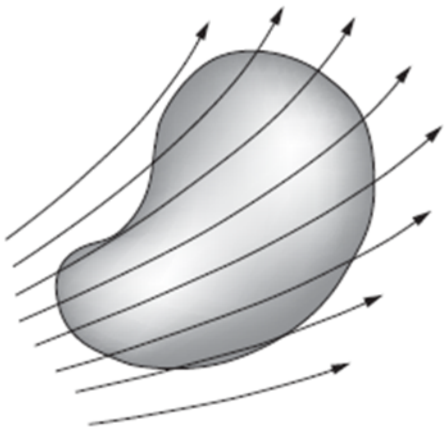




§1.5 高斯定理

J.C.F. Gauss, 1777-1855

1839年，Gauss发表重要论文《关于与距离的平方成反比的吸引力或排斥力的普遍定理》，严格证明了Poisson方程，并给出静电学Gauss定理。



$$\begin{cases} \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{内}}/\varepsilon_0 \\ \text{或}\quad \nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \end{cases}$$

点电荷的电场线

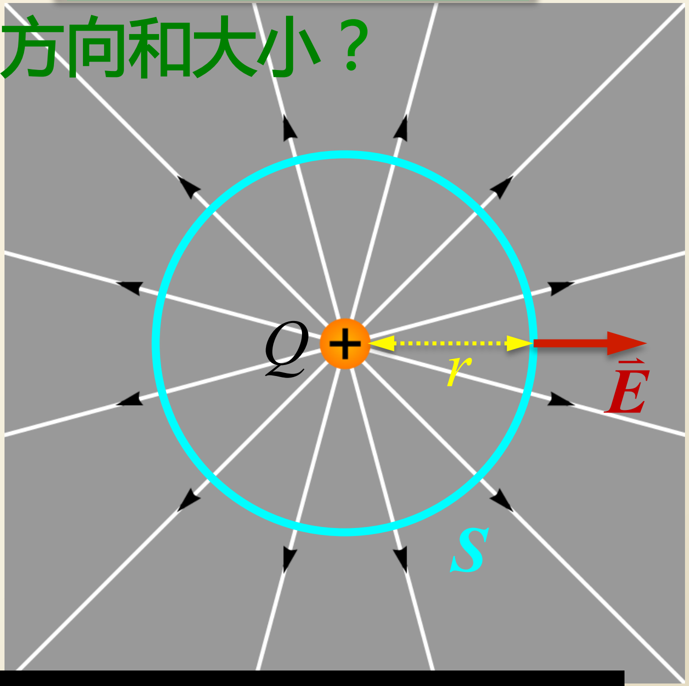
点电荷的电场强度(Coulomb定理)：$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$

问题：如何作电场线才能反应该电场的方向和大小？

- 方向：切向沿着径向 → 直线
- 大小：距离越远，电场线越稀疏
  - 半径为 r 的球面处电场线数密度:

$$n = \frac{N}{S} = \frac{N}{4\pi r^2}$$

  - $n \propto E$ 意味着 N 与 r 无关



点电荷的电场线是起于或止于点电荷的直线，不会中断！

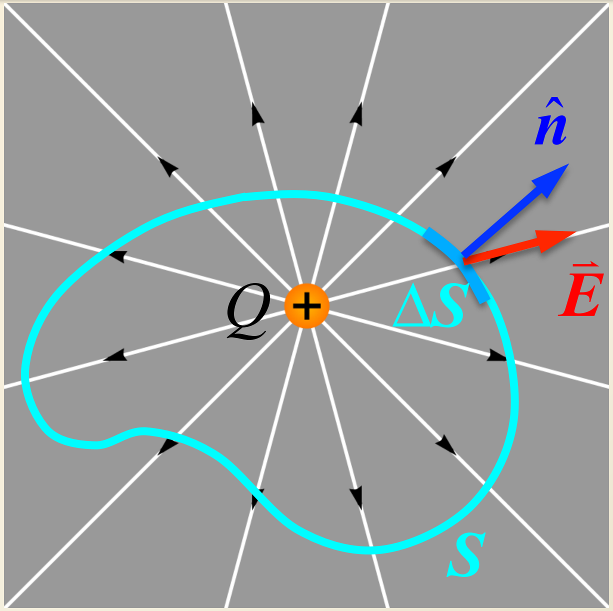
思考：如果点电荷电场不满足平方反比律，此结论还正确吗？

电场线的代数和

■ 穿过任一闭曲面 S 的电场线数目等于穿过每一个面元 ΔS 的电场线数目之和

■ 穿过 ΔS 的电场线数目：

$$n\Delta S_{\perp} = n\Delta S\left|\cos\theta\right|$$



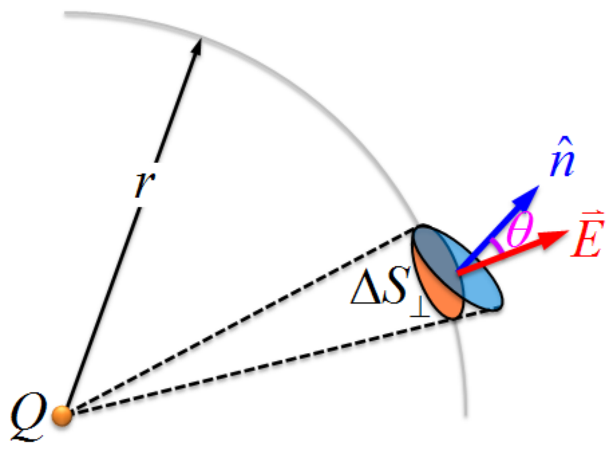
■ 定义面积矢量 $\Delta\vec{S} \equiv \hat{n}\Delta S$

约定：对闭曲面，以外法向为正

■ 穿过闭曲面 S 的电场线代数和：

$$N = \iint_S dN \quad \text{where } \Delta N = n\Delta S\cos\theta$$

约定：电场线穿出为正，穿入为负



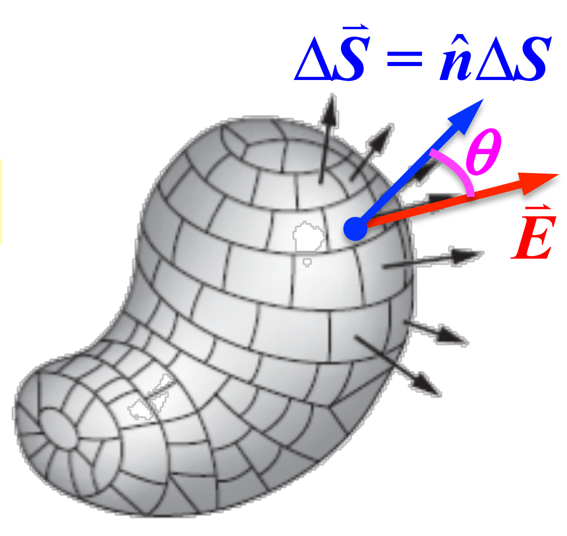
电通量

- 每一点处电场线的数密度正比于该点处电场的大小

$$n(\vec{r}) \propto E(\vec{r}) = \left|\vec{E}(\vec{r})\right|$$

$$\Rightarrow \Delta N = n\Delta S\cos\theta \propto E\Delta S\cos\theta = \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}$$

$$\Rightarrow N = \oiint_S dN \propto \boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

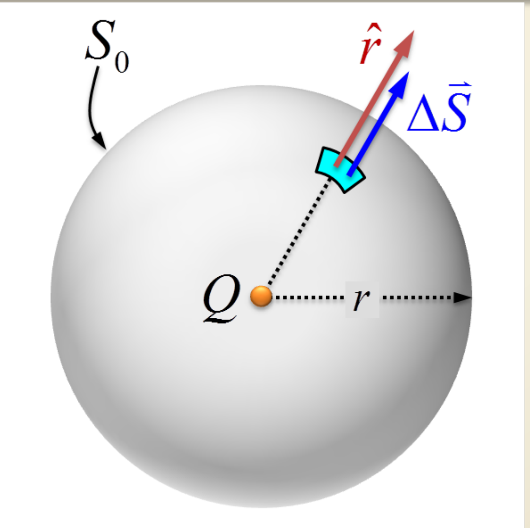


- 穿过闭曲面 S 的**电通量**：$\boxed{\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$

- 穿过任一闭曲面的电场线数目正比于穿过该闭曲面的电通量
  - 闭曲面以外法向作为面元的正方向
  - 电场线穿出为正，穿入为负
  - 点电荷的电场线是起/止于该点电荷的直线，不会中断

点电荷的电通量

点电荷的电场强度： $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{r}$



- S_0：以点电荷 Q 为中心、半径为 r 的球面

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E_r\, dS = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

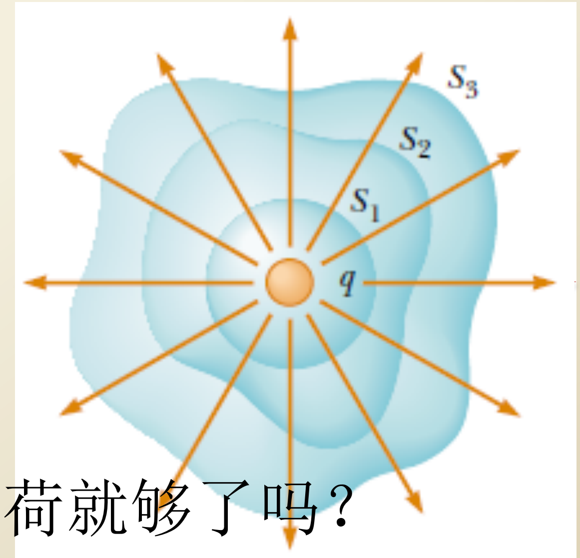
- S：任一将 Q 包含在内的闭曲面

∵ 点电荷的电场线不中断

∴ 穿过 S 和 S_0 的电场线数目相同

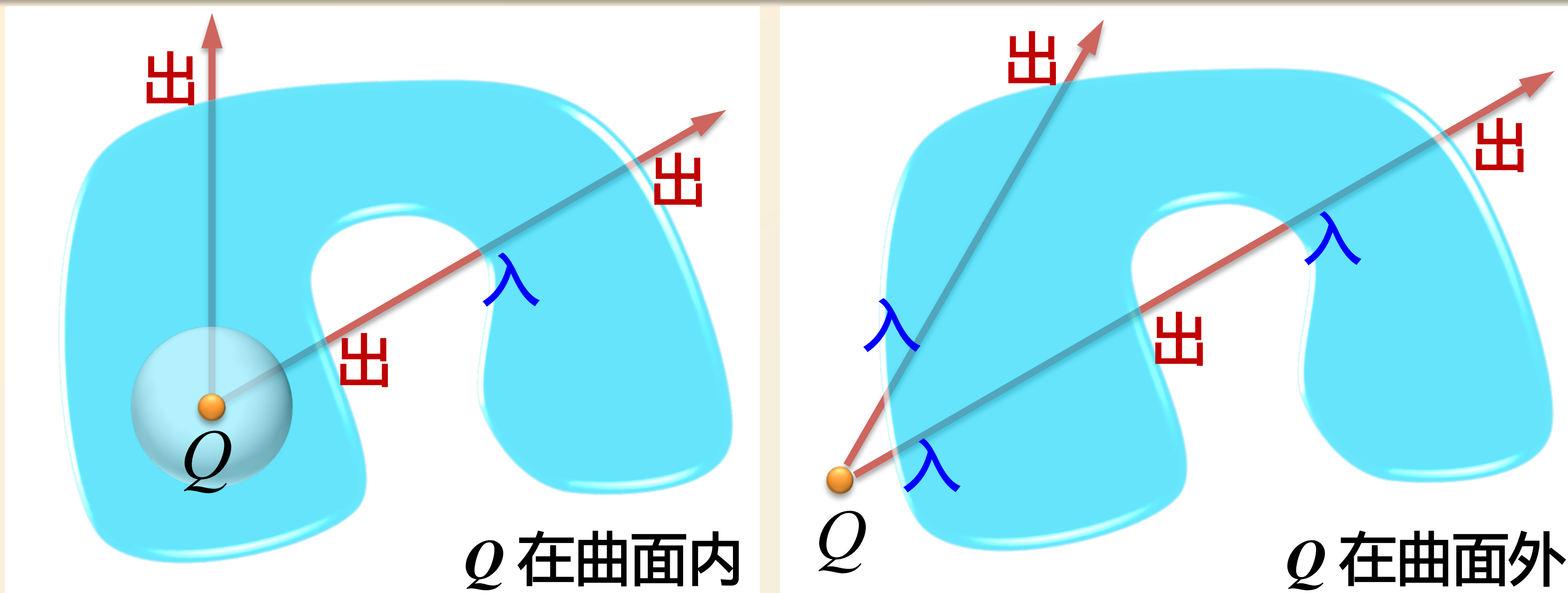
∵ $\Phi_E \propto N$ (电场线代数和)

∴ $\boxed{\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}}$



思考：只关心点电荷就够了吗？

点电荷的电通量续



■ 点电荷 Q 穿过任一闭曲面 S 的电通量

$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} Q/\varepsilon_0, & Q \text{ 在 } S \text{ 内部} \\ 0, & Q \text{ 在 } S \text{ 外部} \end{cases}$$

用来计算通量的闭曲面通常称为高斯面

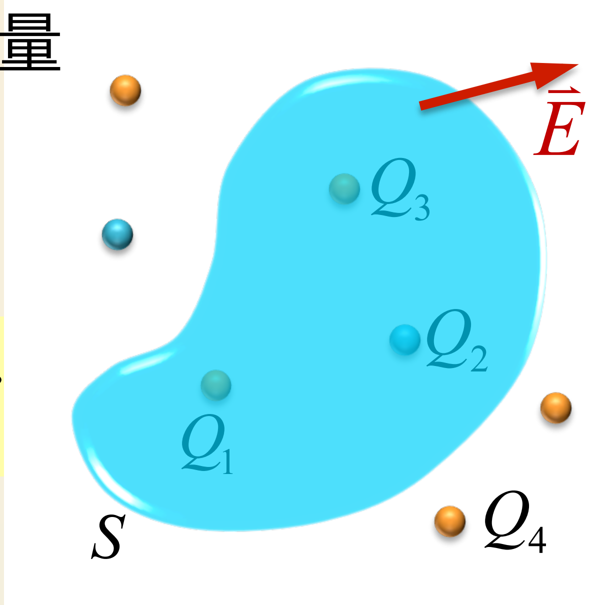
思考：如果点电荷 Q 恰好在 S 上呢？

高斯定理

- 任意电荷分布对于任一闭曲面 S 的电通量
  - 电场满足叠加原理：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \cdots$$



- **高斯定理**

$$\boxed{\text{穿过闭曲面 } S \text{ 的电通量} = \frac{S\text{内包含的电量之和}}{\varepsilon_0}}$$

  - 数学表述：

$$\boxed{\Phi_E \equiv \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon_0}}$$

高斯面上的场与电荷

- 高斯定理中的电场是**总电场** (高斯面内、外电荷共同贡献)，尽管……
- 高斯面是数学上的某个闭曲面
  - 点电荷在高斯面上?
    - 点电荷概念失去了依据
  - 点电荷不能在高斯面上
  - 有限长度的线电荷不能在高斯面上
  - 有限面积的面电荷不能在高斯面上

高斯面上不能有有限电荷的分布

高斯定理与库仑定律

- **高斯定理是库仑定律的推论**
  - 高斯定理主要反映了库仑定律的平方反比律：
    - 如果 $E \propto 1/r^{2+\delta}$，电通量不仅与高斯面和电荷的相对位置有关，还与高斯面的大小、形状有关。

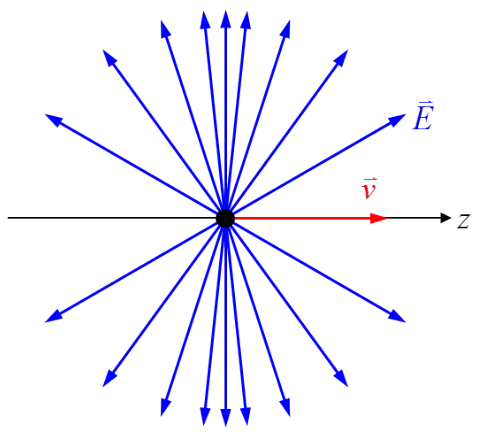
$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{\text{closed}} \frac{\hat{r}}{r^{2+\delta}}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^{2+\delta}}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^{\delta}} = \Phi(r)$$

  - 高斯定理的正确性是证明库仑定律中平方反比律的一种间接方法，可获得非常高的精度。

- **高斯定理比库仑定律更普适**
  - 适用于任意电场

(运动电荷产生的电场、涡旋电场等)

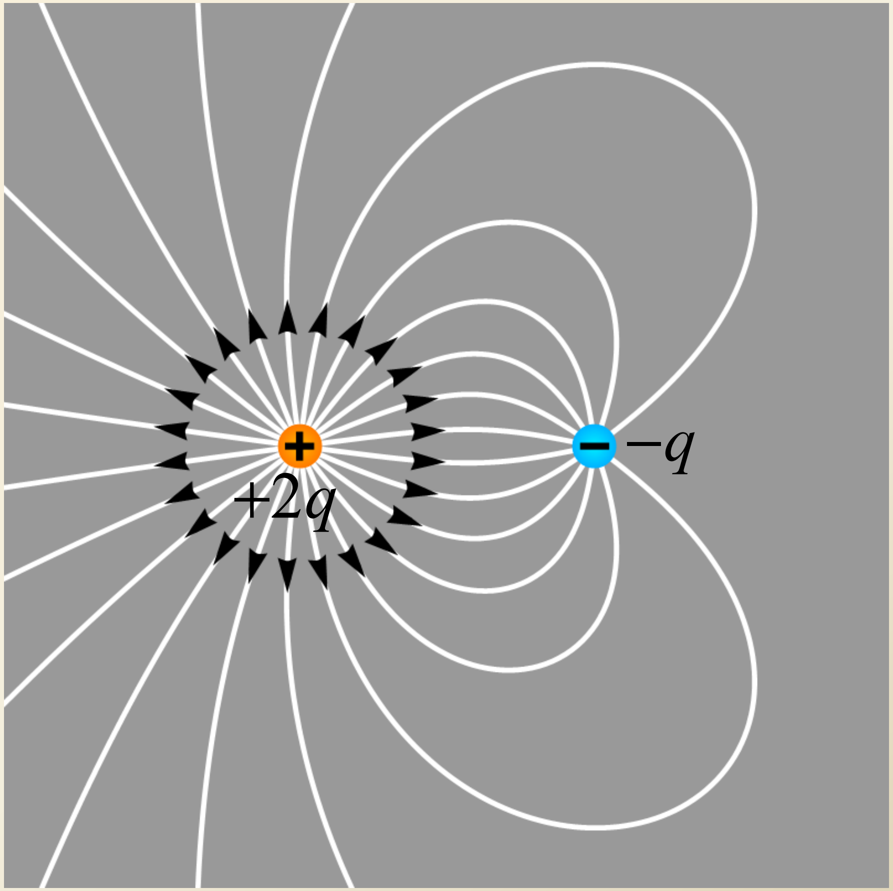
$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$



场与源

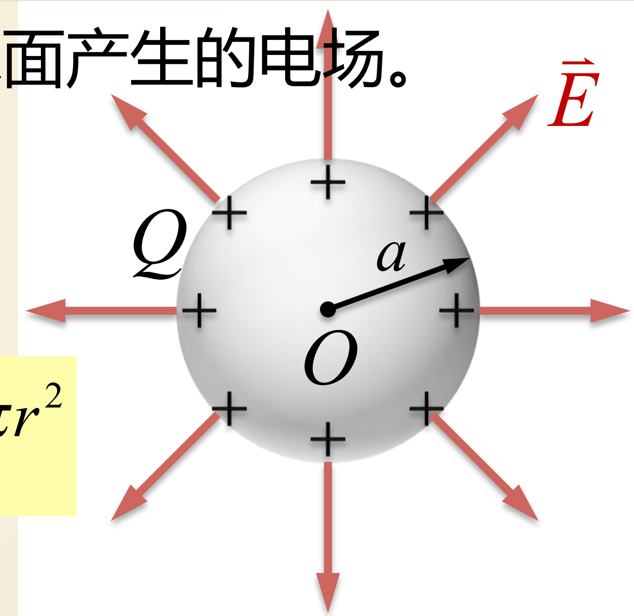
- 高斯定理意味着**静电场是有源场**
  - 正电荷是静电场的源，负电荷是静电场的汇
  - 对于点电荷系统，电荷发出或接收的电场线数目(代数和)与其电量成正比。

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=\frac{Q_1}{Q_2}$$



均匀带电球面的电场

例：求电量为 Q、半径为 a 的均匀带电球面产生的电场。



■ 对称性 ⟹ $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$

■ 选择半径为 r 的同心球面作为高斯面

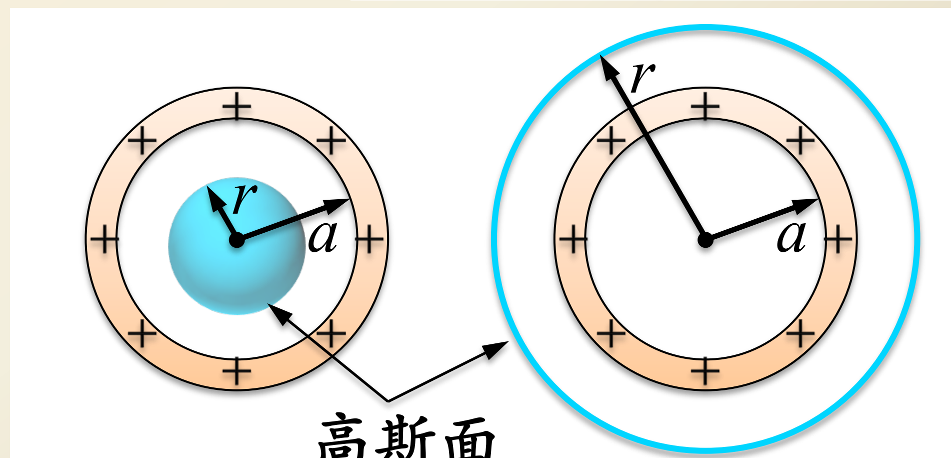
$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint\!\!\oint_S E_r\, dS = E_r \oint\!\!\oint_S dS = E_r 4\pi r^2$$

■ 如果 $r<a$，那么 $Q_{内} = 0$

⟹ $E_r = 0$

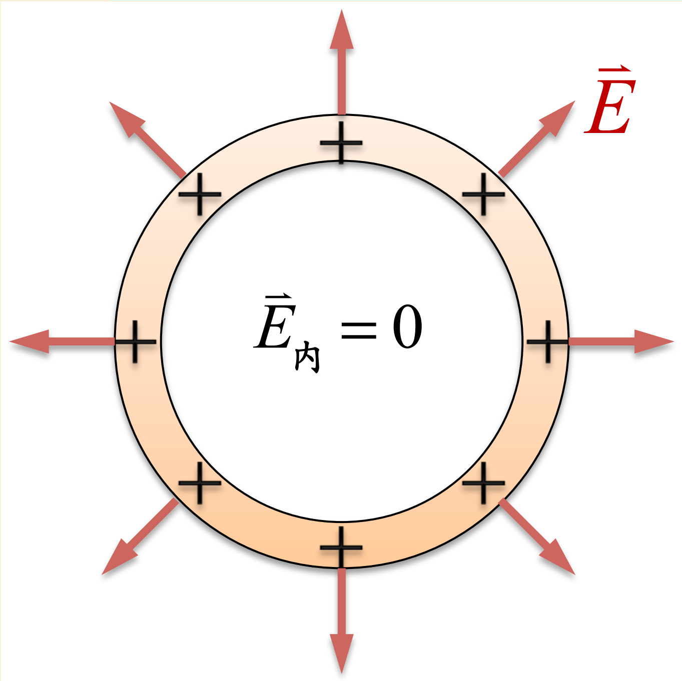
■ 如果 $r>a$，那么 $Q_{内} = Q$

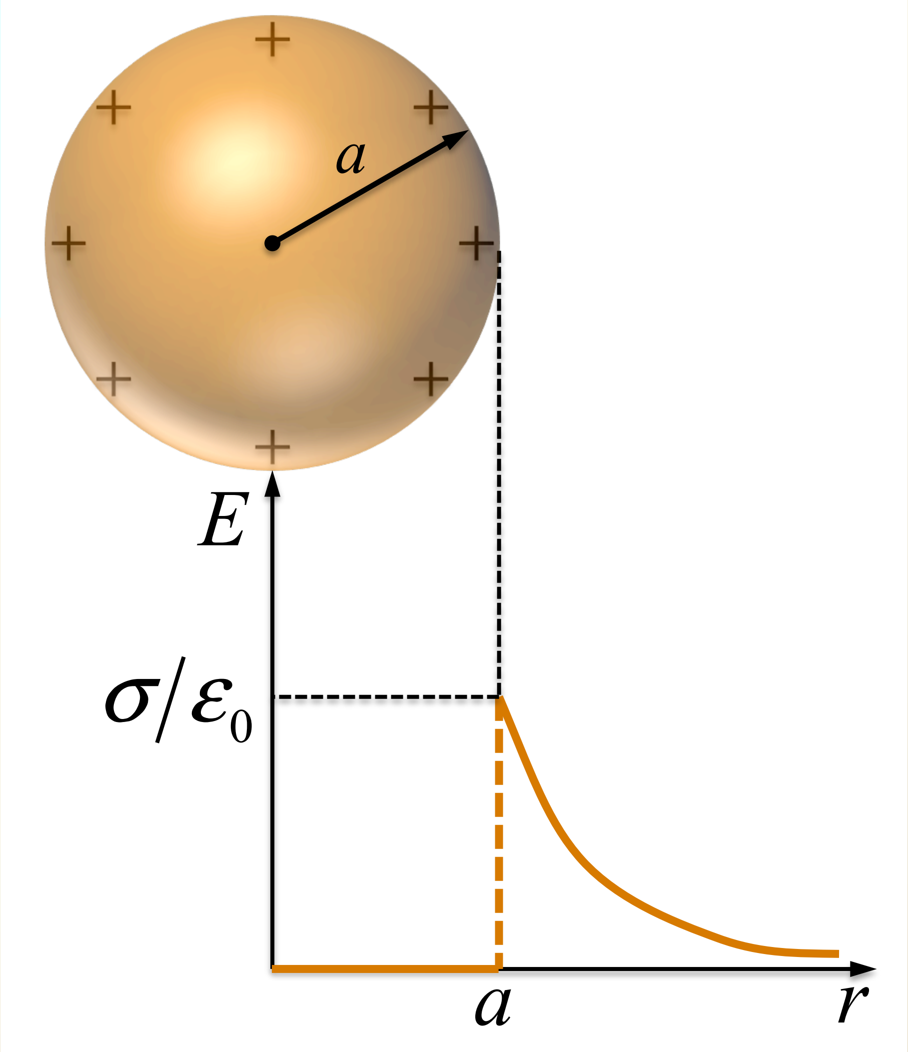
⟹ $E_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



均匀带电球面的电场

■ 结论 $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & (r>a)\\ 0 & (r<a)\end{cases}$





均匀带电球体的电场

例：求电量为 Q、半径为 a 的均匀带电球面产生的电场。

- 对称性 ⟹ $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$
- 选择半径为 r 的同心球面作为高斯面

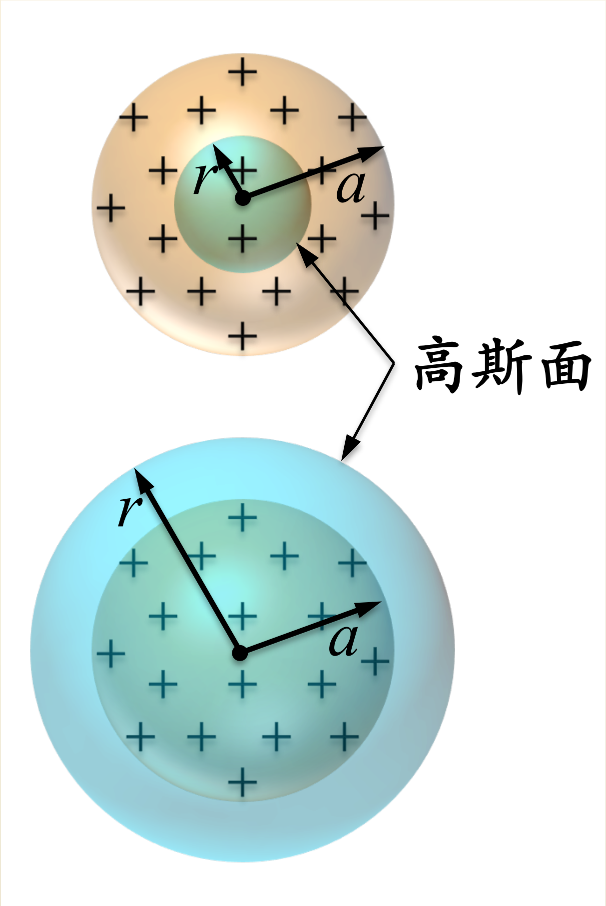
$$\Phi = E_r 4\pi r^2$$

- **如果 $r<a$，那么** $Q_{内} = \left(r^3/a^3\right)Q$

$$\Rightarrow E_r = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

- **如果 $r>a$，那么** $Q_{内} = Q$

$$\Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



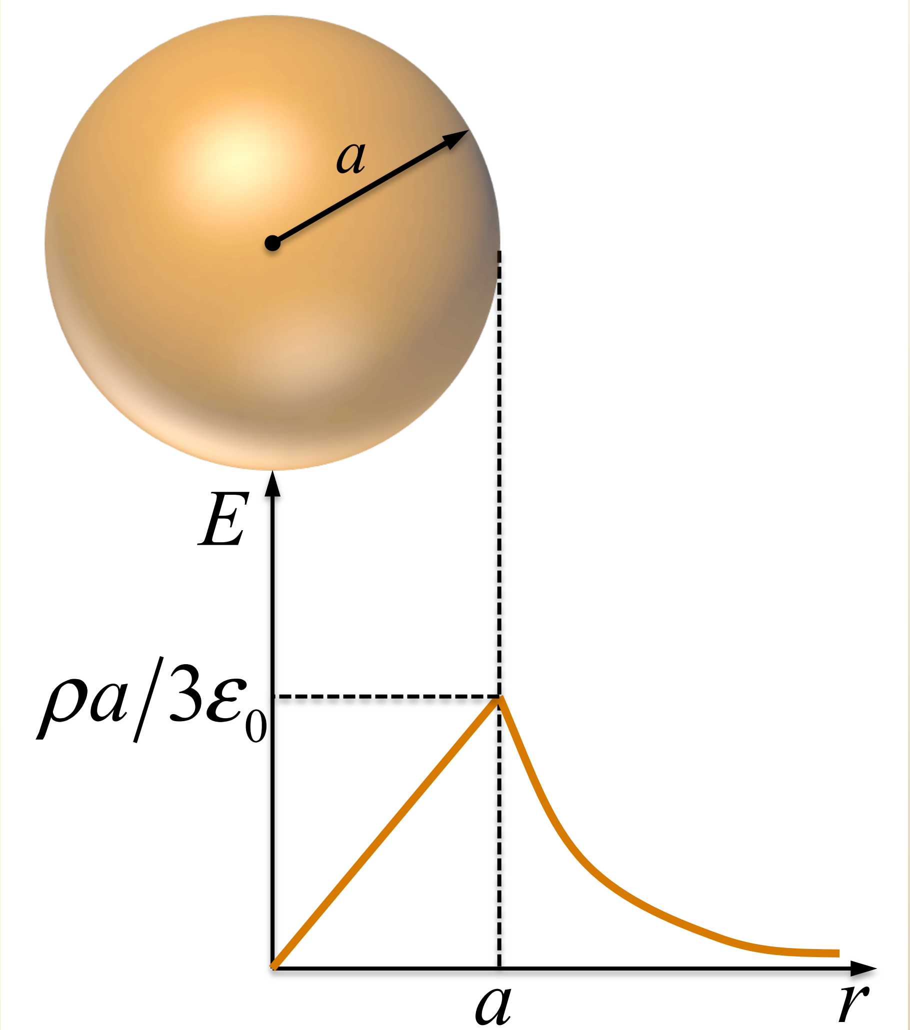
均匀带电球体的电场

■ 结论：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & (r>a)\\[2ex] \dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, & (r<a)\end{cases}$$

或者

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^3}\vec{r}, & (r>a)\\[2ex] \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}, & (r<a)\end{cases}$$



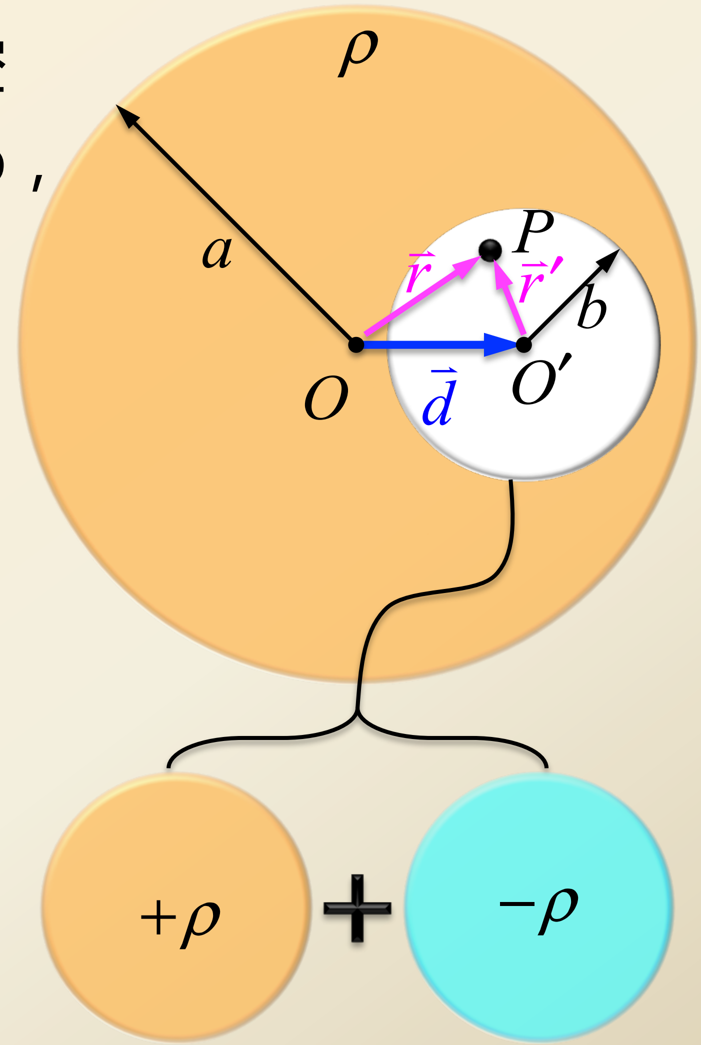
均匀带电球体中的球形空腔

- 求均匀带电球体中所挖出的球形空腔中的电场强度。球体电荷密度为ρ，球体球心到空腔中心的距离为 d。
- 视空腔为电荷密度为＋ρ 和–ρ的两个带电实心球的叠加。

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) = \frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0}$$

空腔内的场均匀，与球体中心和空腔中心的连线平行！

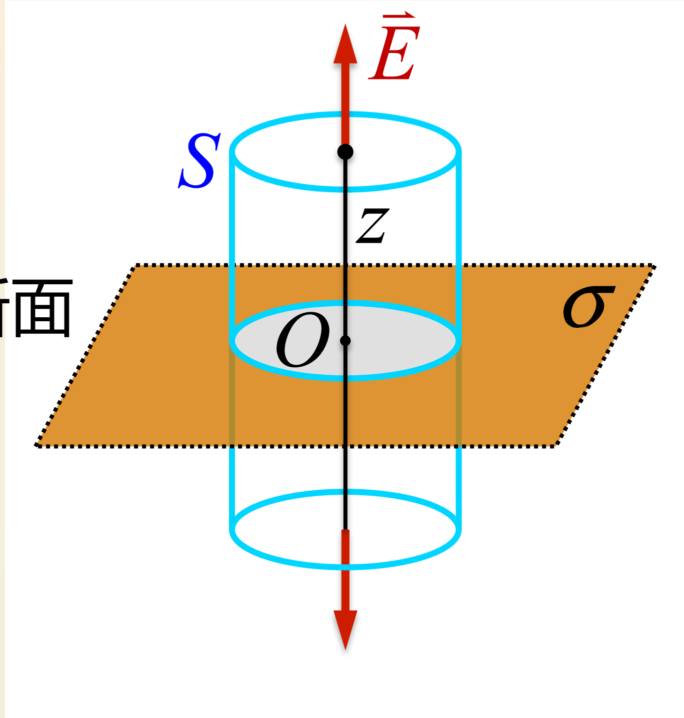


无限大均匀带电平面的电场

■ 对称性 → WHY？

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{z}$$
$$\text{and}\quad E(-z) = -E(z)$$

■ 选择底面积 A、高 $2z$ 的柱面作为高斯面



$$\Phi = \Phi_{上} + \Phi_{下} + \Phi_{侧}$$
$$= AE(z) + AE(z) + 0$$

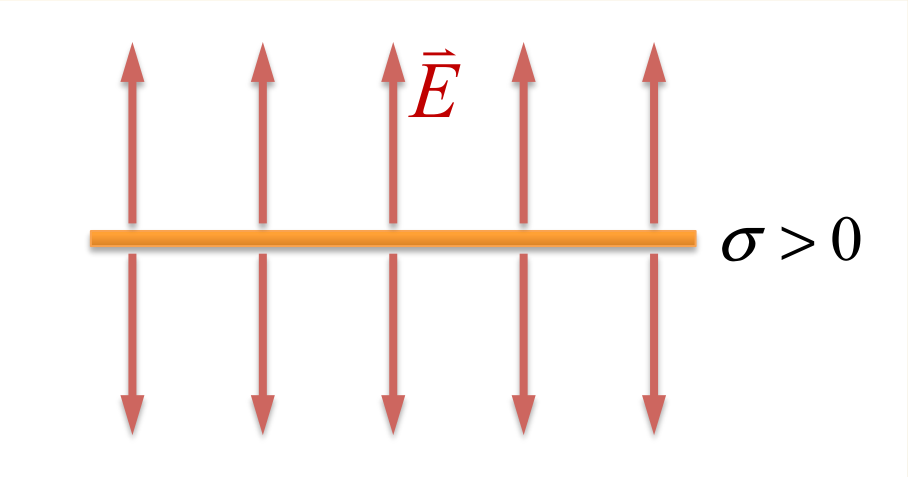
$$\Rightarrow\quad 2AE(z) = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

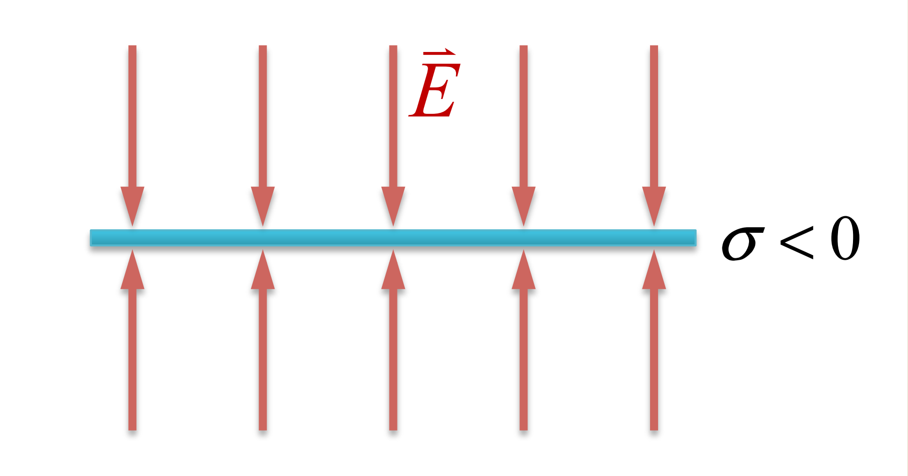
$$\Rightarrow\quad E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

无限大均匀带电平面的电场

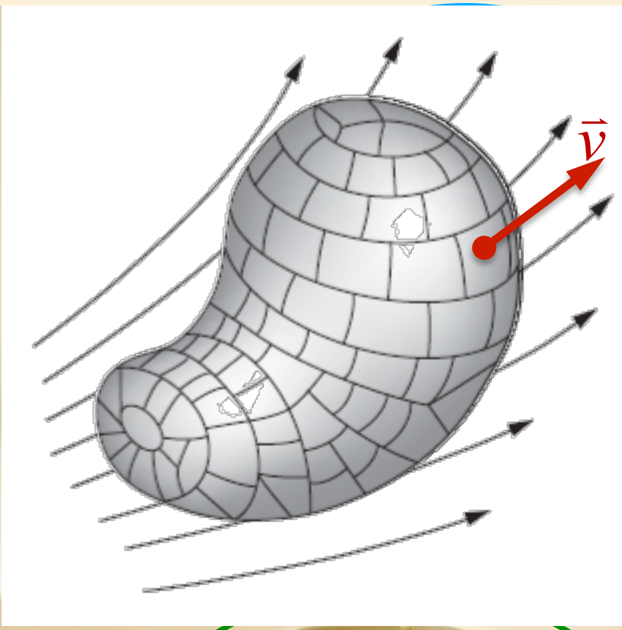
- 结论：

$$\vec{E}=\begin{cases}+\hat{z}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & (z>0)\\ -\hat{z}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & (z<0)\end{cases}$$





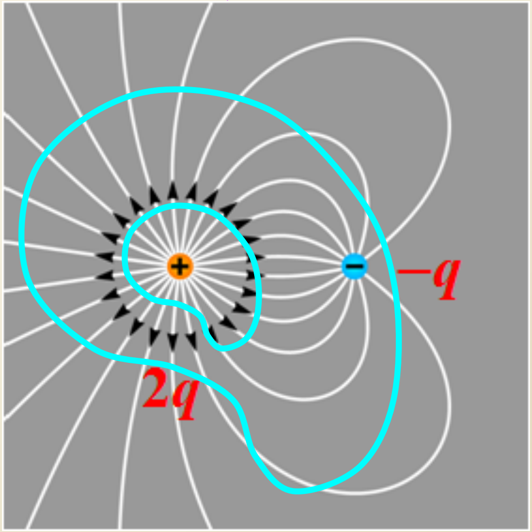
源与汇



- **水流通量**：单位时间多少体积的水通过闭曲面流出去？

$$\Phi_v \equiv \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- 对于闭曲面，以外法向为面元方向
- 源($\Phi_v > 0$)、汇($\Phi_v < 0$)



- 高斯定理意味着静电场是有源场

汇

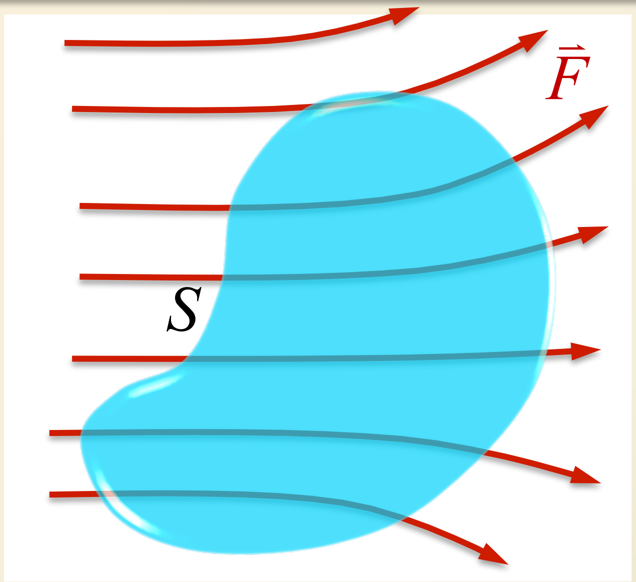
- 电荷发出/接受的电力线数目与其电量成正比
- 高斯定理是一个通量定理

思考：如何确定源的位置？

矢量场的通量

- 对于任意矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 穿过闭曲面 *S* 的通量定义为

$$\Phi_F \equiv \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$



- $\Phi_F>0$：*S* 内有 *F* 的源
  $\Phi_F<0$：*S* 内有 *F* 的汇

- 若对任意闭曲面均有 $\Phi_F=0$，则称 *F* 为无源场；只要存在一个闭曲面使得 $\Phi_F\neq 0$，则称 *F* 为有源场。

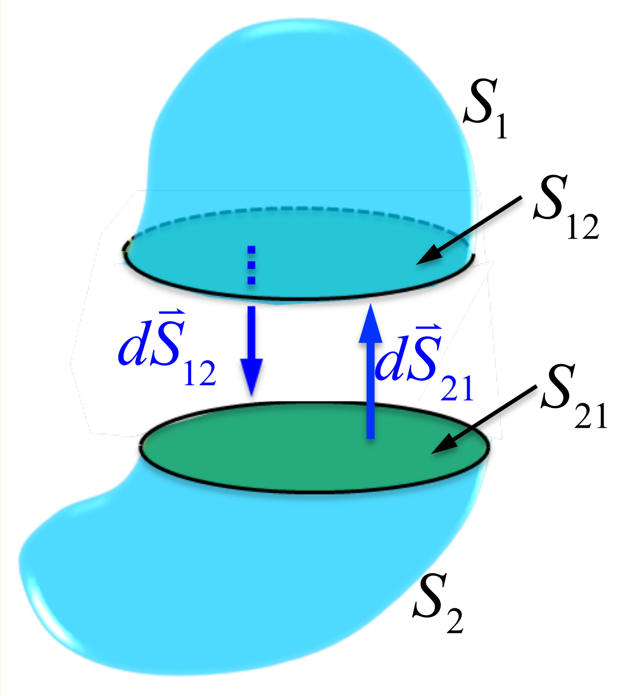
问题：如何计算 *F* 穿过 *S* 的通量？

答案：面积积分或者……

散度定理

- 将 S 所围区域切割为边界分别为 S_1 和 S_1 的两个区域

$$\Phi = \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1-S_{12}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2-S_{12}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$
$$= \oiint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_{12}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_{21}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$
$$= \oiint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2$$



- 将 S 切割成更多的小块

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}\Phi_i = \sum_{i=1}^{N}\oiint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} V_i \frac{\oiint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S}}{V_i}$$

- 矢量场 $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ 的**散度**定义为

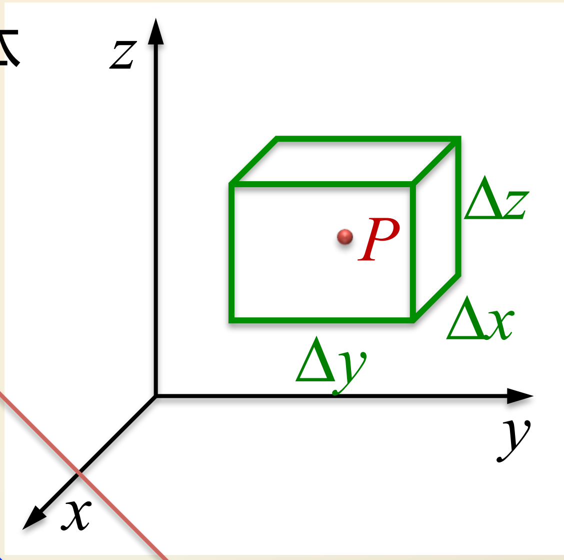
$$\nabla\cdot\vec{F} \equiv \lim_{V\to 0}\frac{\oiint_{S=\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S}}{V}$$

$$\boxed{\oiint_{S=\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV}$$

散度定理
(高斯定理)

直角坐标系下的散度

- 考察中心在 **P = (x, y, z)** 点的无限小长方体



$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{x-axis}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{y-axis}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{z-axis}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$= \Delta y\Delta z\left[F_x\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)-F_x\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\right]$$

$$+\Delta z\Delta x\left[F_y\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)-F_y\left(x,y-\frac{\Delta y}{2},z\right)\right]$$

$$+\Delta x\Delta y\left[F_z\left(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}\right)-F_z\left(x,y,z-\frac{\Delta z}{2}\right)\right]$$

$$\left(\Delta x\Delta y\Delta z\right)\frac{\partial F_x}{\partial x}$$

$$\left(\Delta x\Delta y\Delta z\right)\frac{\partial F_y}{\partial y}$$

$$\left(\Delta x\Delta y\Delta z\right)\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- 当 **Δx→0、Δy→0 、Δz→0** 时

$$\nabla\cdot\vec{F} \equiv \lim_{V\to 0}\frac{\oiint_{S=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}}{V} = \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

高斯定理的微分表述

- 直接利用散度定理

$$\begin{cases} \oiint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}\,dV \\ \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dV \end{cases} \Rightarrow \iiint_V \left(\nabla\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)dV = 0$$

- 此结论对于任意 V 均成立

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

  - 第一个麦克斯韦方程
  - 静电场是有源场，正电荷为源、负电荷为汇
  - 给定 E，此式可以得到电荷分布 ρ

微分形式高斯定理的应用

- 试求产生如下电场的电荷分布：

$$\vec{E}=\frac{K}{3\varepsilon_0}\vec{r}\quad \text{for } r<a \quad \text{and} \quad \vec{E}=\frac{Ka^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\quad \text{for } r>a$$

- 迪卡尔坐标系下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}-3\frac{x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\begin{cases}\dfrac{K}{\varepsilon_0}, & (r<a)\\ 0, & (r>a)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 电荷密度为 ***K***、半径为 ***a*** 的均匀带电球体

梯度算子(复习)

- 定义**梯度算子** $\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$
- 性质：
  - **It looks like a vector.**
  - **It works like a vector.**
  - **It's an operator.**

$$f\vec{A}=\vec{A}f$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{matrix}\hat{x}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\\+\hat{y}\left(A_zB_x-A_zB_x\right)\\+\hat{z}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\end{matrix}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

- 可以作用于标量及矢量函数上
  - 作用于标量函数：　梯度 ∇f → 矢量
  - 点乘作用于矢量函数：　散度 $\nabla\cdot\vec{F}$ → 标量
  - 叉乘作用于矢量函数：　旋度 $\nabla\times\vec{F}$ → 矢量

梯度算子

■ 应用：

$$(1),\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)=\left(\frac{-3}{r^4}\right)\vec{\nabla}(r)=-\frac{3}{r^4}\hat{r}$$

$$(2),\vec{\nabla}\bullet\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=???$$

$$=\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{r}\right)\left(\frac{1}{r^3}\right)+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\bullet\vec{r}$$

$$=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^4}\hat{r}\bullet\vec{r}=0$$

■ 求产生如下电场的电荷分布

$$\vec{E}=\frac{K}{3\varepsilon_0}\vec{r}\qquad \text{for } r<a$$

$$=\frac{Ka^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\qquad \text{for } r>a$$

解：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{K}{\varepsilon_0}, & (r<a)\\ 0, & (r>a)\end{cases}$$

高斯定理小结

- 积分形式的高斯定理 $\oiint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{Q_{\text{tot}}}{\varepsilon_0}$
  - 给定 Q 分布 $\to E$
    - Coulomb 定理＋叠加原理(求和或积分)
    - 高斯定理 (对称电荷分布)

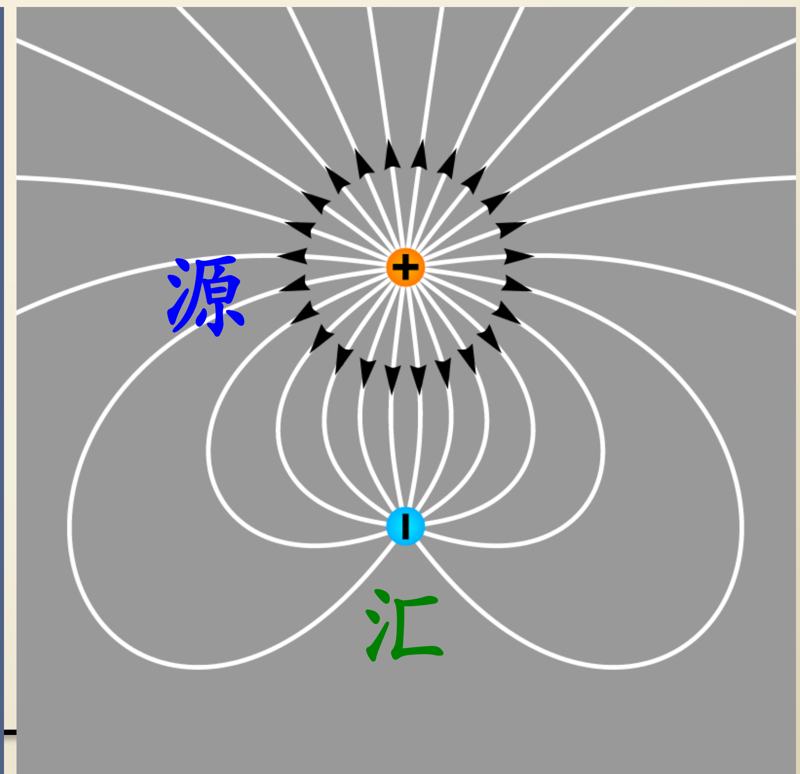
      对称性确定 E 方向 (对称性的本质是叠加原理)

      高斯定理确定 E 大小
- 微分形式的高斯定理 $\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
  - 给定 $E\to$ 电荷分布 ρ
- 散度定理(数学高斯定理) $\oiint\limits_{S=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

高斯定理的讨论

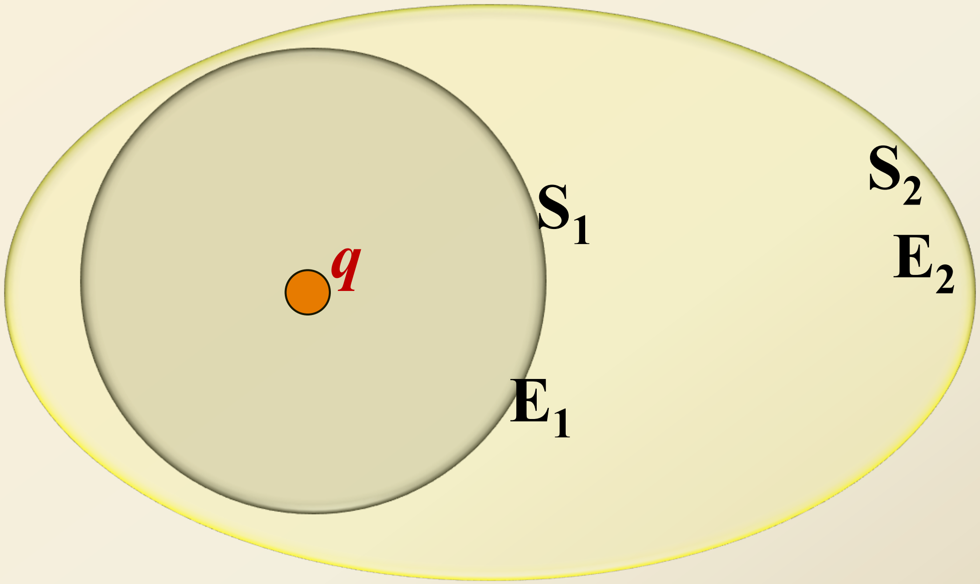
- 高斯定理表明是静电场是有源场

  高斯定理给出了场和场源的一种联系，这种联系是场强对封闭曲面的通量与场源间的联系，并非场强本身与源的联系。电荷是静电场的源.



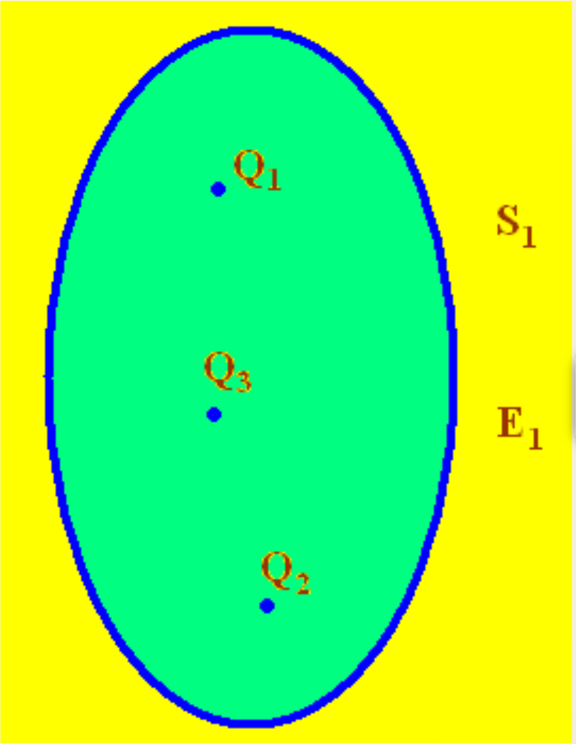
高斯定理中的E问题

高斯定理中的E是全部电荷所产生的E，而不管这电荷是在曲面内部或在曲面外部。同一高斯面上的E可能相同，也可能不同，因为高斯面是任意选取的。

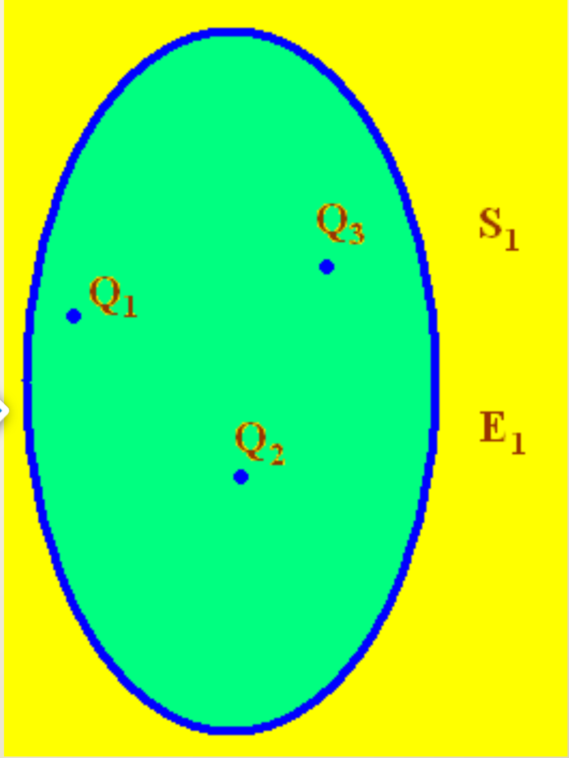


高斯定理表明的只是电通量和电荷的关系

如果在高斯面内部或外部电荷分布发生改变，则空间电场分布将发生变化，高斯面上的电场也会发生变化，但只要内部总电荷数不变，高斯定理指出，电场对该封闭曲面的电通量并无变化。



$$\Phi_1 = \Phi_2$$



高斯定理来源于库仑定律

高斯定理是静电场的一条重要基本定理，它是从库仑定律导出来的。它主要反映了库仑定律的平方反比律、径向性、球对称性及叠加性。如果库仑定律不服从平方反比律，我们就不可能得到高斯定理．

高斯定理比库仑定律更普遍

高斯定理是库仑定律为基础导出的，但其使用范围远远超出静电场。运动点电荷由于在运动方向上的特殊性，破坏了球对称性，匀速运动的点电荷的场为：

$$\vec{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\hat{r}$$

但仍满足高斯定理。

高斯定理≠库仑定律

变化的磁场产生的涡旋电场，在涡旋场中任取一闭合曲面S,

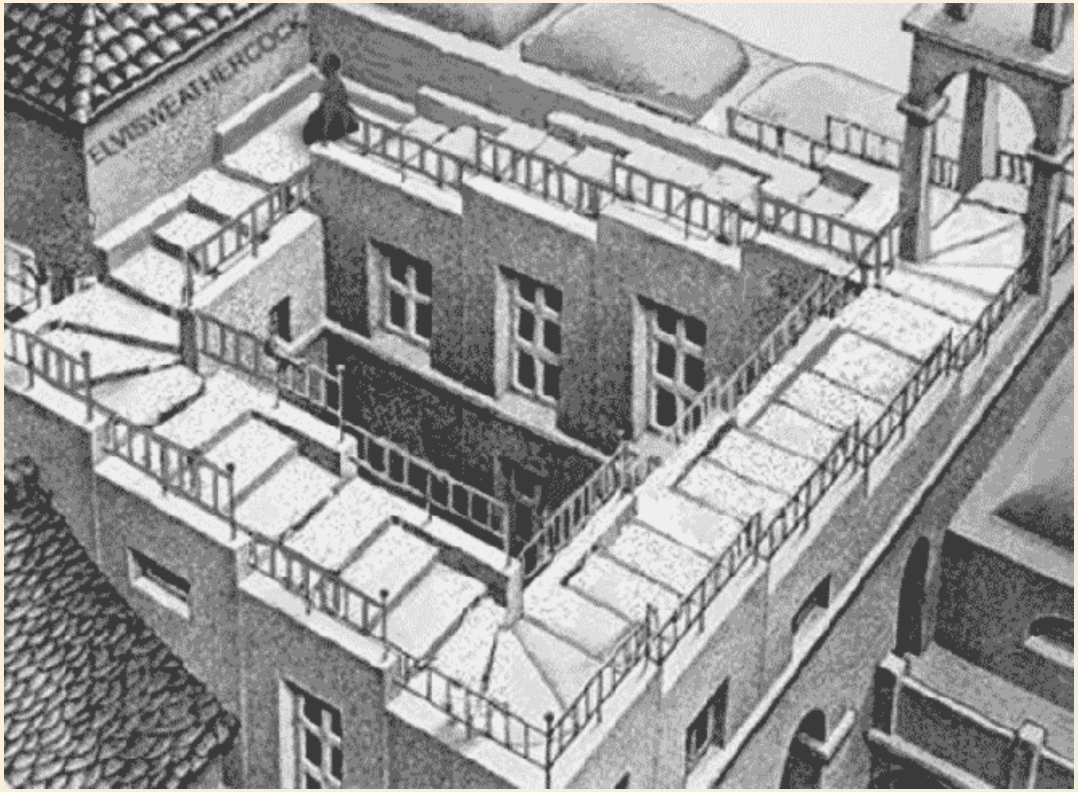
$$\oint\!\!\!\oint_{S} \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{S} = 0$$

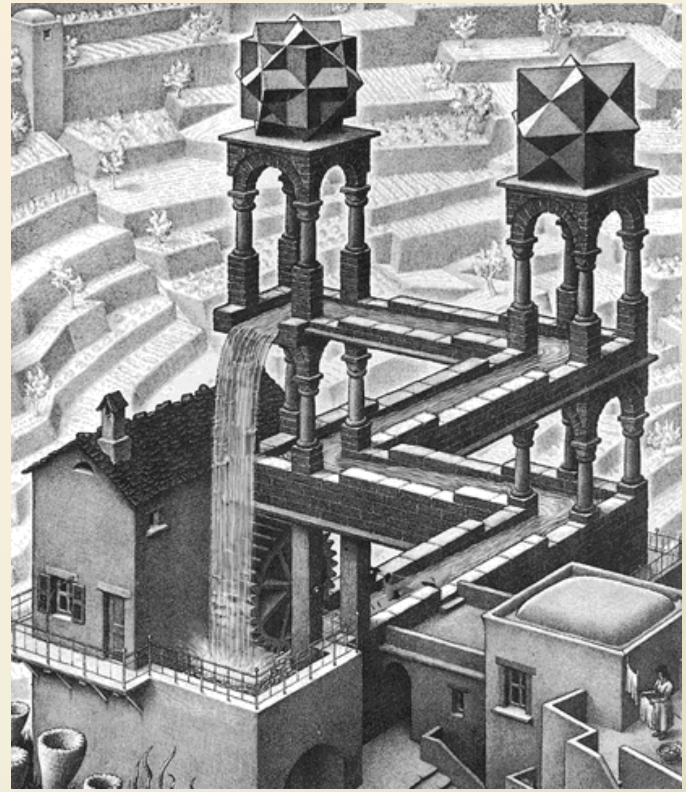
也满足高斯定理，但涡旋电场不具有径向性和球对称性。

认为高斯定理等价于库仑定律，或认为从前者出发可以导出后者的看法是不对的，因为高斯定理并没有反映静电场是有心力场这一特性。

库仑定律不但说明电荷间的相互作用力服从平方反比律，而且说明电荷间的作用力是有心力。因此，在静电范围内，库仑定律比高斯定理包含更多的信息。

§1.6 静电场的环路定理



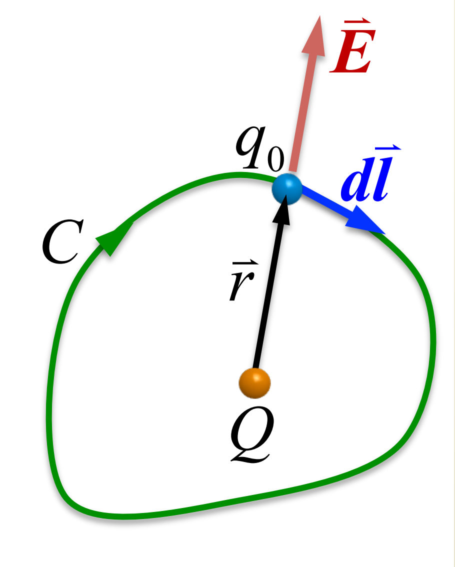


荷兰艺术家 **M.C.Escher（1898-1972）**

静电力是保守力

■ 将 q_0 沿闭合曲线移动一周，其他电荷产生的静电力做多大功？

$$A=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



■ E 由点电荷 Q 产生 $\vec{E}=\dfrac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\Rightarrow A=q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_C\frac{dr}{r^2}=q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_C d\left(-\frac{1}{r}\right)=0$$

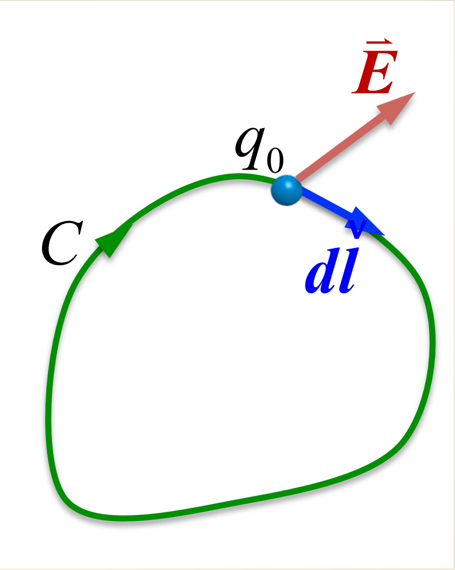
■ E 由带电体产生，由叠加原理 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$

$$\Rightarrow A=q_0\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\oint_C\sum_i \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=q_0\sum_i\oint_C \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=0$$

静电力是保守力！

静电场的环路定理

- 电场沿着闭曲线的**环量** $\Gamma = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$
  - 物理上，移动单位电荷**静电力做功**
  - 数学上，该积分称为**线积分**
  - **线元 dl** 的方向由**回路 C** 的绕行方向决定



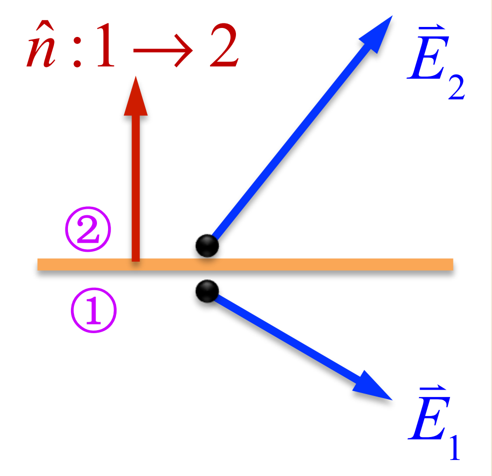
- 静电场的环路定理 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
  - **静电场是无旋场**
  - 静电场的电场线不可能是闭合曲线

(反证法) 如果某条电场线 C 闭合，则沿着该闭曲线

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl \Longrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0 \Longleftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

应用：边值关系

设在某区域有面电荷分布(也可能有体电荷分布，但**没有点电荷，也没有线电荷**)。试求曲面两侧电场的**切向分量**的关系？

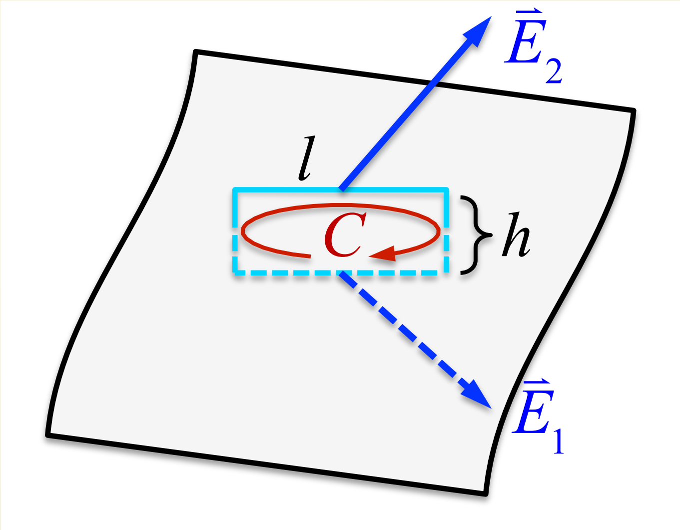


- 回路C：横跨曲面的扁平长方形 $(l \ll a \to 0)$
- 由环路定理可得：

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} \approx \vec{E}_2\cdot\left(l\hat{\tau}\right)+\vec{E}_1\cdot\left(-l\hat{\tau}\right)+\left(Eh\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\tau}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0$$

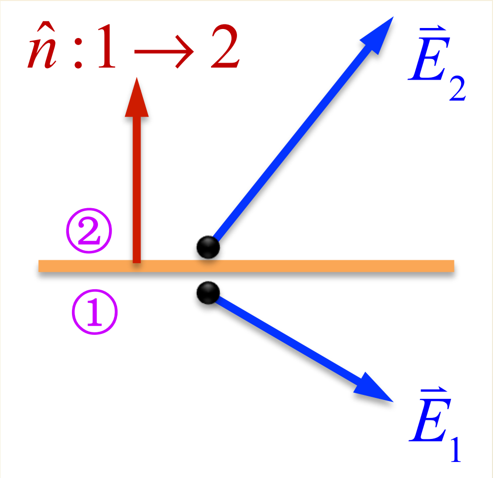
$$\text{or}\quad \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0$$



面电荷两侧电场的切向分量连续

应用：边值关系

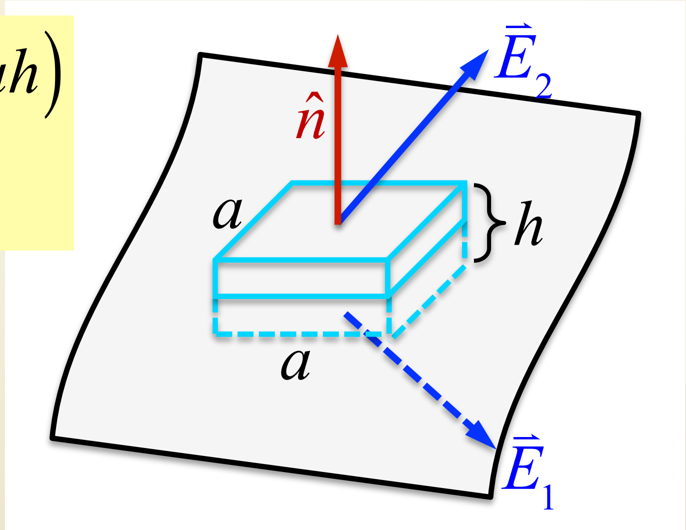
设在某区域有面电荷分布(也可能有体电荷分布，但**没有点电荷，也没有线电荷**)。试求曲面两侧电场的法向分量的关系？



- 高斯面：横跨曲面的扁平盒子 ($h \ll a \rightarrow 0$)
- 由高斯定理可得：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \approx \vec{E}_2\cdot\left(a^2\hat{n}\right)+\vec{E}_1\cdot\left(-a^2\hat{n}\right)+\left(Eah\right)$$

$$Q_{\text{int}} \approx \sigma a^2+\rho a^2 h$$



$$\Rightarrow \quad \hat{n}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

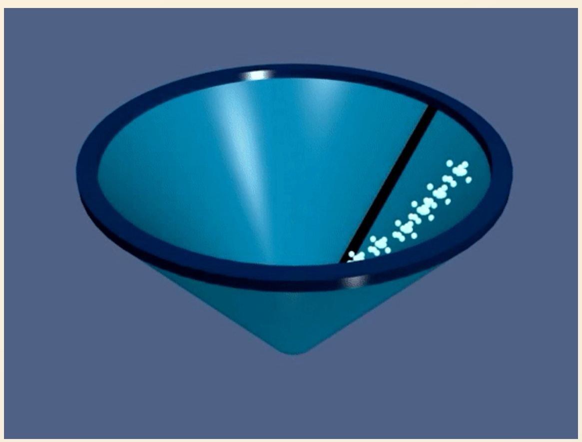
面电荷两侧电场的法向分量不连续

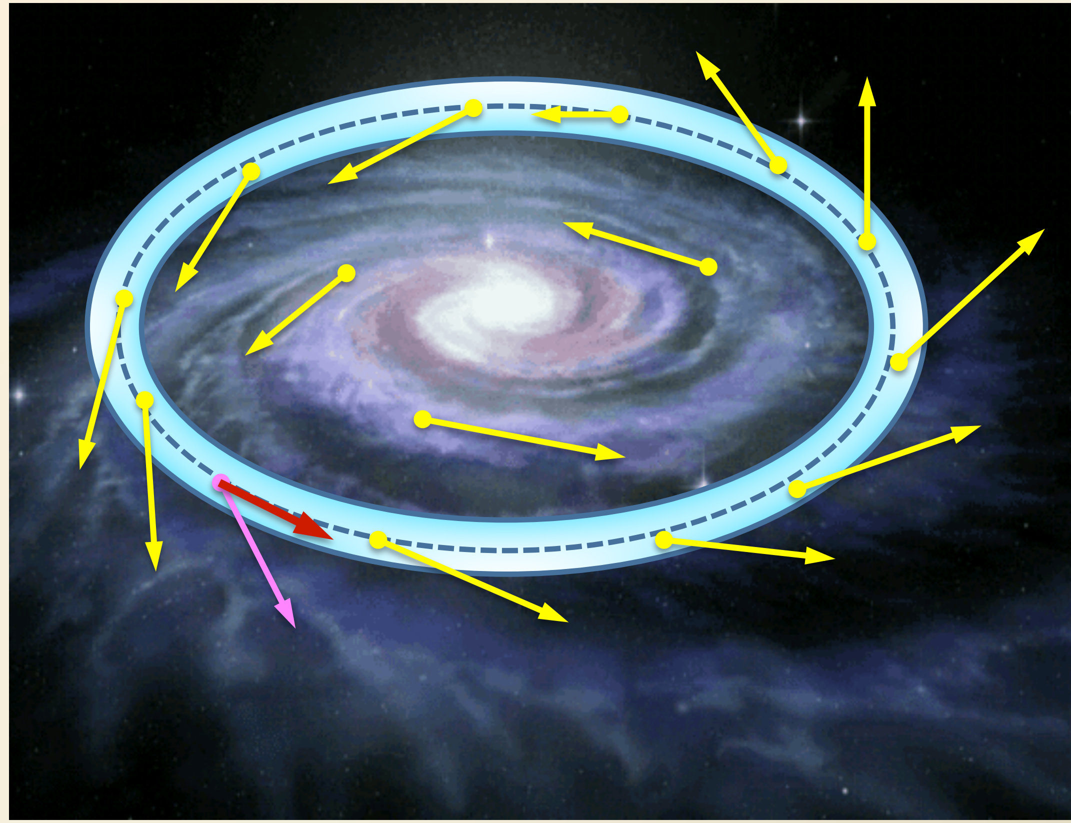
水流的环量与涡旋

- 水流速度场的环量：

$$\Gamma_v = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- 例：$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



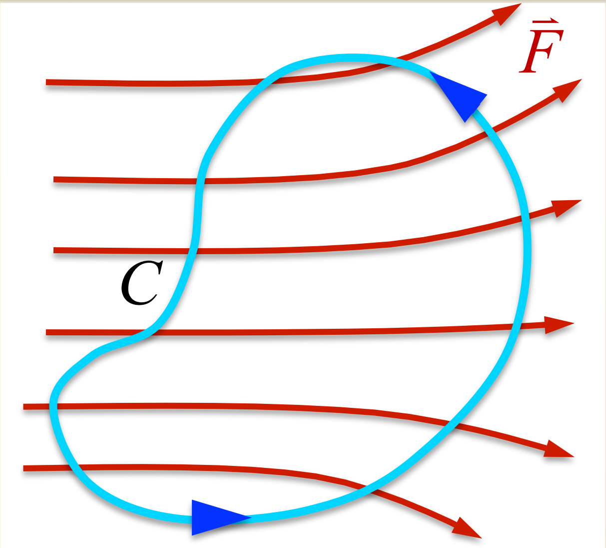


$$\Rightarrow \Gamma_v = v 2\pi R = 2\pi\omega R^2$$

矢量场的环量

- 对于任意矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 其绕着闭曲线 C 的**环量**定义为

$$\Gamma_F=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

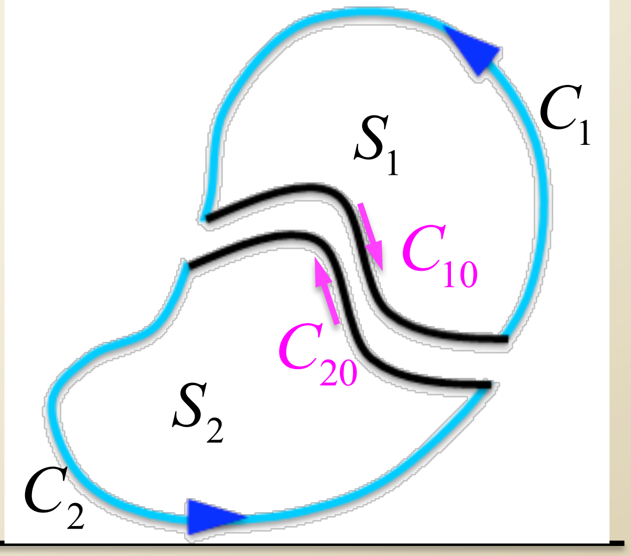


- F 为无旋场：对任意闭曲线 $\Gamma_F=0$

  F 为有旋场：存在一条闭曲线 $\Gamma_F\neq 0$

- 将 C 所围区域切割为边界分别为 C_1 和 C_1 的两个区域

$$\begin{aligned}\Gamma&=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}\\&=\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{l}-\int_{C_{10}}\vec{F}\cdot d\vec{l}+\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}-\int_{C_{20}}\vec{F}\cdot d\vec{l}\\&=\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{l}+\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\Gamma_1+\Gamma_2\end{aligned}$$

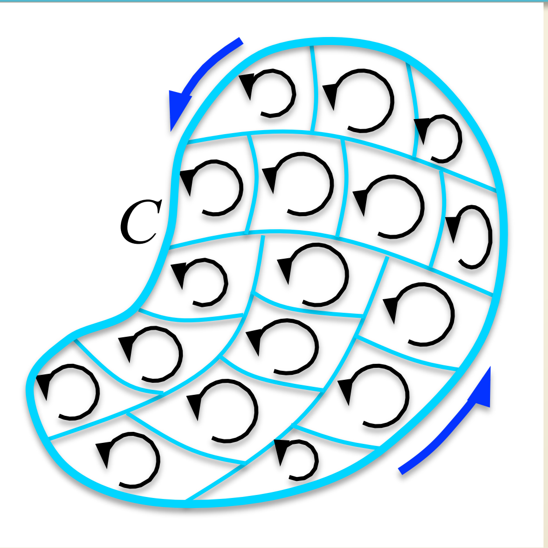


Stokes定理

- 将 C 切割成更多的小块

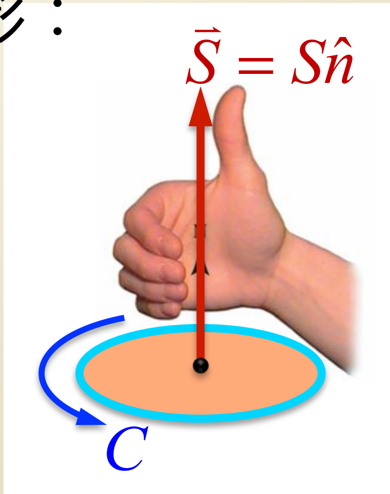
$$\Gamma=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i=\sum_{i=1}^{N}\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{N}S_i\frac{\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{l}}{S_i}$$

  - 约定：面积的法向与其边界的绕行方向满足右手法则



- 矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 的**旋度**在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影：

$$\hat{n}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)\equiv\lim_{S\to 0}\frac{\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}}{S}$$

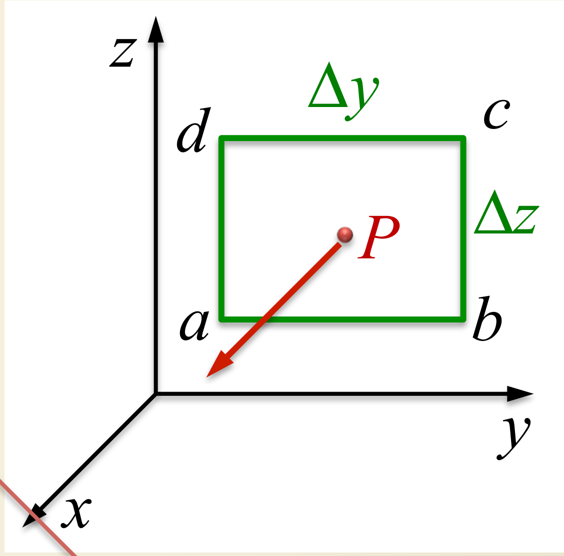


$$\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\iint_S\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$$

旋度定理 (Stokes定理)

直角坐标系下的旋度

- 考察中心在 $\boldsymbol{P}=(x, y, z)$ 点垂直于 x 轴的无限小长方形



$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$= \Delta y\left[F_y\left(x,y,z-\frac{\Delta z}{2}\right) - F_y\left(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}\right)\right]$$

$$+\Delta z\left[F_z\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right) - F_z\left(x,y-\frac{\Delta y}{2},z\right)\right]$$

$$(\Delta y \Delta z)\left(-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)$$

$$(\Delta y \Delta z)\left(+\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)$$

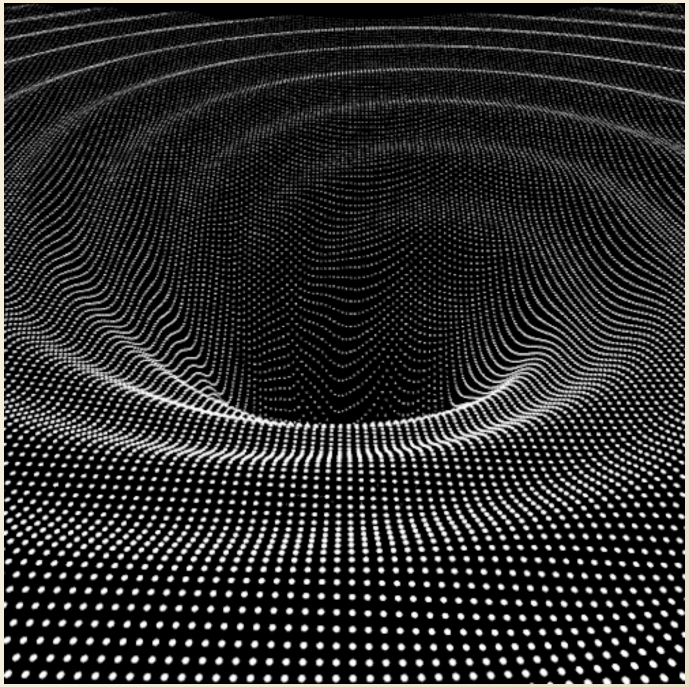
- 当 $\boldsymbol{\Delta y\to 0}$ 、$\boldsymbol{\Delta z\to 0}$ 时

$$\hat{x}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right) \equiv \lim_{S\to 0}\frac{\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}}{S} = \boxed{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)}$$

旋度的物理含义

- 矢量场 $\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x,y,z)=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$ 的**旋度**为

$$\nabla\times\vec{F}\equiv\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$



- ***F*** 为无旋场：***F*** 的旋度处处为零
- ***F*** 为有旋场：***F*** 的旋度不恒为零

环路定理的微分表述

- 直接利用环路定理与Stokes定理

$$\begin{cases} \oint\limits_{C=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{S} \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{S} \\ \oint\limits_{C=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \iint\limits_{S} \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{S} = 0$$

- 此结论对于任意 S 均成立

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

- 静电场是无旋场
- 无旋场可由标量势唯一确定


谢谢～～

梯度算子

■ 性质： ■ **It works like a vector.** ■ **It's an operator.**

$$(a), \vec{\nabla}(\varphi\psi) = (\vec{\nabla}\varphi)\psi + \varphi\vec{\nabla}(\psi)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{A} + \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\cancel{\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{\nabla}\vec{A})\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\vec{B})???$$

$$(b), \vec{\nabla}[\Psi(\varphi)] = \Psi'(\vec{\nabla}\varphi)$$

$$(c), \vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}(\varphi)] = \nabla^2\varphi$$

$$\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}(\varphi)] = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{A}] = 0$$

$$(d), \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}] = \left[\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z\right]$$

$$\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}(\varphi)] = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{A}] = 0$$