回顾

- 导体处于静电平衡的条件　定向漂移速度：$\vec{v}=0$

- 导体内部的电场等于零

  导体外侧附近的电场垂直于导体表面

$$\vec{E}_{\mathrm{e}}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

$\hat{n}$ ：指向导体外

- 导体是等势体，导体表面是等势面

- 净电荷只分布在导体的表面，内部的净体电荷密度处处为零。

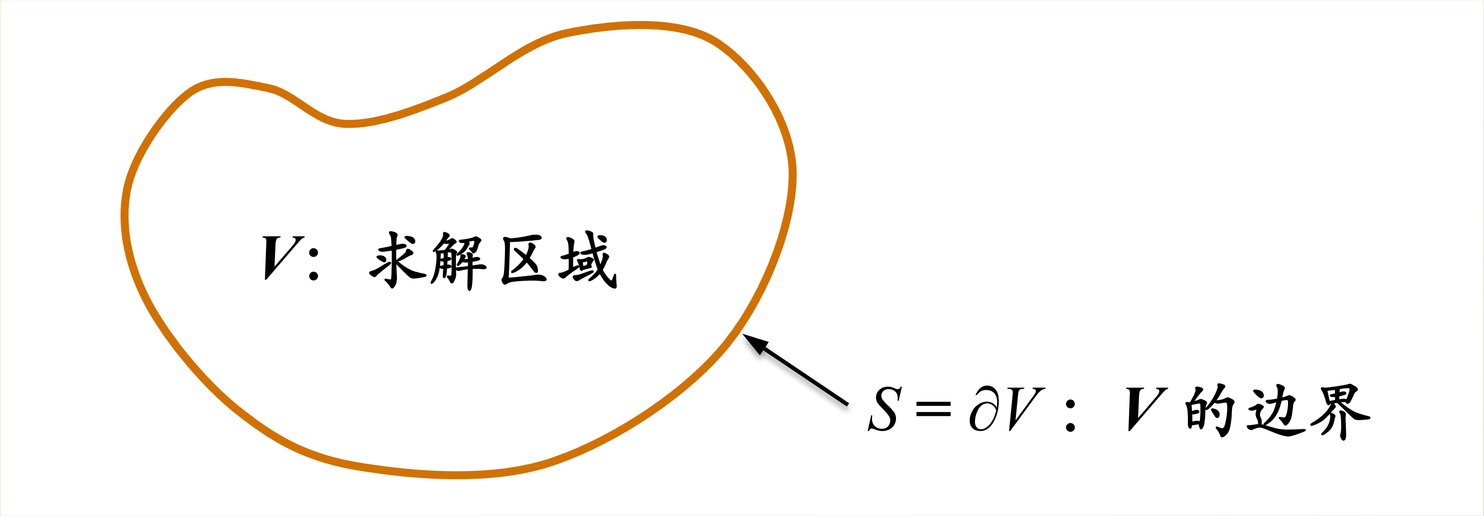
$$\rho=\rho_{+}+\rho_{-}=0$$

唯一性定理 I

以 $S=\partial V$ 为边界的区域 V 内的电势唯一确定，如果：

(1) 区域 V 内部的电荷分布 $\rho(x,y,z)$ 已知；

(2) 边界 ∂S 上每一点的电势 $\varphi(x,y,z)$ 给定。



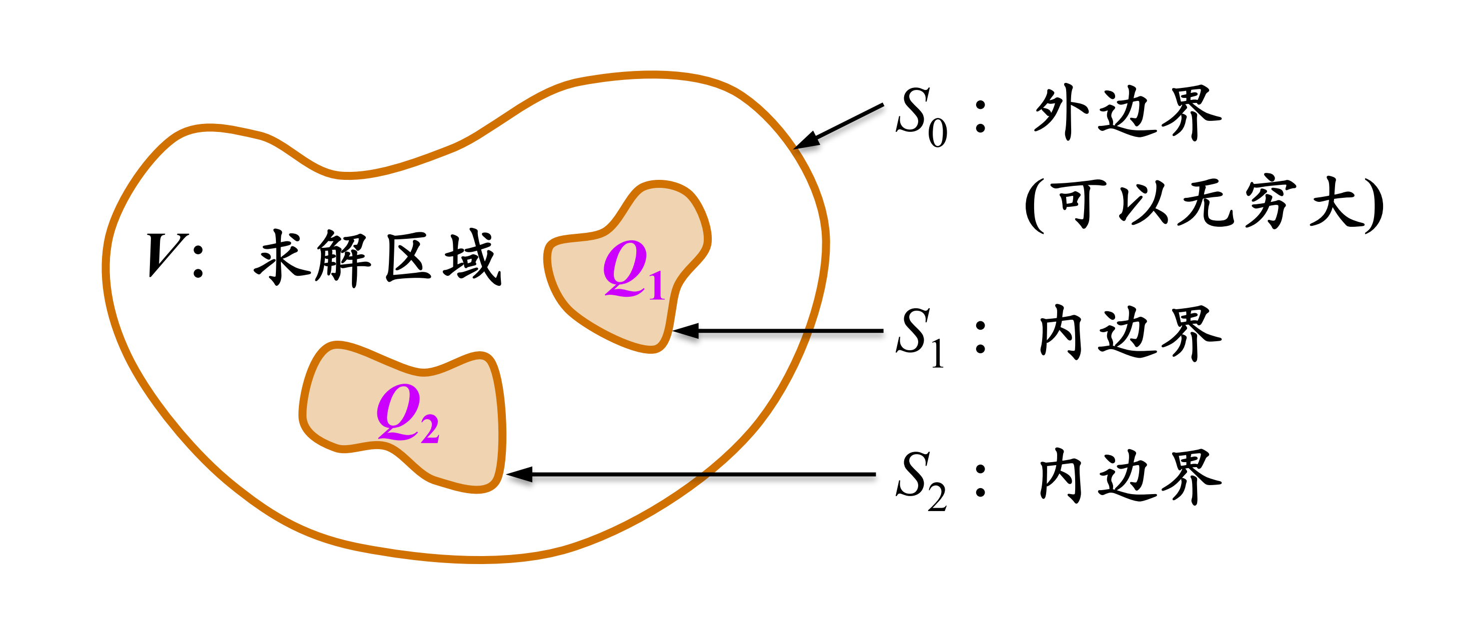
如果边界为导体，所给定电势应为常数，否则（静电）解不存在

唯一性定理 II

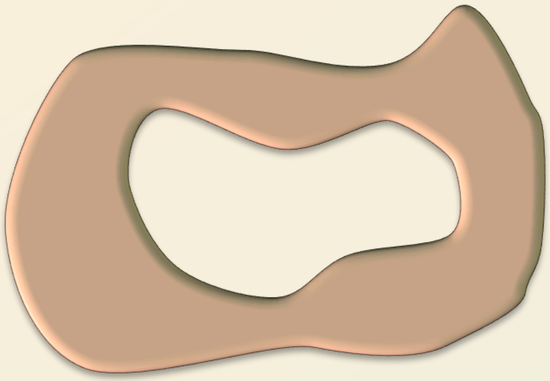
以导体表面 $S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_N = \partial V$ 为边界的区域 V 内的电场唯一确定，如果

(1) 区域 V 内部的电荷分布 $\rho(x,y,z)$ 已知；

(2) 每一个内导体的电量 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ 给定。



唯一性定理的应用：静电屏蔽



导体壳将整个空间分为三个部分：

空腔、导体以及导体外

- 导体内电场为零
- 空腔以导体内表面为边界
  - 若空腔内的电荷分布给定，则空腔内各点的电场唯一确定，与导体外的电荷分布以及导体是否带电无关。
- 导体外区域以导体外表面为其内边界，外边界无穷远
  - 给定导体外的电荷分布以及导体外表面所带总电量，则导体外的电场唯一确定。
    - 导体外表面总电量等于空腔内总电量与导体电量之和

导体接地意味着告诉边界上的电势，因而一旦再给定导体外的电荷分布，则导体外的电场唯一确定。

唯一性定理的意义

解的唯一性定理意味着：

不管你采用**任何方法**得到静电场问题的解，

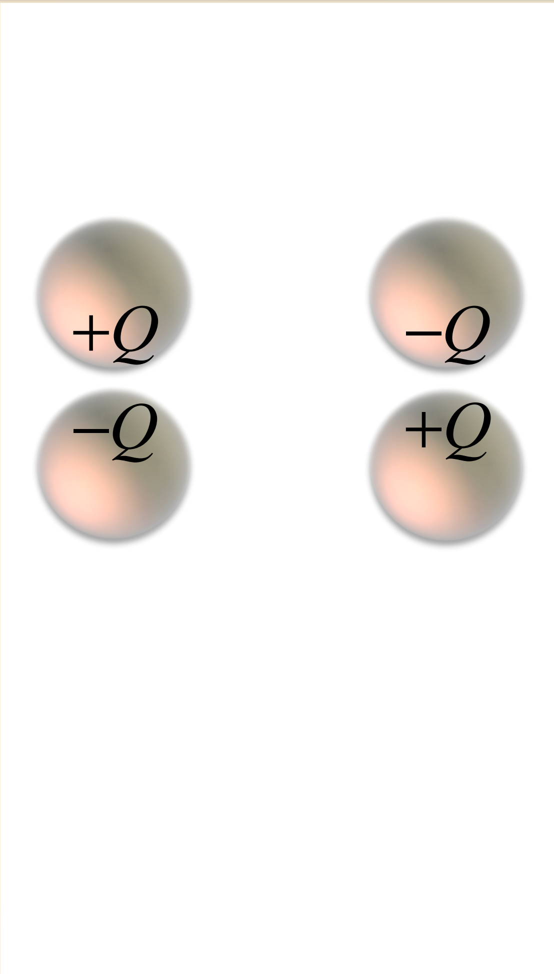
只要满足以下条件，这个解就是唯一正确的解

(1) 符合求解区域内部的电荷分布

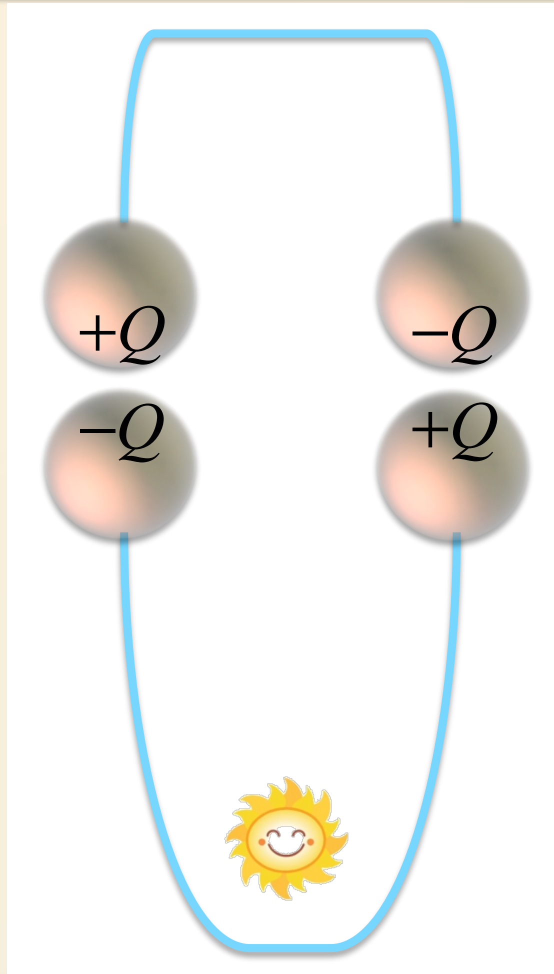
(2) 符合所给边界条件

(3) 确实是静电学问题的解 (如导体等势)

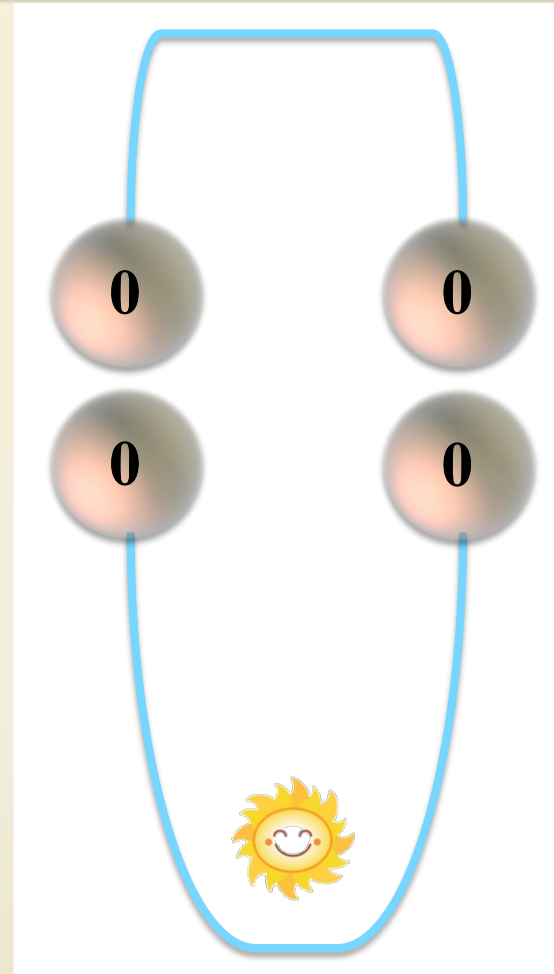
唯一性定理的应用



四个导体球



导线连接

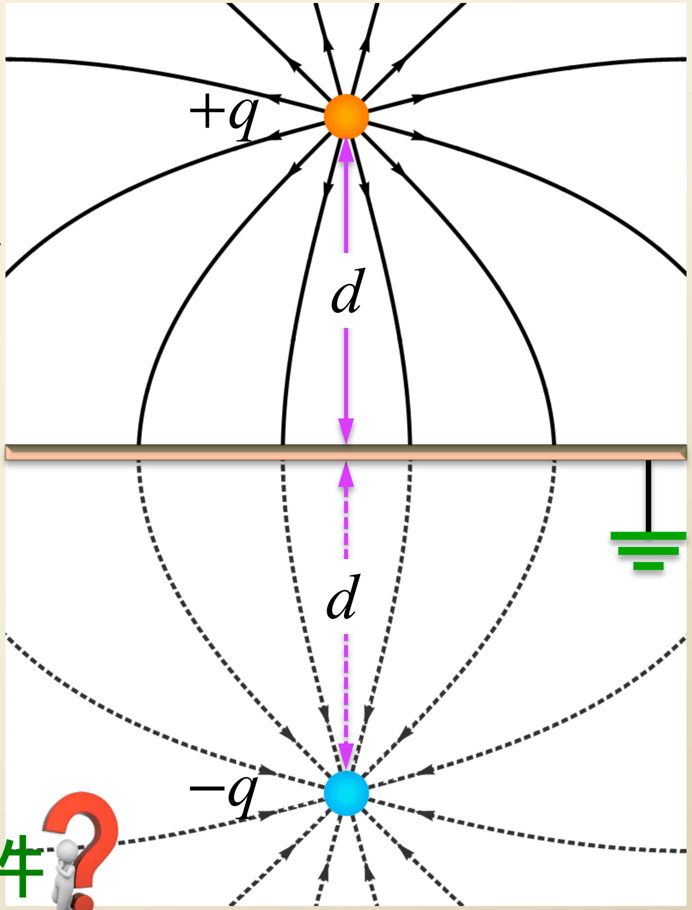


达到静电平衡后

无限大导体板

无限大接地导体板上方距离为 d 处有一点电荷 q。
试求点电荷所在的上半空间(z>0)中的电场和电势。

- 简单分析
  - q 会吸引到导体板上的负电荷
  - q 发出的电场线终止于感应的负电荷
- 严格求解涉及到Poisson方程
  - 求解区域：上半空间
    - 电荷分布有奇异性(点电荷)
  - 区域边界：平面+无限大的半球面
    - 边界上电势为零



是否有哪个熟悉的电场满足以上所有条件

无限大导体板——电场与电势

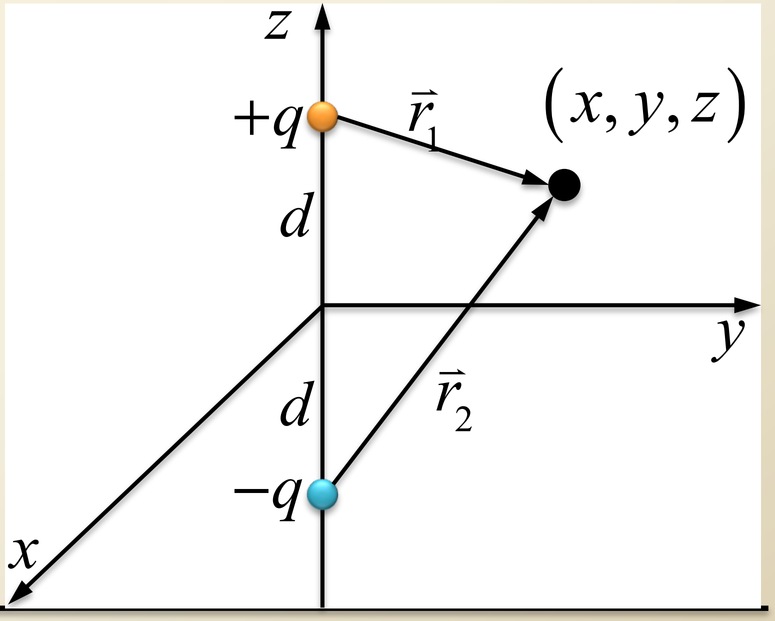
- 电势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right),\quad z\geq 0$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right),\quad z\geq 0$$

- 电场

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}-\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right),\quad z\geq 0$$



问题：区域 $z<0$ 内的电场？

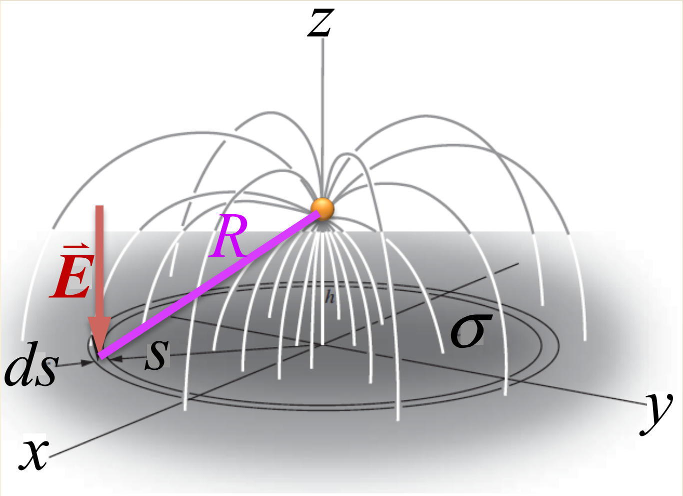
答案：**Who cares？**

无限大导体板—电荷与力

- 感应电荷分布

$$\sigma = \varepsilon_0 E_z\big|_{z=0} = -\frac{qd}{2\pi R^3} < 0$$

$$\Rightarrow \quad Q = \int \sigma dS = \int \sigma s ds d\phi = -q$$



- q 受到的力

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\hat{z}$$

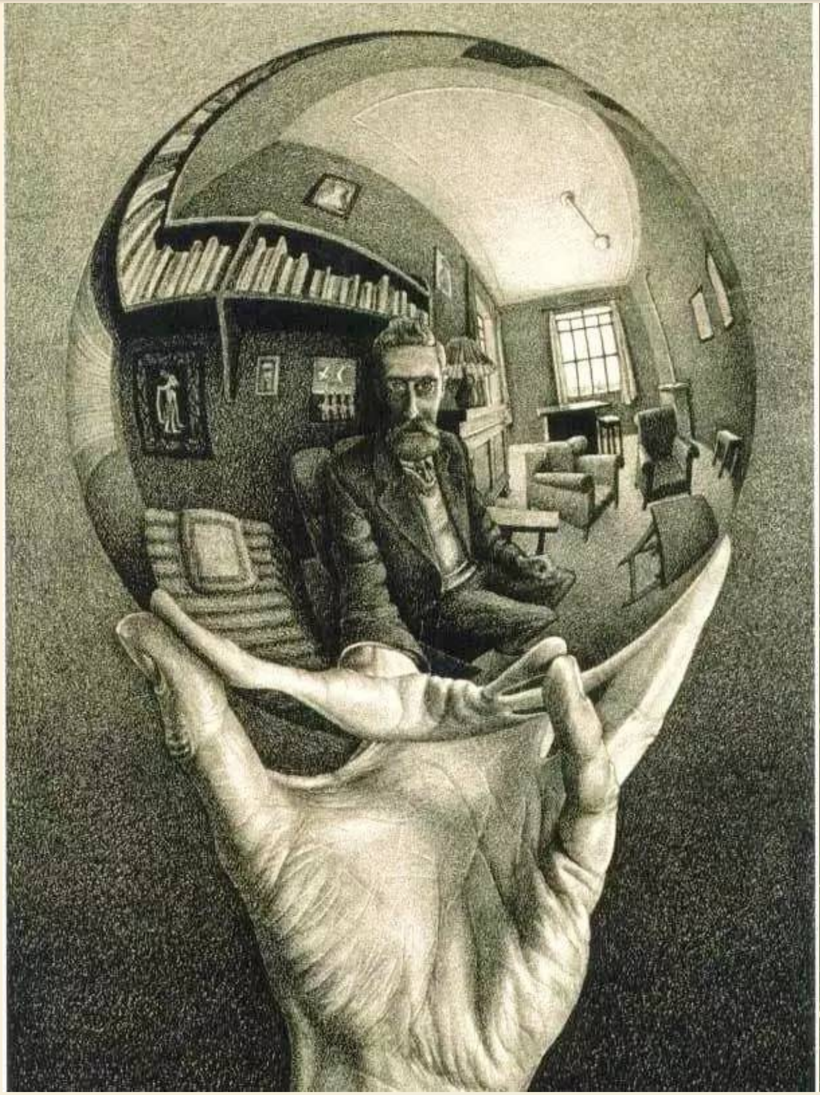
$= -q$ 对 q 的作用力

- 能量

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d}$$

$= -q$ 与 q 相互作用能的一半

§1-3 电像法

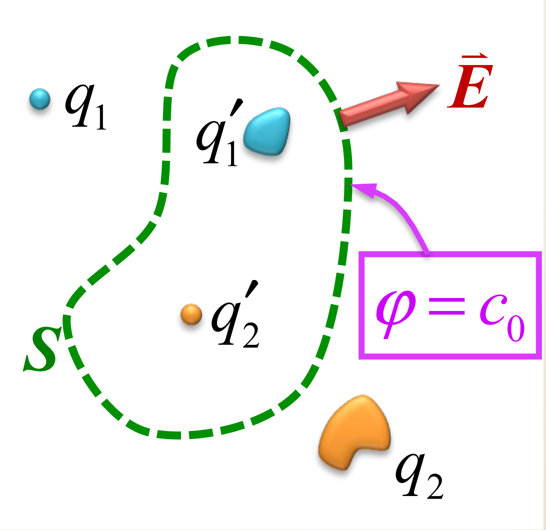


已经解决的问题 I

- 给定全空间的电荷分布，试确定空间各点的电场与电势。

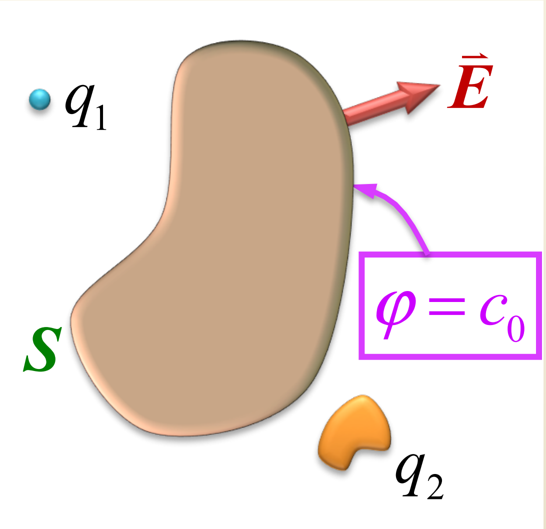
So easy! Coulomb定律 + 叠加原理

- 设电场为 $\vec{E}_0(\vec{r})$ ，电势为 $\varphi_0(\vec{r})$
- 设 S 为某个等势面，电势为c_0
  - 设 S 内的总电量为 $Q' = q_1' + q_2'$
- E_0 和 φ_0 由 S 内、S 外的电荷共同贡献



待解决的问题 II

■ 保持 S 外的电荷分布不变，将 S 代之以电势恰好等于 c_0 的导体，试求空间各点的电场 E 和电势 φ。



- E 和 φ 由 S 外的电荷以及导体表面的感应电荷共同贡献
- S 内：$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=0,\ \varphi(\vec{r})=c_0}$
- S 外：$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0(\vec{r}),\ \varphi(\vec{r})=\varphi_0(\vec{r})}$

就 S 外的电场而言，**问题 I 中 S 内电荷分布与问题II 中导体表面的感应电荷的贡献**是相同的，因而将 $Q'=q'_1+q'_2$ 称为像电荷，而这种利用像电荷代替感应电荷计算导体外电场分布的方法就称为**电像法**。

像电荷必须位于求解区域之外 (为什么？)

待解决的问题 II续

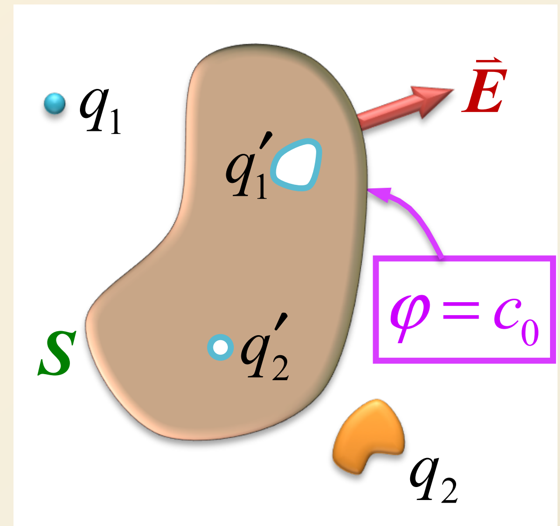
电荷分布

- 导体总电量＝问题I中S内的总电量

$$Q' = q_1' + q_2'$$

- 面电荷分布由表面外侧的场决定

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n$$



受力分析

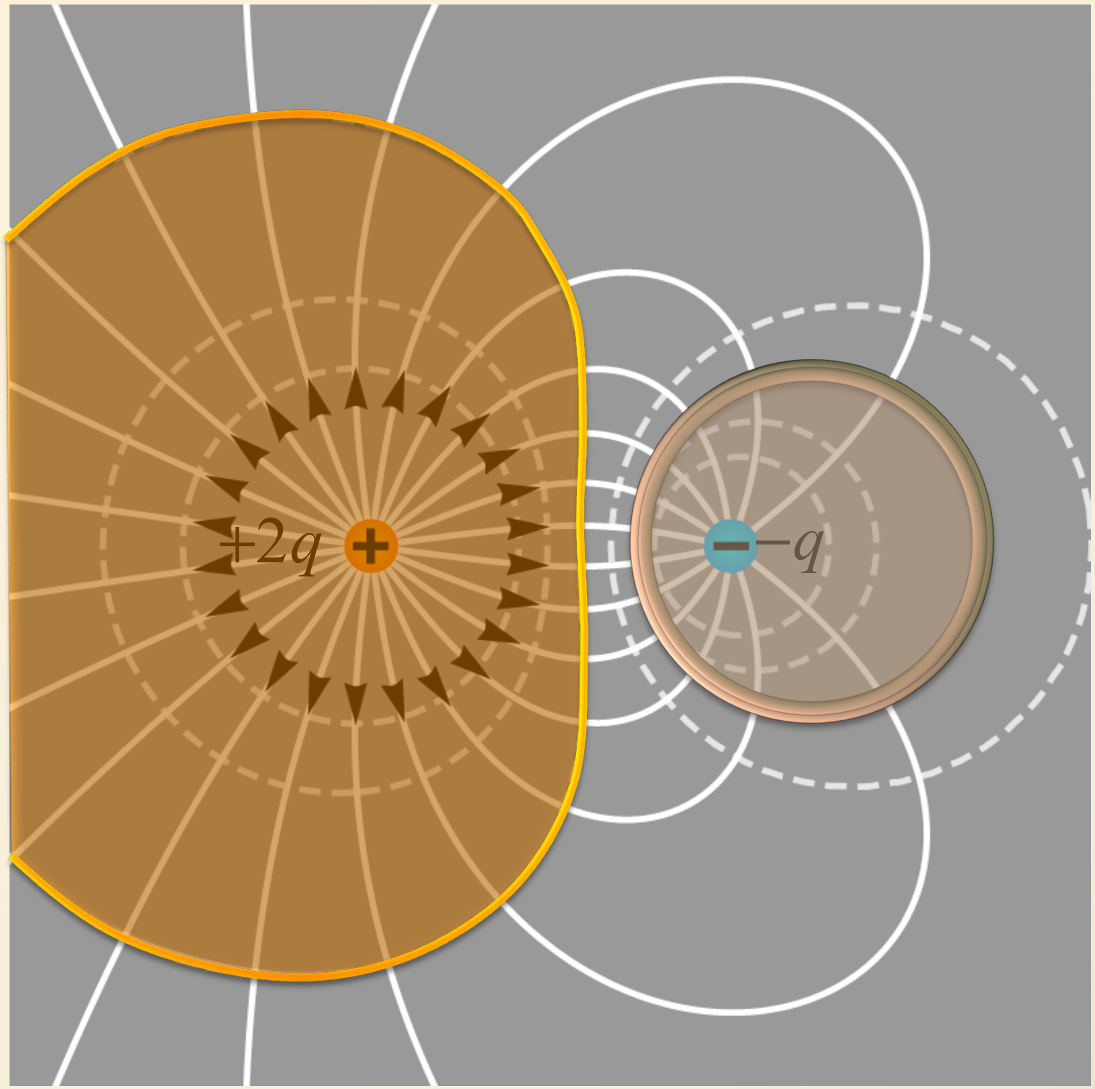
- q_1 受到导体的作用力 $\vec{F}_1 = q_1\left(\boxed{\vec{E}_1'} + \vec{E}_2' + \cdots\right)$

q'_1 在 q_1 处产生的电场

- 导体受力＝S外电荷对于像电荷作用的合力

$$\vec{F} = \sum_i q_i'\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots\right)$$

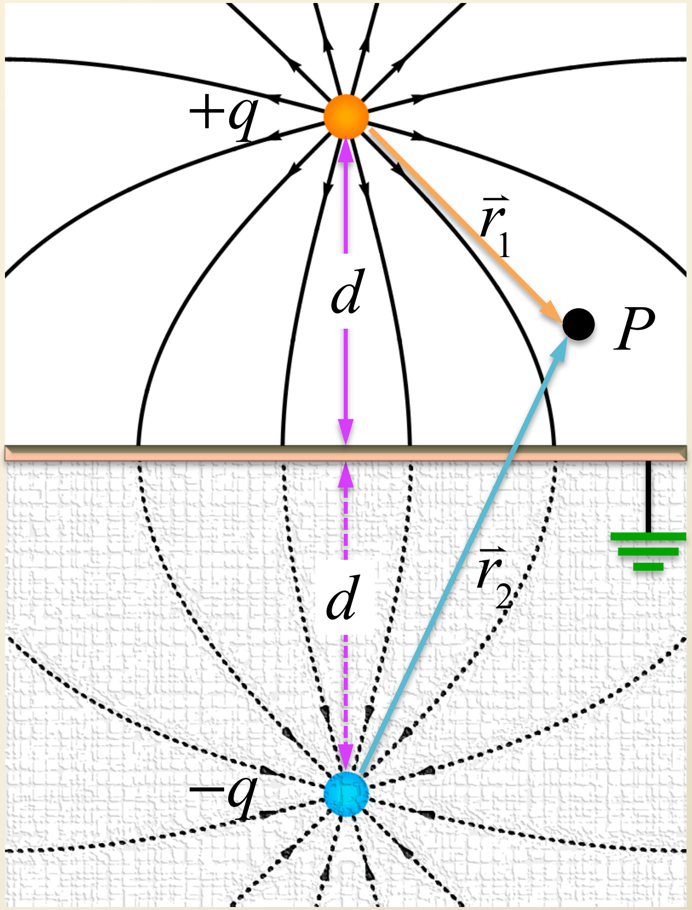
$1 = \infty$



解决了一个静电学问题，意味着已经解决了无穷多个静电学问题

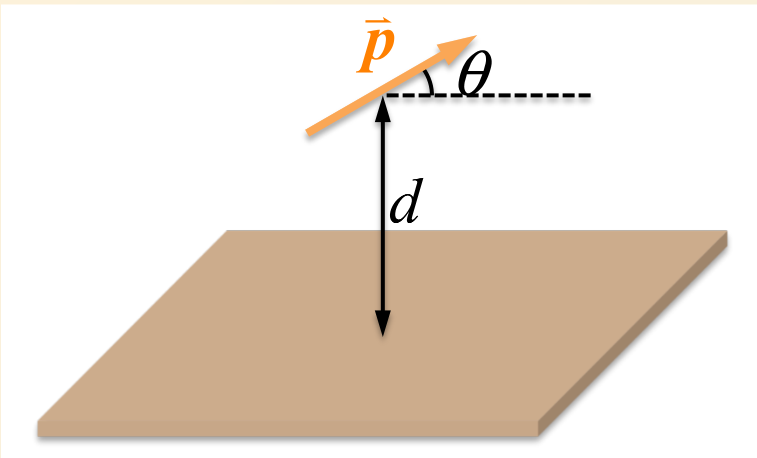
点电荷对无限大导体板

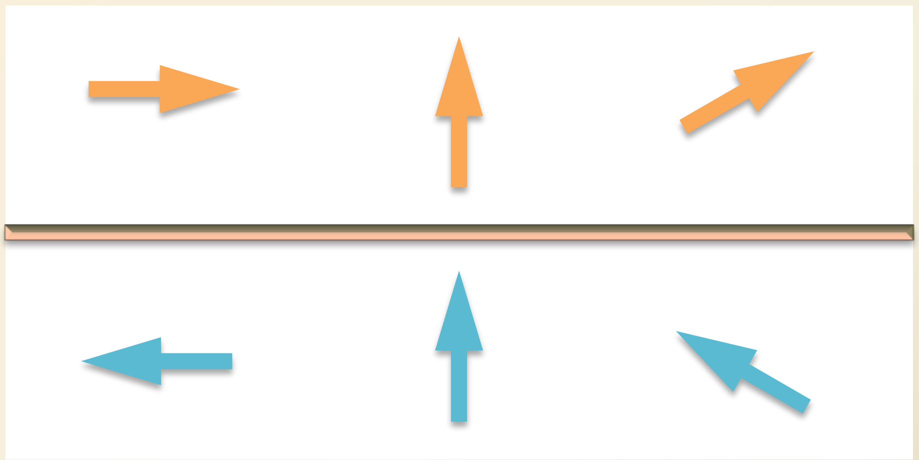
$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right), & z \geq 0 \\ \vec{E} = -\nabla\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \dfrac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right), & z \geq 0 \end{cases}$$



电偶极子

无限大接地导体板上方距离为 d 处有一电偶极子 p， p 相对于导体板的倾角为 θ。求导体板上方的电场和电势。

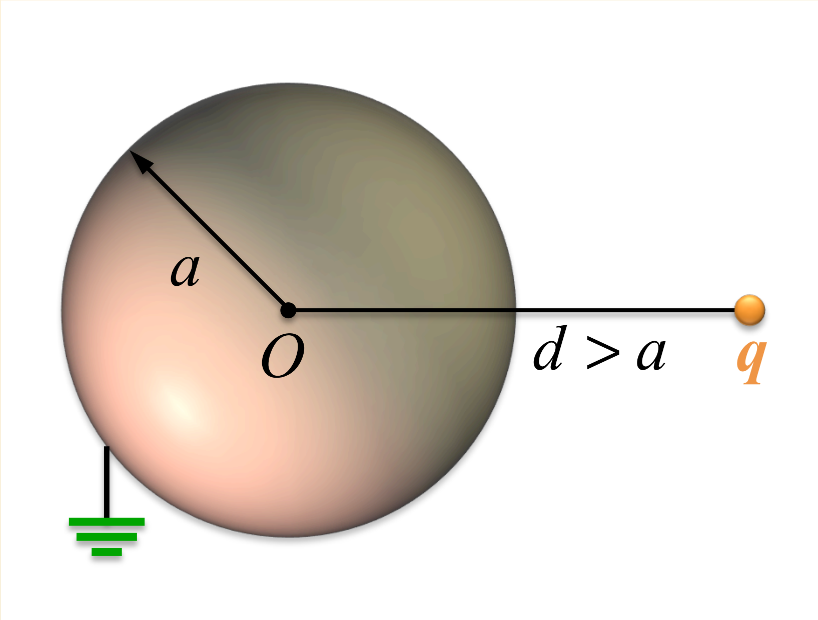


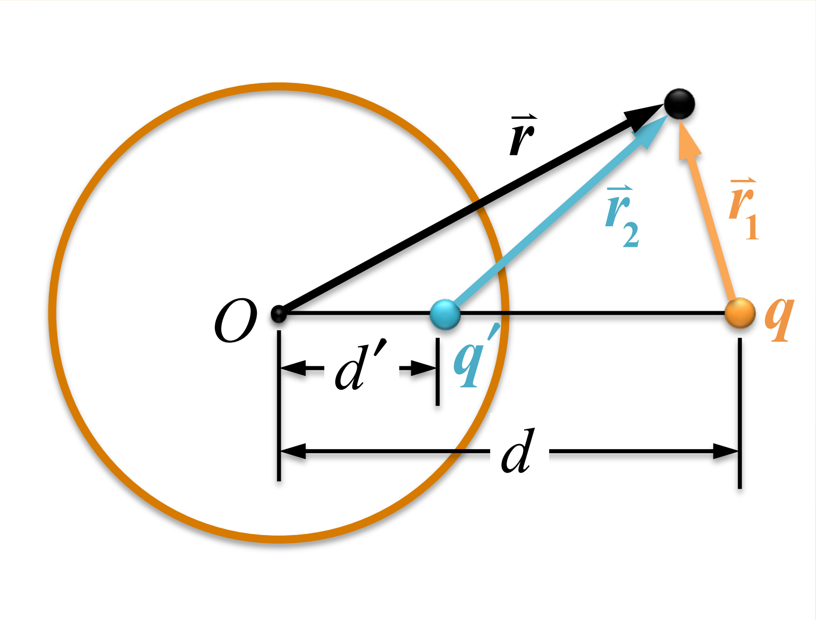


电像 $\neq$ 镜像

点电荷对接地导体球

点电荷 q 置于半径为 a 的接地导体球外，到球心距离为 $d > a$，求导体球外的电场、电势、感应电荷分布以及 q 受到的力。





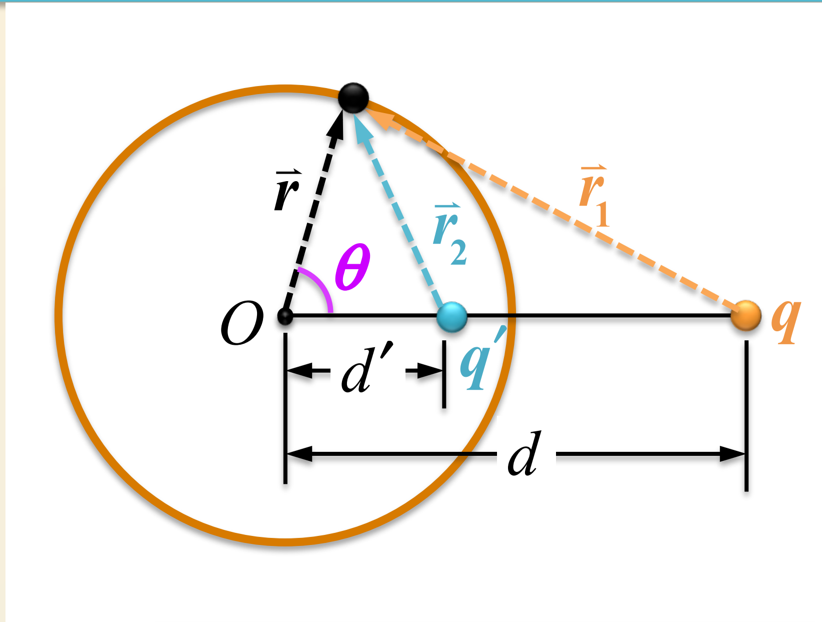
- 设像电荷 q' 位于球心与q的连线上，到球心距离为 $d' < a$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right), \quad r \geq a$$

点电荷对接地导体球续1

- 边界条件 $\varphi(r=a)=0$

$$\frac{q}{\sqrt{d^2+a^2-2da\cos\theta}} = \frac{q'}{\sqrt{d'^2+a^2-2d'a\cos\theta}}$$



- 该式对于任意角度 θ 都成立
- 当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时分别得到 $(d'<a<d)$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{d-a} = \dfrac{q'}{d'-a} \\ \dfrac{q}{d+a} = -\dfrac{q'}{d'+a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q' = -\dfrac{a}{d}q \\ d' = \dfrac{a^2}{d} \end{cases}$$

将此结果代入边界条件可验证其对于任意 θ 都成立，若非如此，说明仅仅一个像电荷无法代替面电荷对球外的电场贡献

点电荷对接地导体球续2

- **球外电势**

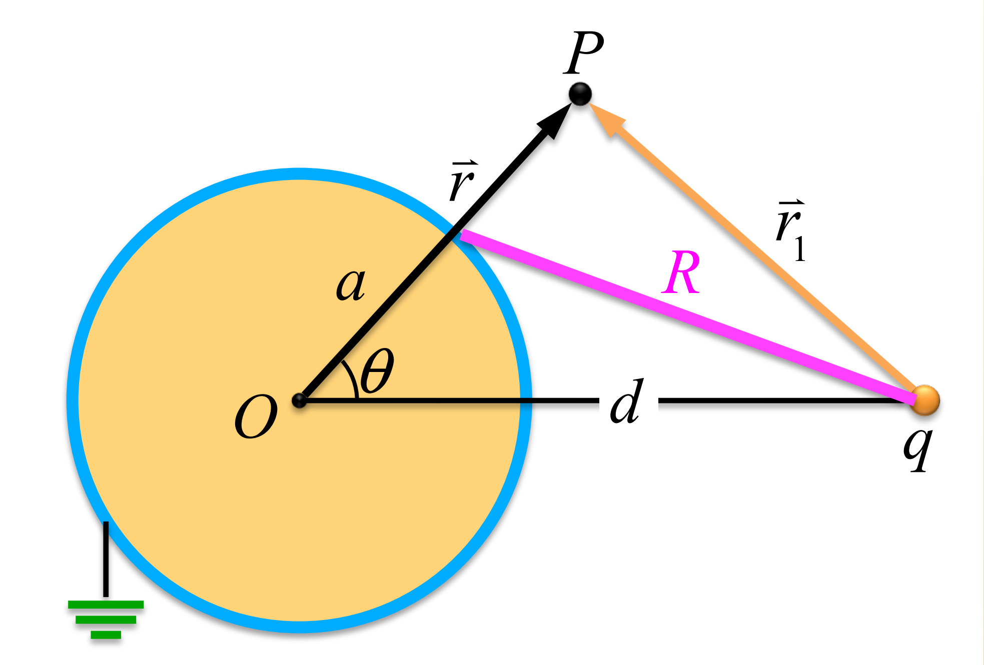
$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{d^2+r^2-2dr\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+(dr/a)^2-2dr\cos\theta}}\right]$$

- **感应电荷分布**

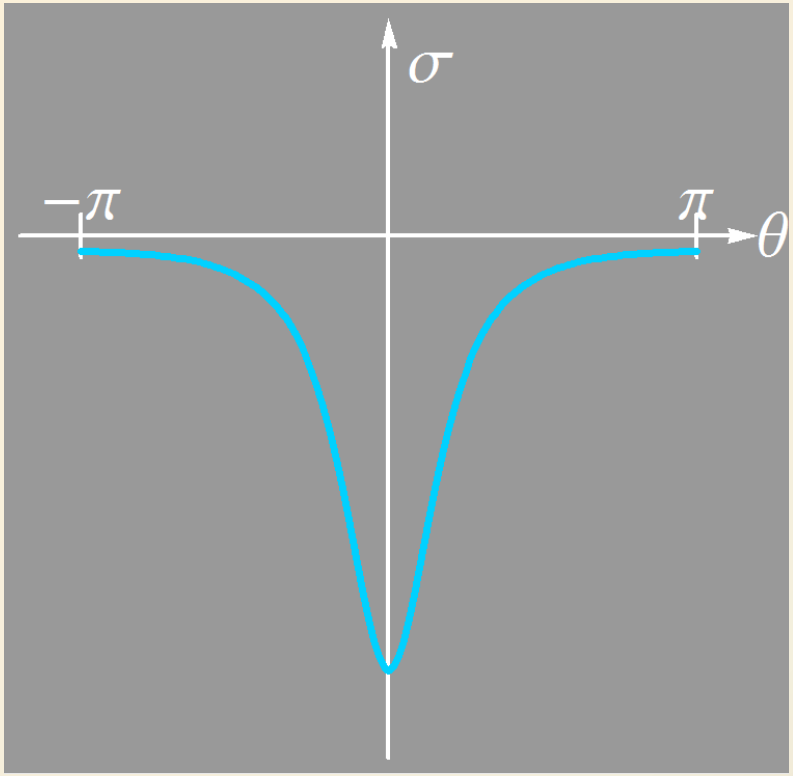
$$\sigma=\varepsilon_0 E_r=-\frac{q}{4\pi a}\frac{d^2-a^2}{R^3}$$

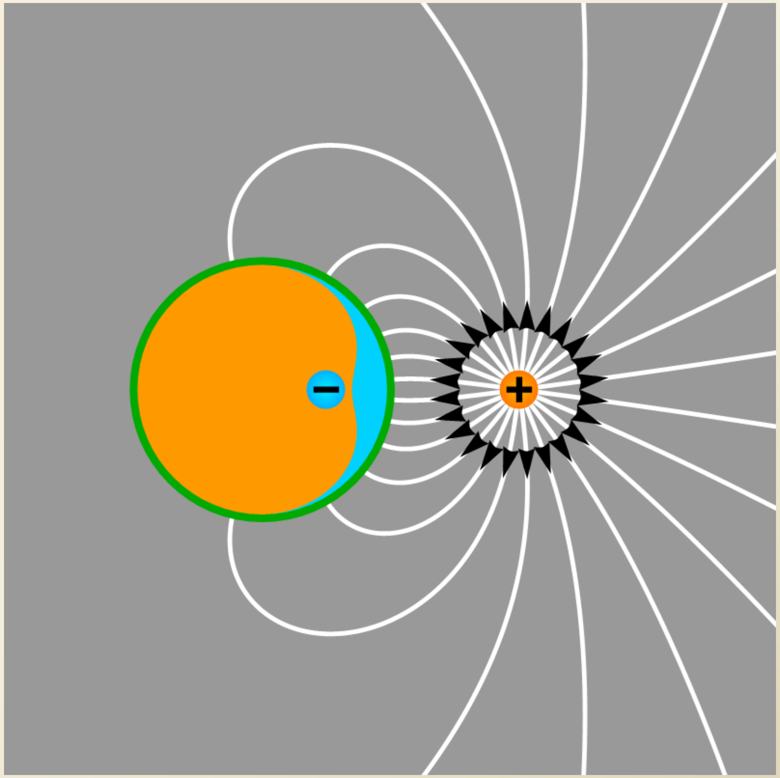
- 距离q越远感应电荷越稀疏



点电荷对接地导体球续3

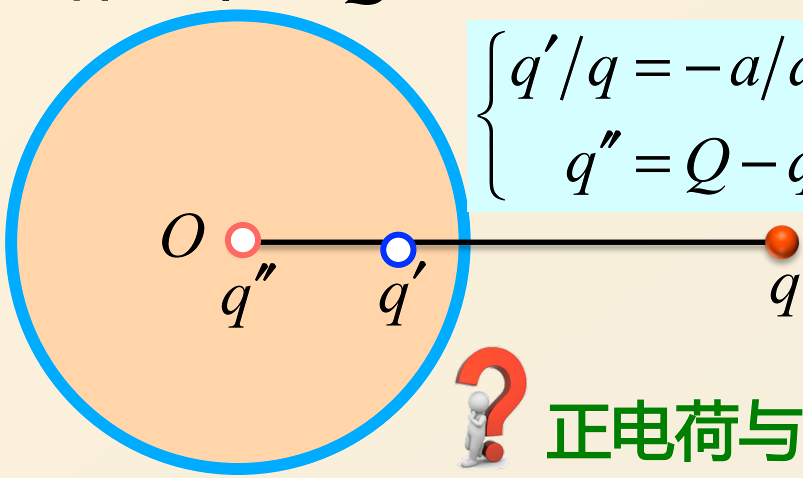
- 电荷q受到的力 $$F=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(d-d')^2}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ad}{(d^2-a^2)^2}$$
  - 负号表示吸引力



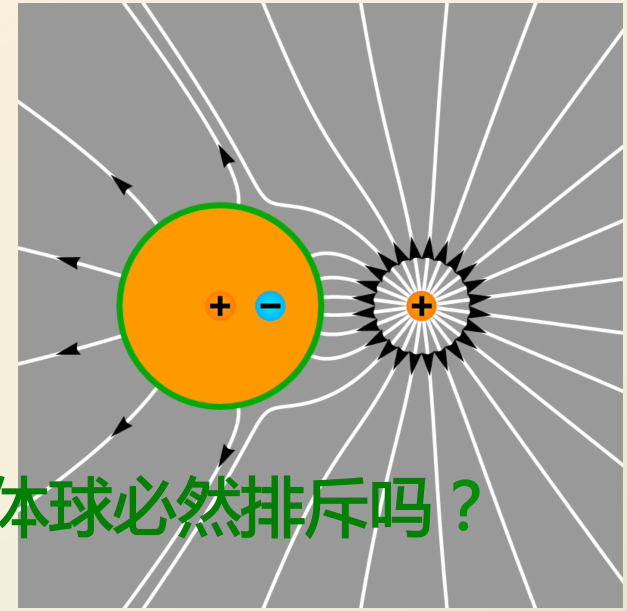


与导体球外电场有关的其它问题

- 导体球带电 Q

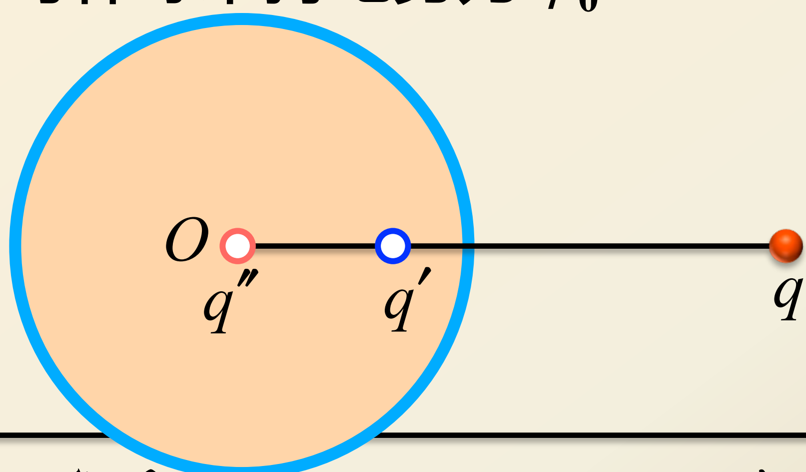


$$\begin{cases} q'/q = -a/d \\ q'' = Q - q' \end{cases}$$



正电荷与带正电导体球必然排斥吗？

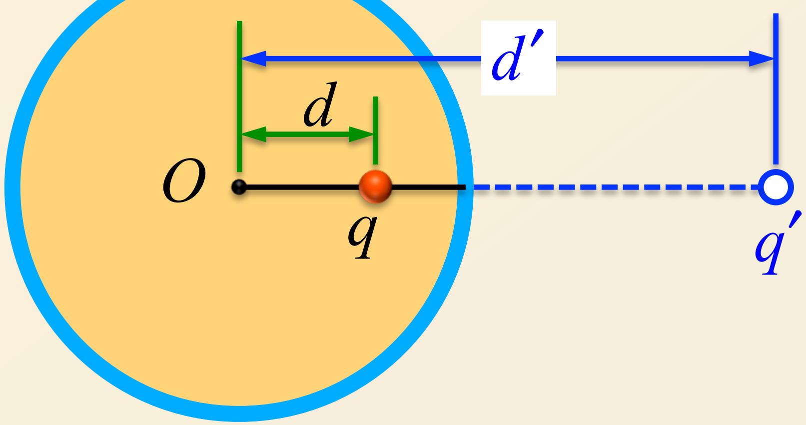
- 导体球维持电势为 φ_0



$$\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 a} = \varphi_0 \Rightarrow q'' = 4\pi\varepsilon_0 a\varphi_0$$

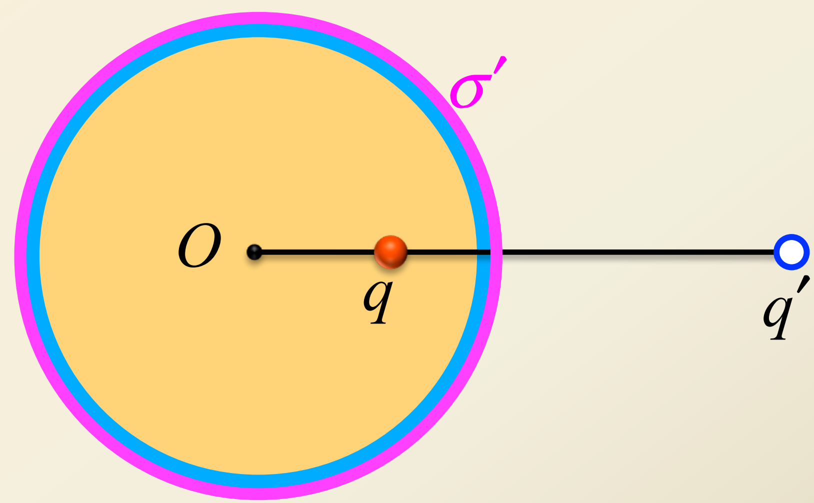
导体球壳内的电场

问题1：导体球壳**接地**。



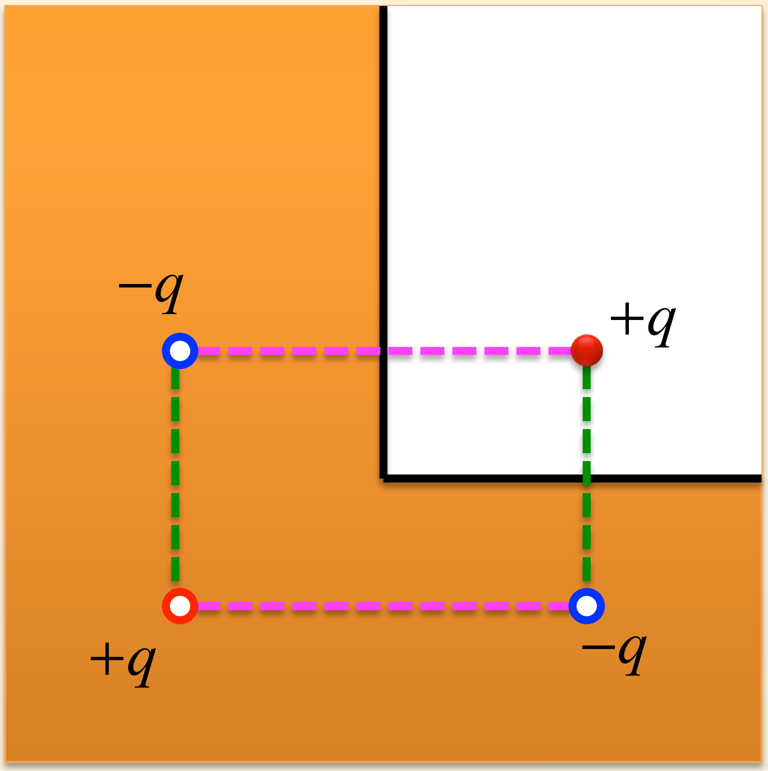
$$\frac{q'}{q}=-\frac{a}{d} \quad \text{and} \quad \frac{d'}{d}=\left(\frac{a}{d}\right)^2$$

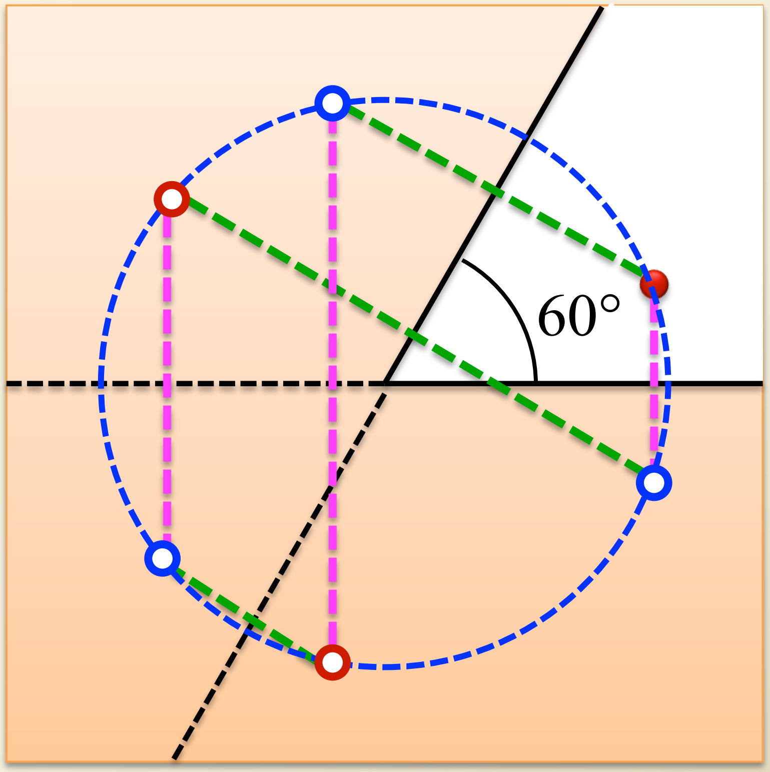
问题2：导体球壳**电势** j_0。



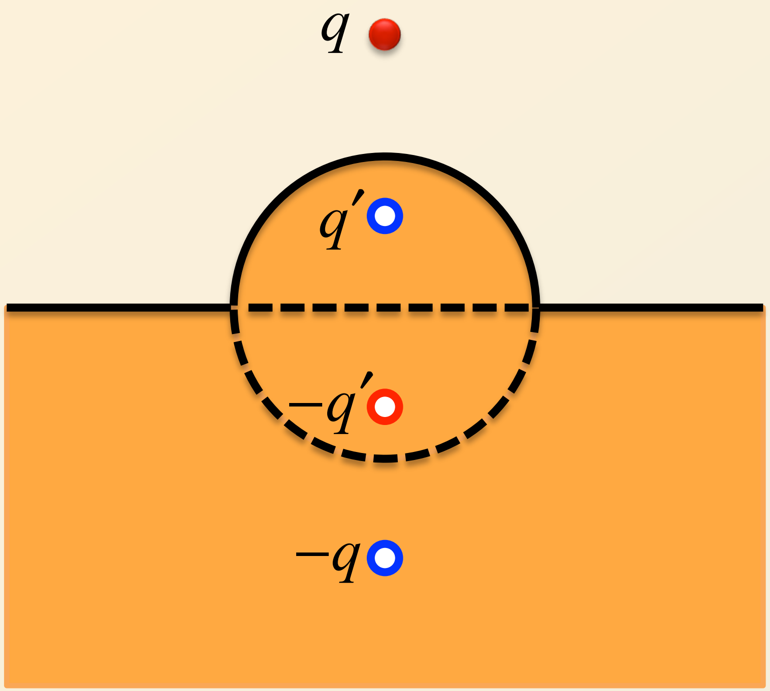
$$\varphi_0=\sigma' a/\varepsilon_0 \Longrightarrow \sigma'=\varepsilon_0\varphi_0/a$$

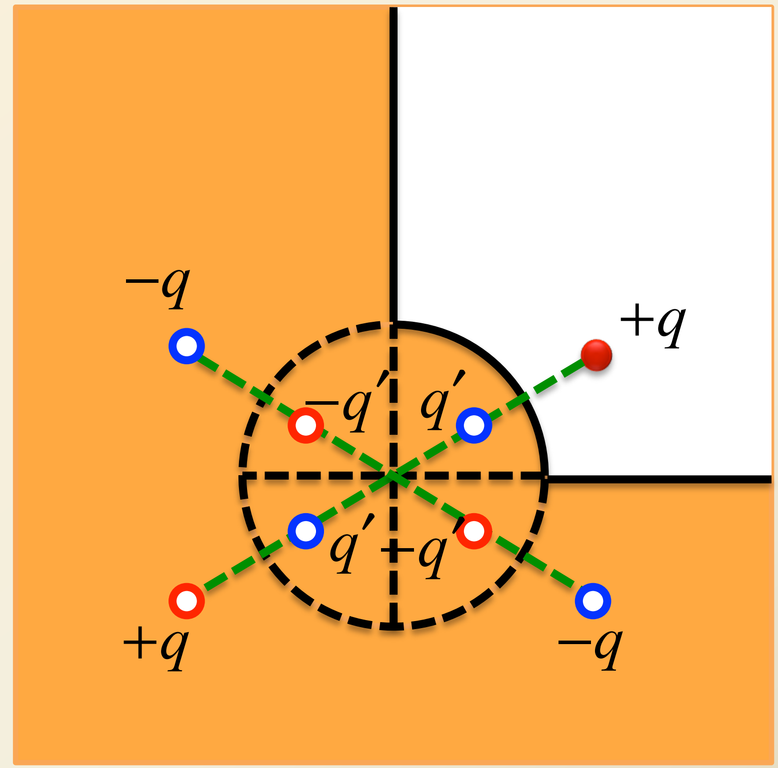
与导体平面有关的其它问题





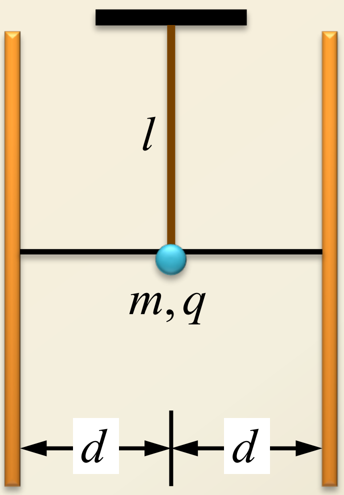
导体球+导体平面





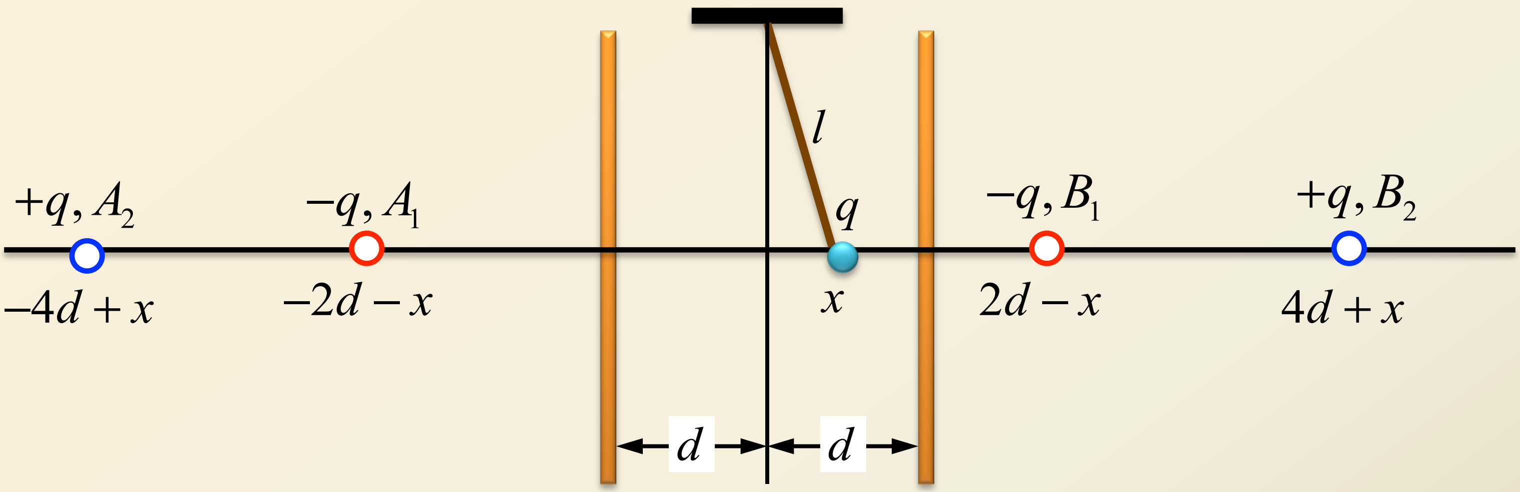
接地导体板之间的单摆

例题：如图所示，两块足够大的接地导体平面A和B平行竖直放置，相距$2d$，$d = 10$ cm。在两板之间的中央位置，用长 $l = 1$ m 的绝缘细线悬挂一个质量 $m = 0.1$ g、电量 $q = 5\times10^{-9}$ C 的小摆球，让小摆球稍稍偏离平衡位置后释放，使之小角度摆动。忽略各种电磁阻尼和空气阻尼。试求小球的摆动周期 T。



接地导体板之间的单摆续1

当带电摆球偏离中央位置时，也有相应的左、右无限系列的镜像点电荷。取小球的中央位置为原点，取水平向右为 x 轴。则当带电摆球在 x 位置时，各镜像点电荷的位置如图所示。



电荷	$-q, A_1$	$-q, B_1$	$+q, A_2$	$+q, B_2$	$-q, A_3$	$-q, B_3$	$+q, A_4$	$+q, B_4$	……
位置	$-2d-x$	$2d-x$	$-4d+x$	$4d+x$	$-6d-x$	$6d-x$	$-8d+x$	$8d+x$	……
距离	$2d+2x$	$2d-2x$	$4d$	$4d$	$6d+2x$	$6d-2x$	$8d$	$8d$	……
力方向	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	……

接地导体板之间的单摆续2

■导体板对电荷的静电力水平分量：

$$F_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{[(4k+2)d-2x]^2}-\frac{1}{[(4k+2)d+2x]^2}\right\} = \frac{q^2 dx}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{\left[(2k+1)^2 d^2 - x^2\right]^2}$$

$$F_e \approx \frac{q^2 x}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} = 1.052\frac{q^2 x}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \approx \boxed{2.4\times10^{-4}x}$$

■绳子张力水平分量： $F_G = -mg\dfrac{x}{l} = \boxed{-9.8\times10^{-4}x}$

■ 摆球受到沿 x 方向的合力： $F_x = F_e + F_G = -7.4\times10^{-4}x = m\ddot{x}$

■此乃线性恢复力**$F=-kx$**，摆球在平衡位置附近作简谐振动，周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2.3\ \mathrm{s}$$

我猜，我猜，我猜猜猜

电中性导体球位于均匀外场 E_0 中，求静电平衡时的电势分布。

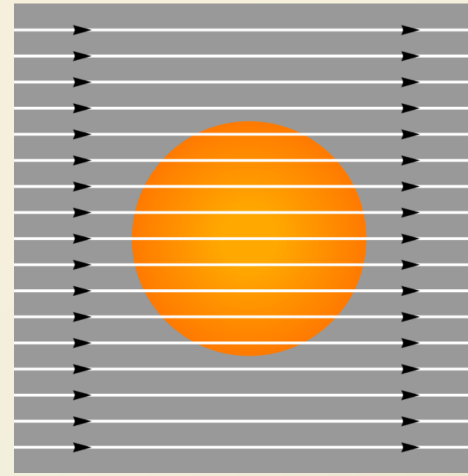
- 电势的贡献有两项：
  - 外场贡献：$\varphi_e = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$

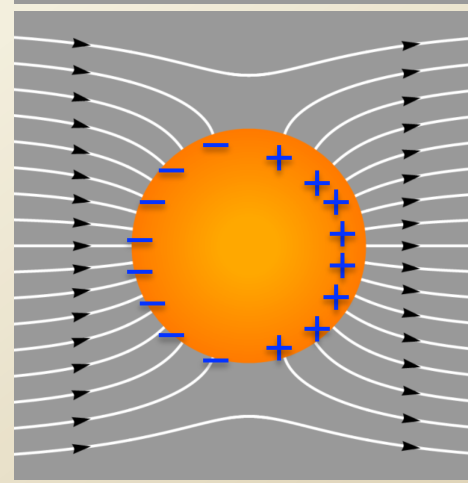
    球面上：$\varphi_e(r=a) = -E_0 a\cos\theta$

  - 感应电荷贡献：
    - 球内贡献的电场均匀，恰抵消外场

    球面上：$\varphi_{\text{induced}}(r=a) = E_0 a\cos\theta + \text{costant}$

思考：镜像~~点~~电荷，(1) 在球内，(2) 在球面产生 cos θ的电势 ~~(球内贡献均匀电场?)~~





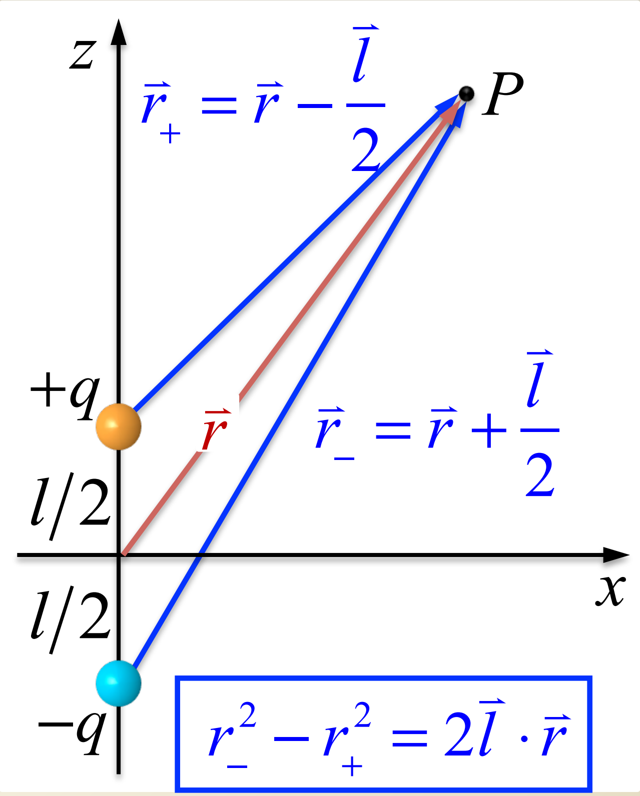
电偶极子的电势（第一章）

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_- - r_+)(r_- + r_+)}{r_+ r_-(r_- + r_+)}$$

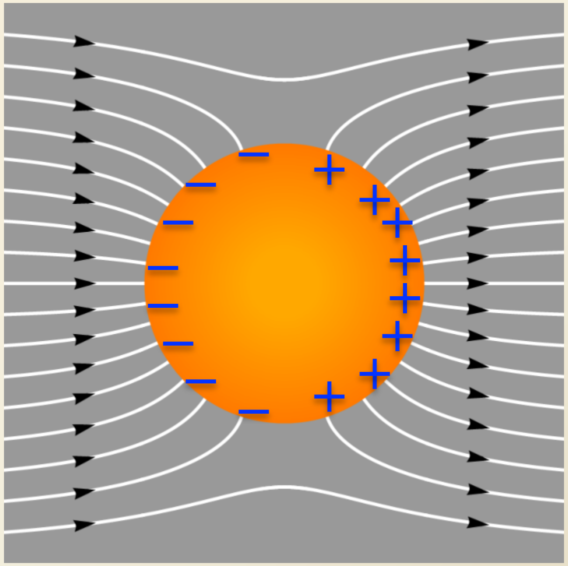
$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{l}\cdot\vec{r}}{2r^3}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



我猜，我猜，我猜猜猜

电中性导体球位于均匀外场 E_0 中，求静电平衡时的电势分布。



- 电势的贡献有两项：
  - 外场贡献： $-\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$
  - 感应电荷贡献：
    - 球内贡献的电场均匀，恰抵消外场
    - 球外贡献的电场等于沿着外场方向的理想电偶极子产生的电场

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad r \geq a$$

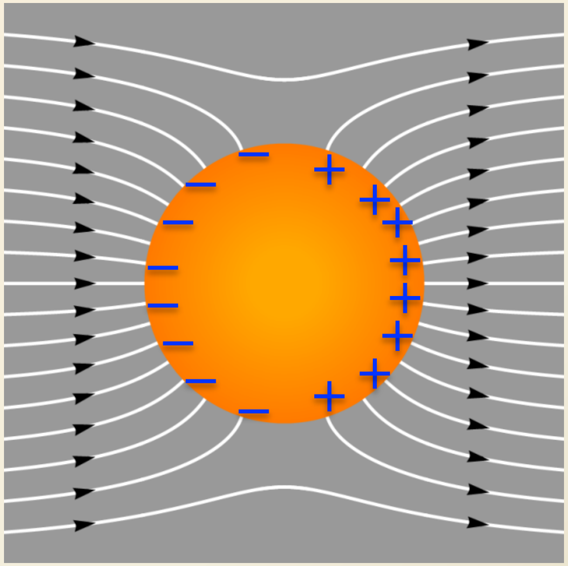
均匀外场中的导体球

■ 边界条件：导体表面是等势面

$$\varphi(r=a)=\left(-E_0a+\frac{p}{4\pi\varepsilon_0a^2}\right)\cos\theta=c$$

■ 该式对于任意角度 θ 都成立，因此

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0a^3\vec{E}_0$$



■ 结论

$$\varphi=-\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\vec{E}_0\cdot\vec{r}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}\right]=\vec{E}_0+\frac{a^3}{r^3}\left[3(\vec{E}_0\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{E}_0\right]$$

$$\sigma=\varepsilon_0E_r(r=a)=3\varepsilon_0E_0\cos\theta=\sigma_0\cos\theta$$

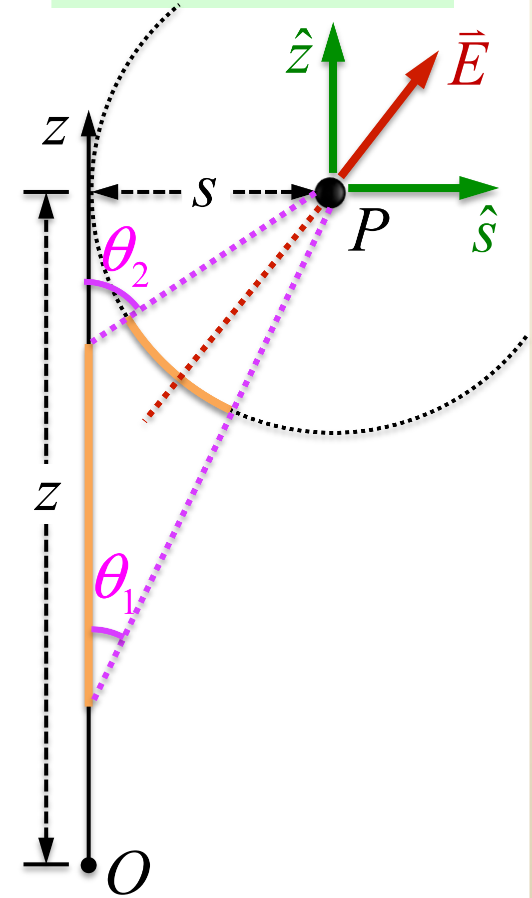
均匀带电细棒的电场（第一章）

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\left[\hat{z}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)-\hat{s}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_1\right)\right]$$

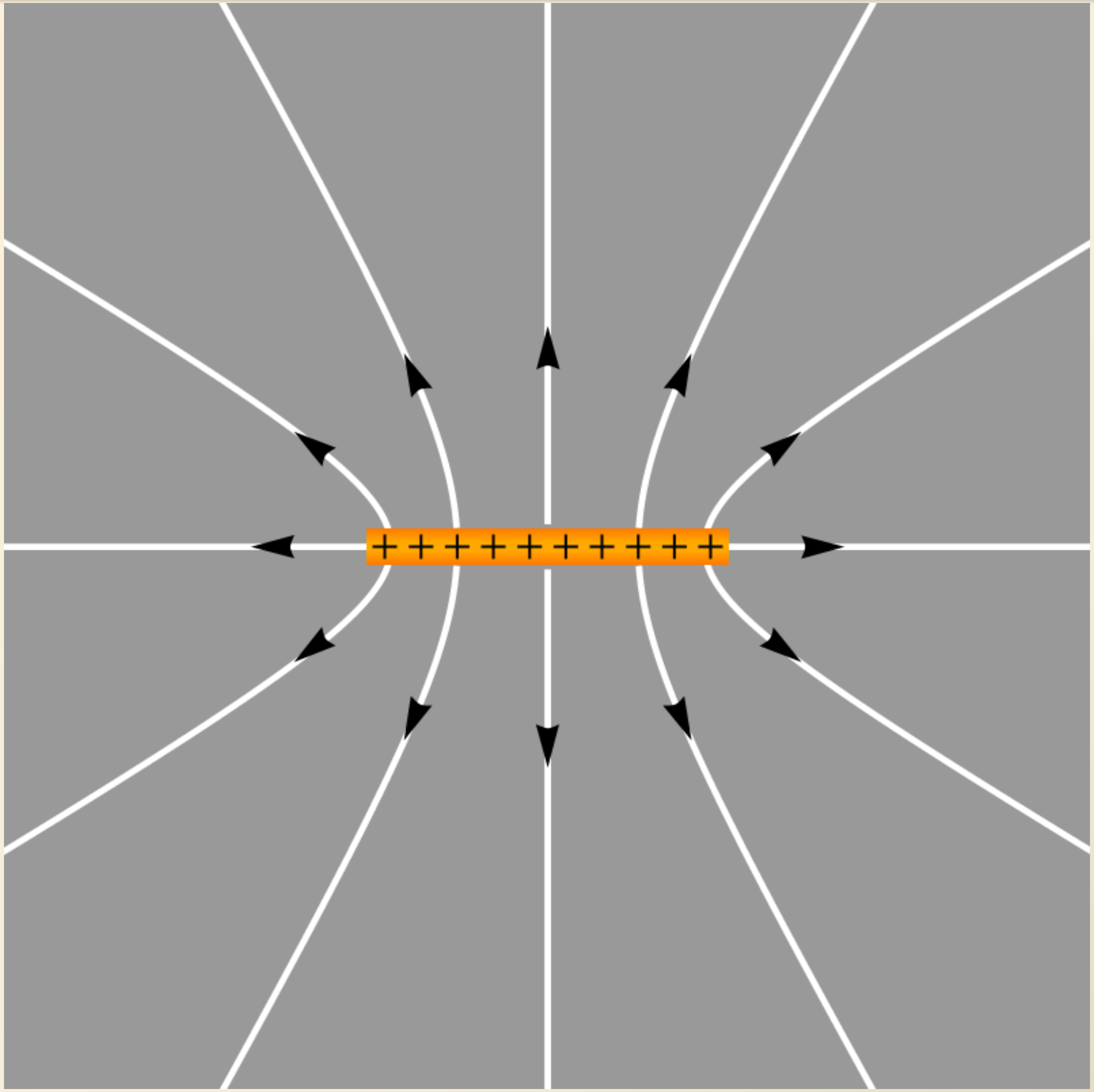
- 电场大小：$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

- 电场方向：
  - 细棒在 P 点产生的电场与以 P 为圆心、半径为 s 的一段圆弧产生的电场相同
  - P 点电场沿着 P 点与细棒两端连线的角平分线的方向

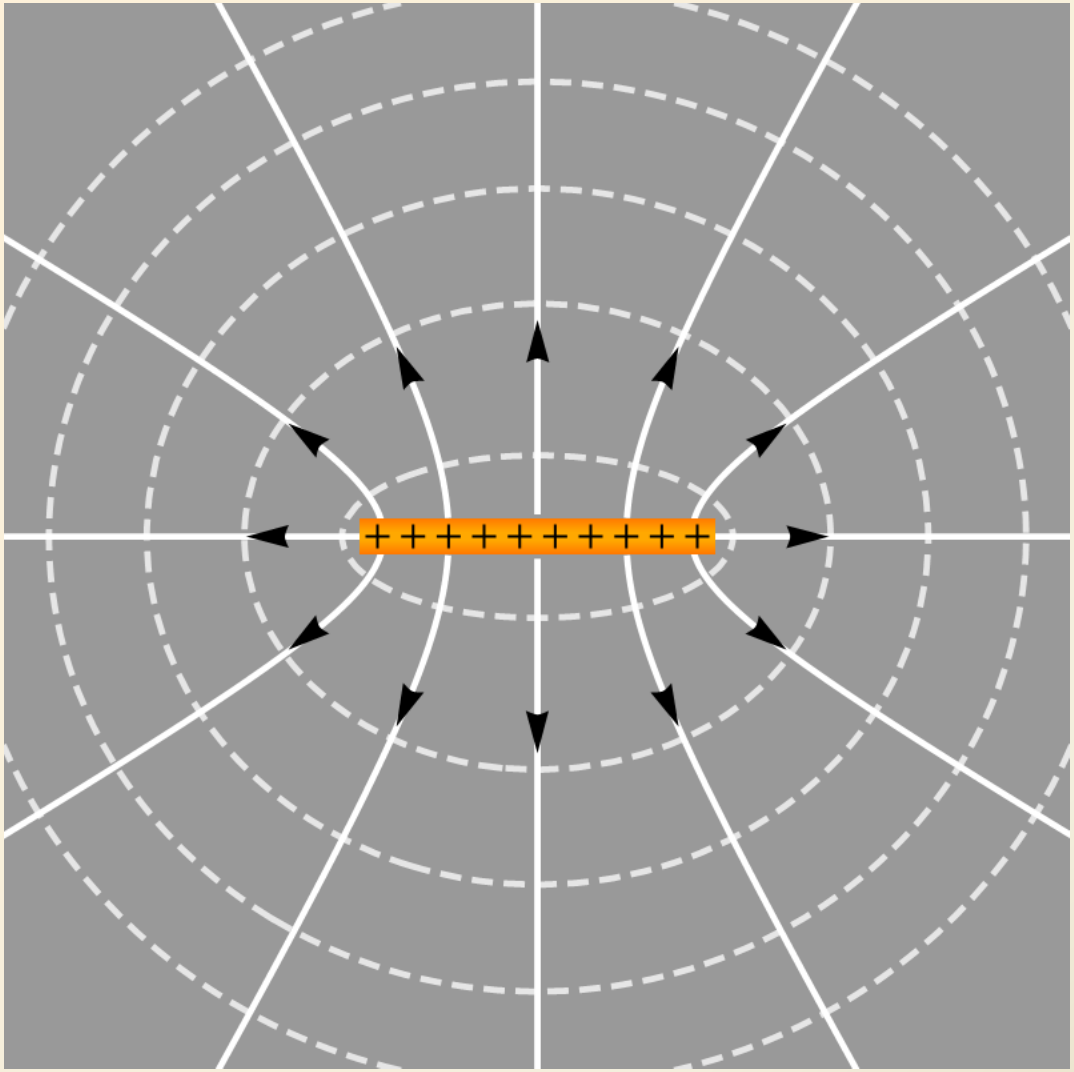
$$d\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 s}\hat{\mathbb{R}}d\theta$$



均匀带电细棒的电场线（第一章）

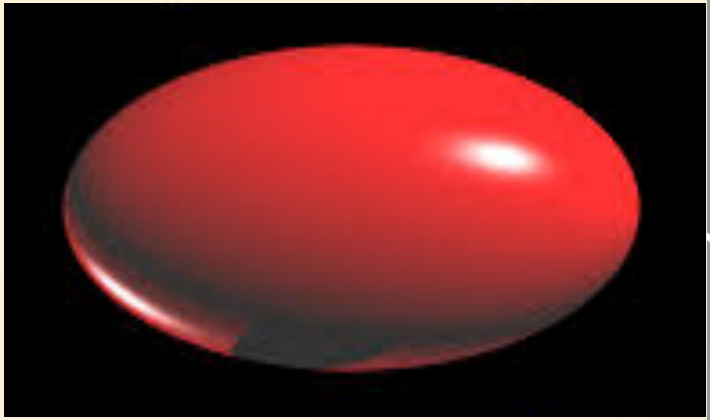


有限长均匀带电细棒（第一章）



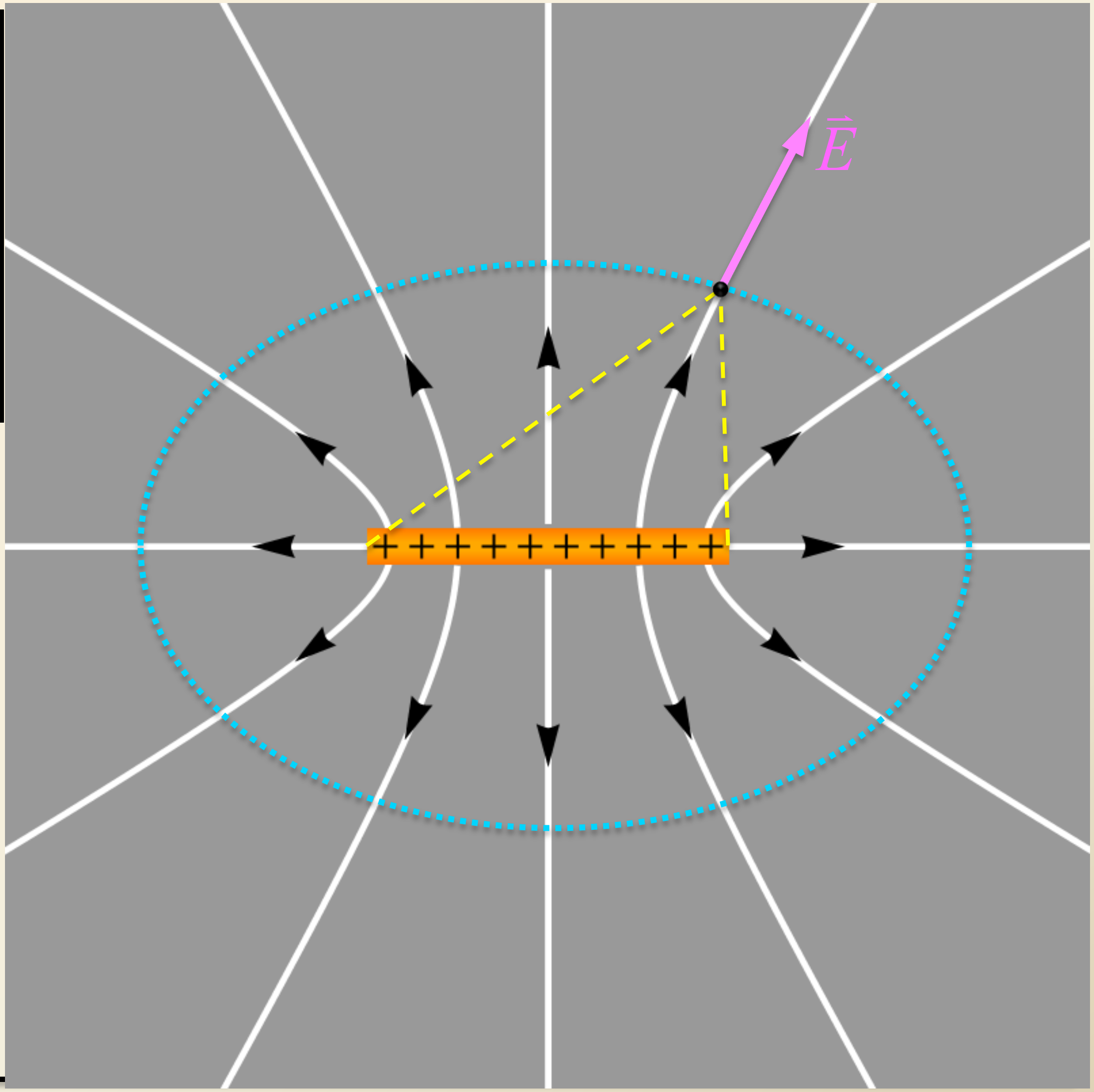
等势面是以细棒两端点为焦点的旋转椭球面

孤立导体椭球



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L s}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$




Thank You!