第四章 电流静电能

§ 4-1 电流的描述

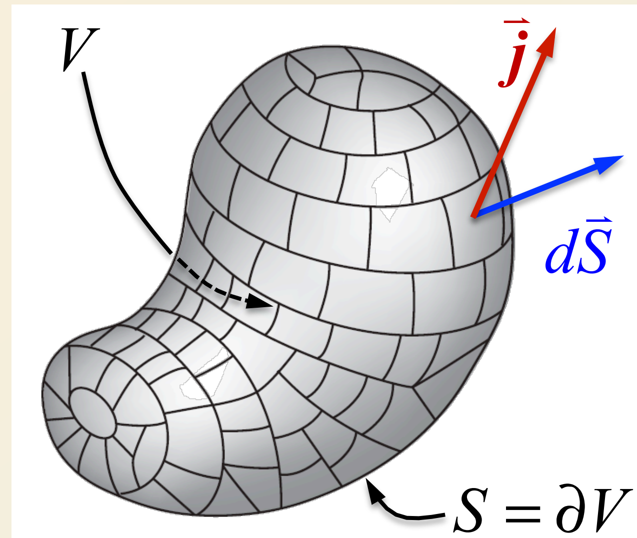
§ 4-2 物质中的电流

§ 4-3 稳恒电路

回顾

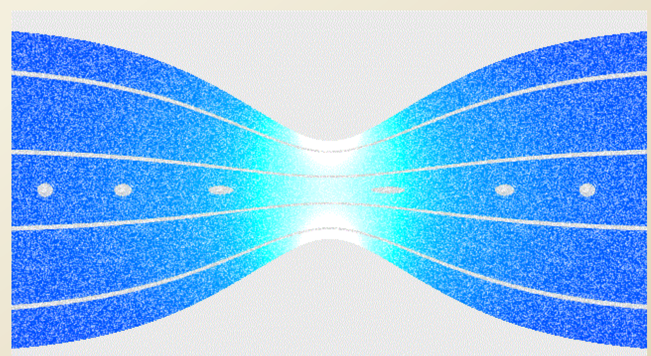
- 电流的描述 $dI = jdS_\perp = Kdl_\perp$ $\quad \vec{j} = \rho\vec{v},\ \vec{K} = \sigma\vec{v},\ \vec{I} = \lambda\vec{v}$
  - 极化电流体密度 $\vec{j}_p = \partial_t \vec{P}$
- 电荷守恒定律

$$-\frac{dQ_{\text{内}}}{dt} = I \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$



- 稳恒电流 $\vec{j} = \vec{j}\left(\vec{r}, \cancel{t}\right) = \vec{j}\left(\vec{r}\right)$

$$\nabla\cdot\vec{j} = 0 \quad \text{or} \quad \partial_t \rho = 0$$



欧姆定律

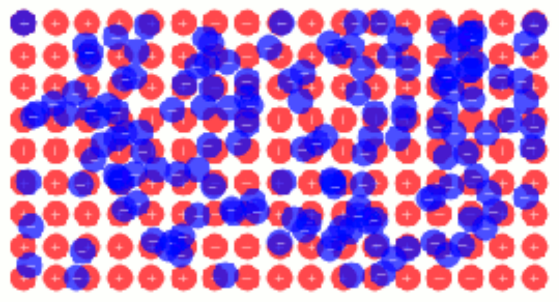
欧姆定律 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$

- 电导率 $\sigma=\dfrac{ne^2\tau}{m_e}$ (金属)
  - 电导率通常与温度有关 $\sigma=\sigma(T)$
- 一般情形下，$\vec{j}=\sigma\vec{f}$ $\vec{f}=$单位电荷受到的力
  - 如高温等离子 $\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$
- 欧姆定律成立的基本条件
  - 电场不太强 $eE\tau<<m_e u$
  - 随时间变化不太快 频率：$\nu<<10^{14}$ (可见光)

例：已知铜的电阻率为$\rho=1.68\times10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$，试估算特征时间、平均自由程的量级；并估算电场/电流密度的大小满足什么条件欧姆定律才适用。

解：$\sigma=\dfrac{ne^2\tau}{m_e}$ $\Rightarrow$ $$\tau=\frac{m_e}{\rho ne^2}\sim\frac{10^{-30}}{10^{-8}\times10^{29}\times\left(10^{-19}\right)^2}=\boxed{10^{-13}\ (\mathrm{s})}$$

$\Rightarrow$ $$l=u\tau\sim10^5\times10^{-13}=10^{-8}\ (\mathrm{m})\rightarrow\boxed{10\ (\text{埃})}$$



$eE\tau<<m_eu$ $\Rightarrow$ $$E<<E_0=\frac{m_eu}{e\tau}\sim\frac{10^{-30}\times10^5}{10^{-19}\times10^{-13}}=\boxed{10^7\ (\mathrm{V/m})}$$

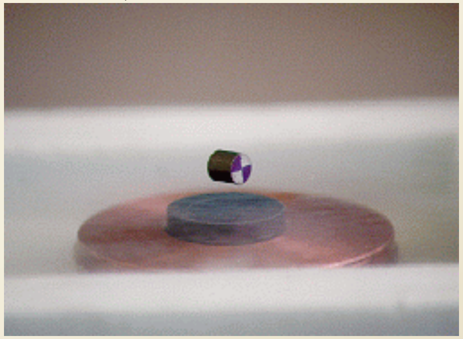
$\Rightarrow$ $$j<<\sigma E_0\sim10^8\times10^7=\boxed{10^{15}\ \left(\mathrm{A/m^2}\right)}$$

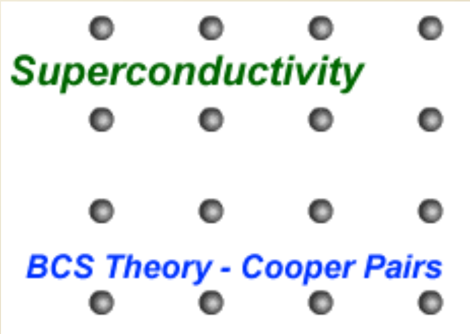
欧姆定律的失效问题

- 电场很强，以至 v 可与 u 相比，欧姆定律不再成立

$\tau = \tau(\vec{E})$ ⟶ $\sigma = \sigma(\vec{E})$ ⟶ E 与 j 的关系非线性

- 电场不是很强，但材料的特征时间很长，欧姆定律不再成立
  - 如低压电离气体　$eE\tau \sim m_e u$
- 欧姆定律是电场的加速效应与碰撞导致的减速效应二者相互竞争的结果，如果没有碰撞效应，欧姆定律当然也不再成立
  - 如真空电流(电子管、晶体管)
  - 如极化电流、磁化电流





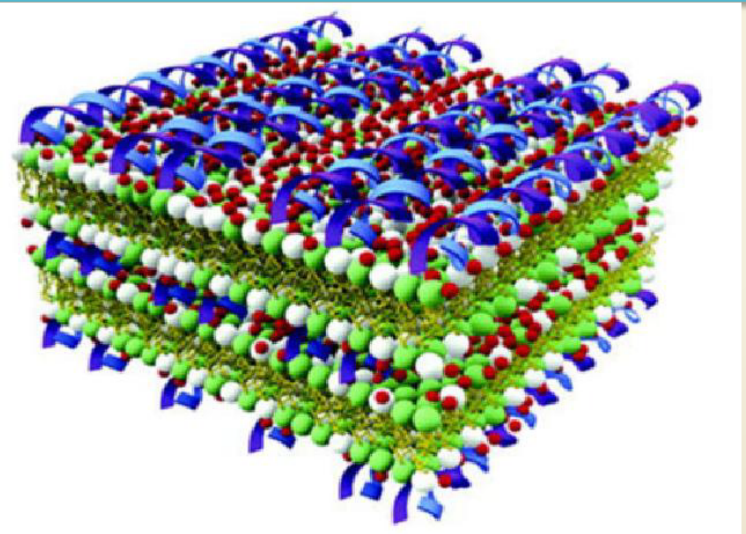
- 超导体、各向异性材料

欧姆型导体

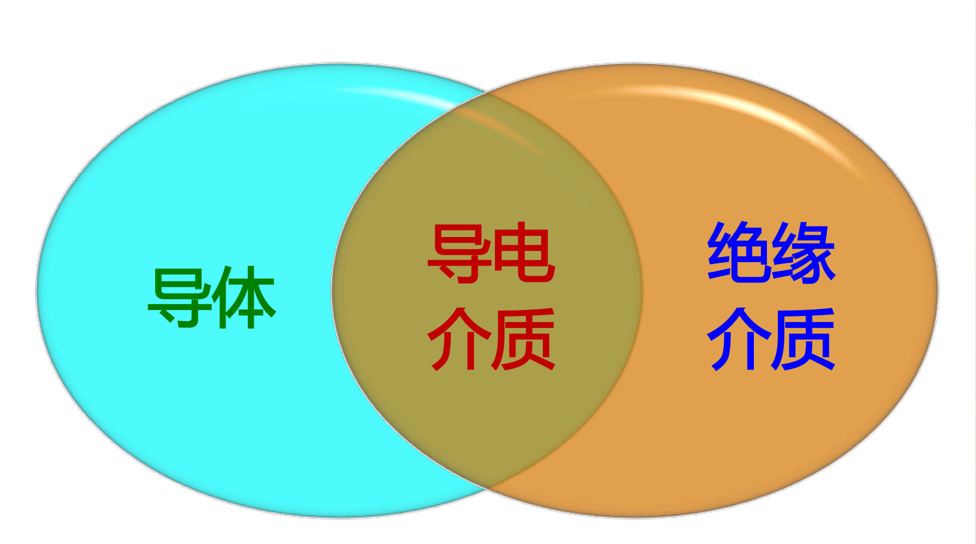
- 与库仑定律等不同，欧姆定律不是一个基本定律。
- 对于很多材料，欧姆定律在很多场合都以极高的精确度成立。
- 通常将满足欧姆定律的材料称为**欧姆型导体**
  - 理想绝缘体(如通常所讲电介质)：$\sigma = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{j}_{内} = 0$
  - 理想导体 (如通常所讲电极)：$\sigma = \infty$ $\Rightarrow$ $\vec{E}_{内} = 0$
  - 半导体 (如硅、锗、海水)
  - 良导体 (如通常所讲导线)
  - 不良导体 (如通常所讲电阻)

导电介质

■ 导电介质就是既有介质的特性，又具有导电的特性。实际上大部分材料既具有绝缘介质的特性，也具有导电的特性。此外，绝缘体在一定条件下也会转换成导电材料。



■ 导电介质在电场中，既要满足导电的基本方程，即欧姆定律，又要满足介质的基本规律。因此在处理这类问题时需要兼顾这两种材料的电学特性。



电介质中电磁问题的完备方程

- 电介质中的电磁规律
  - 环路定理

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\times\vec{E} = 0, \quad \hat{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

  - 高斯定理 $\left(\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0, \quad \hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_0$$

- 电介质的本构方程

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \quad \text{或} \quad \vec{P} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\vec{E}$$

联立能完全确定 *E* 和 *D* (静电场的唯一性定理)

导电介质中电磁问题的完备方程

- 导电介质中的电磁规律
  - 环路定理

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\times\vec{E}=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0$$

  - 稳恒条件

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{j}=0,\quad \hat{n}\cdot\left(\vec{j}_2-\vec{j}_1\right)=0$$

- 导电介质的本构方程 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$

联立能完全确定 E 和 j (静电场的唯一性定理)

- 求得 E 和 j 后，可进一步由 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 得到电位移，再由高斯定理求得自由电荷分布

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0,\quad \hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_0$$

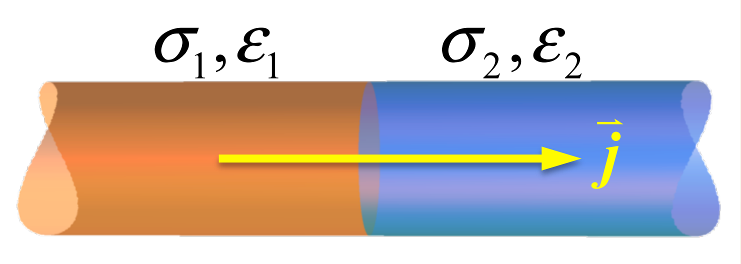
导电介质基本规律

- 导电介质中的稳恒电流 j 和静电场 E 的分布规律取决于导电介质的导电性质，即与导电介质的电导率有关，而与导电介质的极化性质即导电介质的介电常量无关。

- 由静电场 E 可按高斯定理确定载流导电介质的总电荷分布，这一分布也只取决于导电介质的导电性质，而与导电介质的极化性质即导电介质的介电常量无关。

- 导电介质中的自由电荷和极化电荷在总电荷中所占的份额与导电介质的极化性质有关，即与导电介质的介电常量有关。

例：稳恒电流均匀地流经两种导电介质圆柱 (横截面积均为 S)，已知电流密度为 j，两种导电介质的 (电导率，介电常数)分别为 (σ_1,ε_1) 和 (σ_2,ε_2) 。试确定介质界面上的自由电荷分布。



解：稳恒电流的要求

$$\vec{j}=\sigma_1\vec{E}_1=\sigma_2\vec{E}_2$$

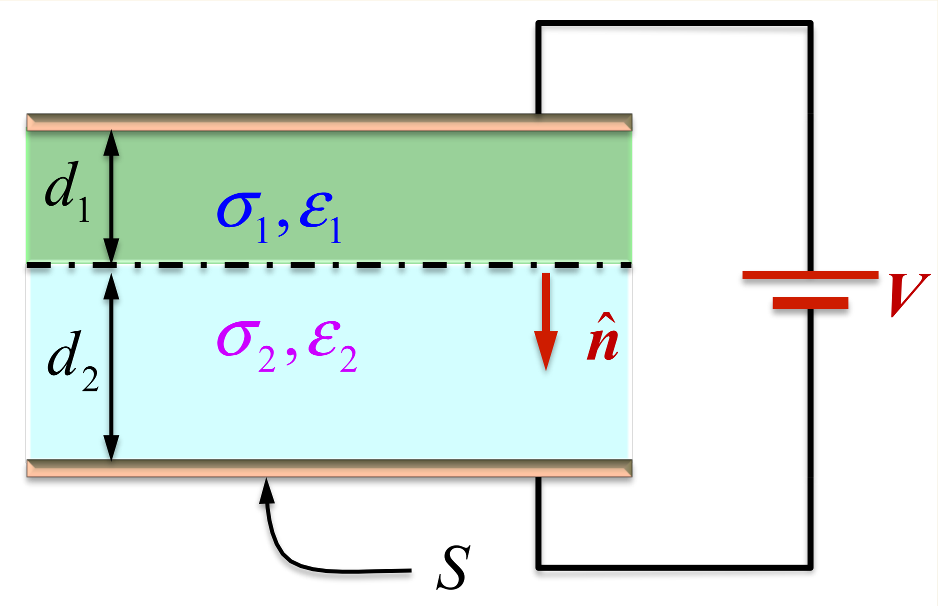
利用电磁性能方程得到 $\vec{D}_1=\varepsilon_1\vec{E}_1$ 和 $\vec{D}_2=\varepsilon_2\vec{E}_2$

设 $\boldsymbol{n}$ 是由介质1指向介质2的法向单位矢量，由边值关系有

$$\sigma_{e0}=\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\quad\Rightarrow\quad\sigma_{e0}=\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)j=\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\frac{I}{S}$$

界面处的总电荷密度 $\sigma_e=\varepsilon_0\hat{n}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{\sigma_2}-\dfrac{1}{\sigma_1}\right)j$

例：平行板电容器极板间填充两层导电介质，电容器两极板间电压为 V，图中所标参数皆为已知。忽略边缘效应。求电流密度、电场强度的分布；求自由电荷和总电荷分布。



解：

$$\vec{j} = \sigma_1 \vec{E}_1 = \sigma_2 \vec{E}_2 = \frac{I}{S}\hat{n}$$

$$\Rightarrow V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = j\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right) \Rightarrow j = \frac{V}{d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2}$$

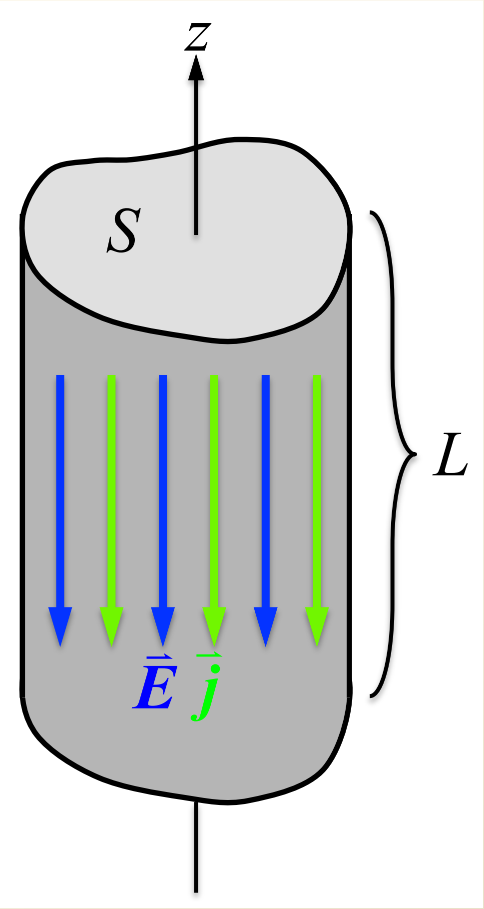
请自行求解 电场强度、电位移矢量

以及 自由、极化和总电荷分布

导电介质中的势方程

- 导电介质中的基本方程
  - 环路定理 $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ $\longrightarrow$ $\nabla\times\vec{E}=0,\quad \hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0$
  - 稳恒条件 $\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$ $\longrightarrow$ $\nabla\cdot\vec{j}=0,\quad \hat{n}\cdot\left(\vec{j}_2-\vec{j}_1\right)=0$
  - 本构方程 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$
- **稳恒电场可以用标量势描述** $\vec{E}=-\nabla\varphi$
  - 均匀导电介质内 $\nabla^2\varphi=0$
  - 导电介质界面处 $\varphi_1=\varphi_2,\quad \sigma_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ (即 $j_{1n}=j_{2n}$)

例：电导率为 σ、长为 L、截面均匀的柱形导电介质，已知上下底面均为等势面，电势差为 V。试问：电流如何在导电介质内流动？



解：柱内的电势 φ 满足拉普拉斯方程，边界上

上下底面：$\varphi(z=0)=0,\ \varphi(z=L)=V$

侧面：$\hat{n}\cdot\vec{j}=0=\hat{n}\cdot\vec{E} \longrightarrow \partial\varphi/\partial n=0$

柱内电势如何分布？
需要求解拉普拉斯方程吗？

由唯一性定理，柱内的解唯一确定

我猜：$\varphi(z)=(z/L)V$

$\longrightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi=-\dfrac{V}{L}\hat{z} \longrightarrow \vec{j}=\sigma\vec{E}=-\dfrac{\sigma V}{L}\hat{z}$

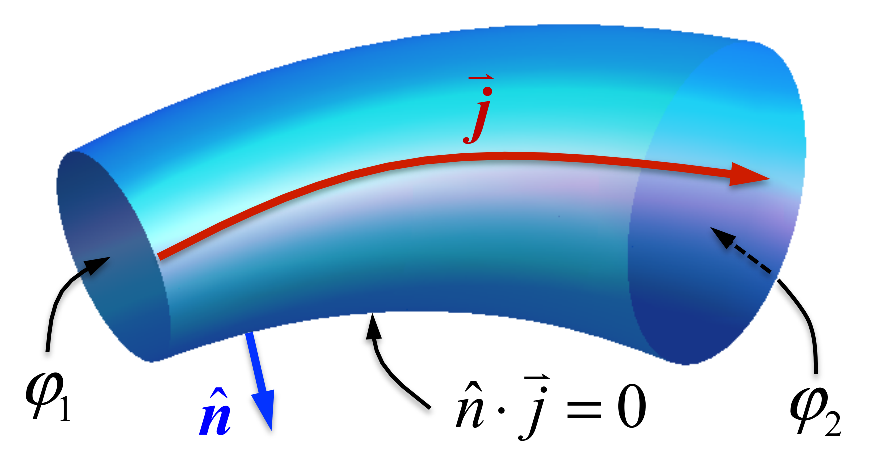
电阻

考察通有**稳恒电流**的一段导体，电流强度为 I；

设 S_1 和 S_2 是两个等势面，电势分别为 φ_1 和 φ_2

问题：如果两个等势面的电势分别变为 $k\varphi_1$ 和 $k\varphi_2$，电流强度如何变化

答案：区域内每一点的电势都变为原来的 k 倍，从而每一点的电场、电流密度也都变为原来的 k 倍。



- 导体在两个等势面之间的**电阻**

$$R \equiv \frac{\varphi_1-\varphi_2}{I}=\frac{V}{I}$$

电阻

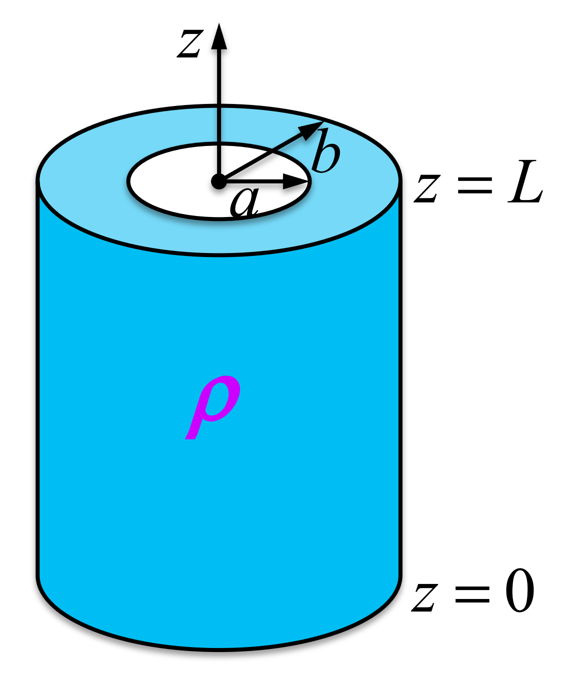
- 导体在两个等势面之间的**电阻** $R \equiv \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \dfrac{V}{I}$
  - 欧姆定律(积分形式) $V = IR$ 仅适用于稳恒电流
- 即便对于同一导体，当电流流动方式不同时，对应的电阻也不同。而对于特定的电流分布，电阻可以用电场表述为

$$R = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \Big/ \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

  - 如果在每一横截面上电流都是均匀的，那么 $\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS_\perp$
  - 沿着某根电流线(也即电场线)进行积分计算电压，则

$$R = \int_1^2 \frac{Edl}{jS_\perp} = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma S_\perp} = \int_1^2 \frac{\rho dl}{S_\perp} \xrightarrow[\text{截面均匀}]{\text{材料均匀}} R = \frac{L}{\sigma S_\perp} = \frac{\rho L}{S_\perp}$$

例：长为 L、内外半径分别为 a 和 b、电阻率为 ρ 的导体柱壳，试分别在以下两种情形下计算电阻：



(1) $\varphi(z=0)=c_0,\ \varphi(z=L)=c_1$

(2) $\varphi(s=a)=c_a,\ \varphi(s=b)=c_b$

解：(1) 电流沿着 z 轴流动，且在横截面内均匀分布，因此

$$R_1=\frac{\rho L}{S}=\frac{\rho L}{\pi\left(b^2-a^2\right)}$$

(2) 对称性 $\Rightarrow$ $\vec{j}=\vec{j}(s)\hat{s}$

即电流在每一横截面内均匀分布 $\Rightarrow$ $R_2=\int_a^b\frac{\rho ds}{2\pi sL}=\frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{b}{a}$

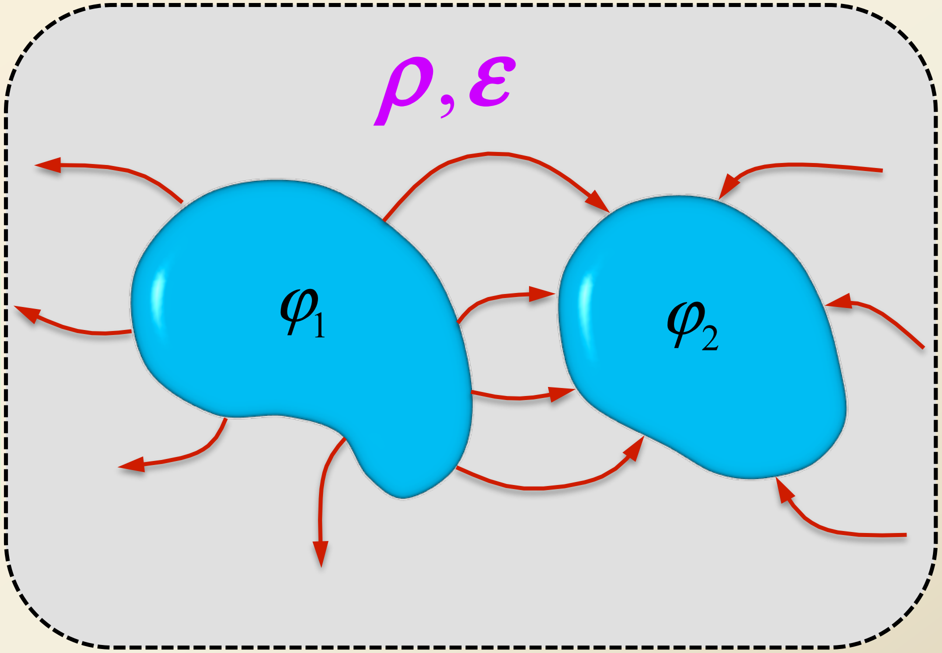
记否：柱形电容器的电容为 $C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}$ $\Rightarrow$ $R_2C=\rho\varepsilon$

电阻与电容

两个电极 (理想导体) 嵌入无限的均匀导电介质(电阻率为 ρ) 。

$$R=\frac{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}=\rho\frac{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

$$C=\frac{Q_0}{V}=\frac{\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}}=\varepsilon\frac{\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$



$$\Rightarrow \quad RC=\rho\varepsilon$$

微分形式的焦耳(Joule)定律

- 导体内，电场作用于单位体积的载流子所消耗的功率

$$p=\rho_0\vec{E}\cdot\vec{v}=\vec{E}\cdot\vec{j}$$

功率密度

- 对于**欧姆型导体**，由于 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ ，因此

$$p=\sigma E^2=\frac{j^2}{\sigma}$$

- 导体内电场消耗的总功率

$$P=\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{j}\,dV$$

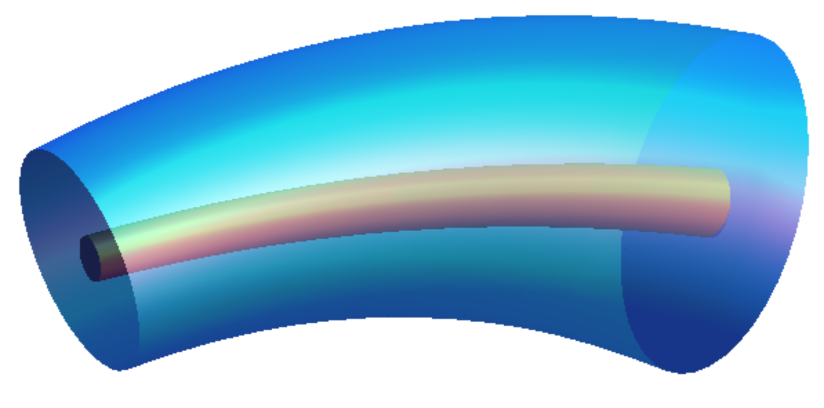
积分形式的焦耳(Joule)定律

对于稳恒电流，将导体区域划分为一根根细电流管，由于

$$p\Delta V = \vec{E}\cdot\vec{j}\Delta V = \vec{E}\cdot\vec{j}\Delta S_{\perp}\Delta l = \vec{E}\cdot\Delta\vec{l}\left(j\Delta S_{\perp}\right)$$

因而，每一根电流管内消耗的功率为

$$\Delta P = \Delta I\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \left(\Delta I\right)V$$



对所有电流管求和，得到

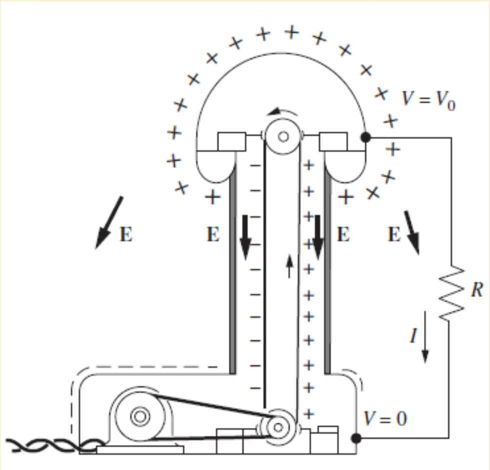
$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

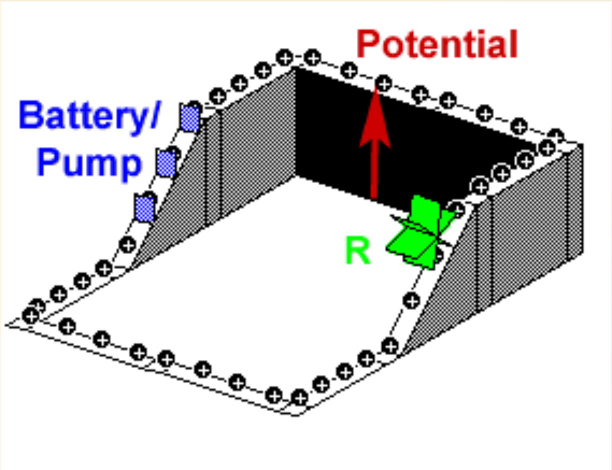
电源与电动势

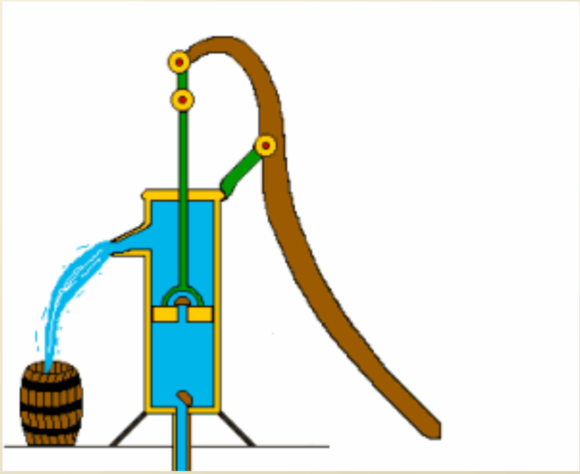
非静电力

问题：稳恒电流的电流线闭合，而稳恒电场的电场线不可能是闭合曲线，但是，导体内却有 $E//j$，矛盾吗

- 为形成稳恒电流，必须有非静电力 K
  - 当沿闭合回路绕行一周之后，所经历过程的电势总改变量为零。即在闭合回路中，既有电势下降的路段，也有电势上升的路段。当正电荷沿电势下降的路段运动时，静电力做功。当正电荷沿电势上升的路段运动，电荷的电势能增加，静电力将对电荷的做负功。







电源

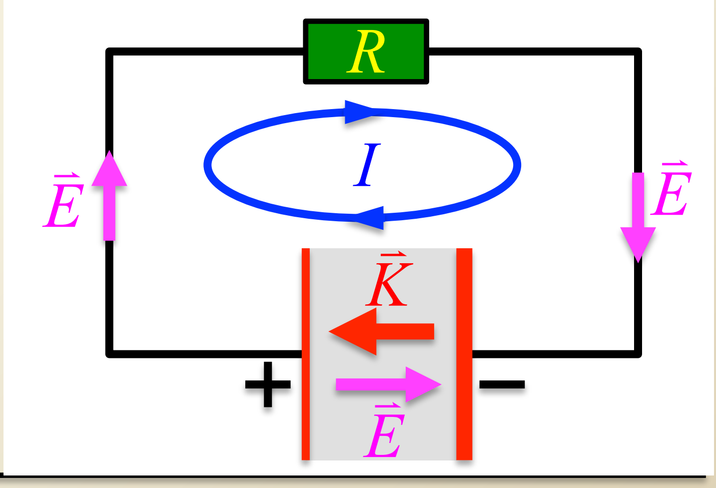
- **电源：提供非静电力的装置**

  - 通常电源有正负两极，电势高的叫正极，电势低的叫负极。

  - 它通过极板及外电路各处累积的电荷在外电路中产生静电场 E 使电流经外电路由正极指向负极；

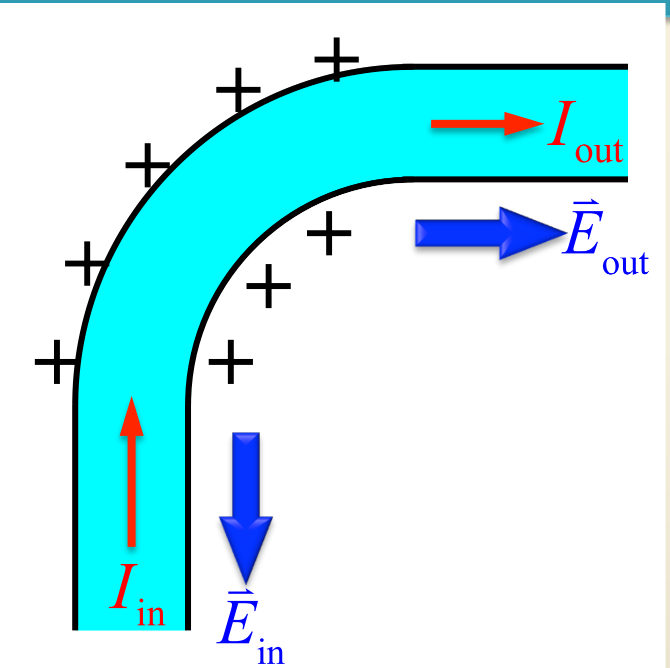
  - 在电源内部除了有静电力之外还存在非静电力

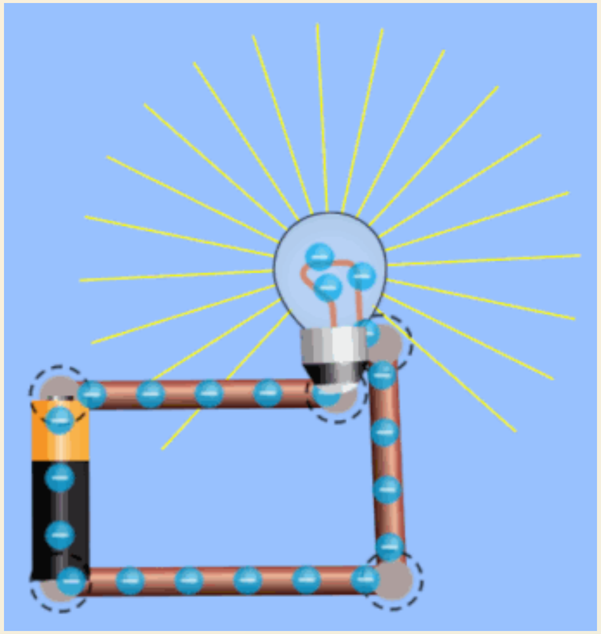
  - 电路接通后，电源内部的非静电力以及电源内外的静电力的联合作用下，电流经电源内部由负极流向正极。上述两部分电流一起形成了闭合的稳恒电流。



什么在推动电荷？

问题：既然通常导线中电荷的漂移速度并不比蜗牛快，在电源外部，电场如何推动电荷运动以至于电路中的各个部分都同时产生电流？电荷如何知道要同时开始运动？





电路是一个自我调节以保持各点电流均匀的完美系统，这种调节是以光速进行的，即便在以微波的频率振动的系统中各点的电流在同一时刻仍几乎是相同的

全欧姆定律

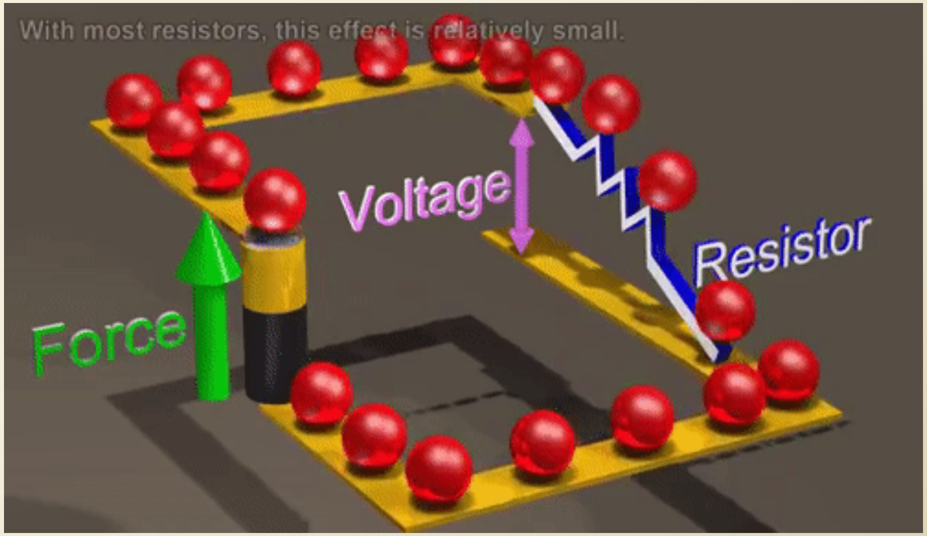
- 电荷会受到静电力与非静电力共同作用，故欧姆定律表为

$$\vec{j}=\sigma\vec{f}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{K}\right)$$

- 其中 K 为单位电荷受到的非静电力

$$\begin{cases}\vec{K}\neq 0, & \text{电源内部}\\ \vec{K}=0, & \text{电源外部}\end{cases}$$

- 稳恒电源中的非静电力必定不是保守力



电动势

■ 实际上，描述电源的性质即它所提供的非静电力的性质，更常用的不是物理量 K，而是**电动势** ε，它定义为将单位正电荷从负极经电源内部移到正极时非静电力所作的功，即

$$\varepsilon \equiv \int_{-(内)}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

■ **单位：伏特(V)**

■ **电源的电动势反映电源中非静电力做功的本领，它反映的是电源本身的特性，与外电路的性质以及是否接通无关。**

电动势

有些电源无法区分电源内部和外部，$\boldsymbol{K}$ 分布于各处，这时把电动势定义为沿闭合回路的线积分，即

$$\varepsilon \equiv \oint_C \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

称它为整个闭合回路的电动势。对通常电源而言，$\boldsymbol{K}$ 仅限于电源内部。

路端电压

- 所谓**路端电压**，是指电源正极与负极之间的电势差

$$V \equiv \varphi_+ - \varphi_- = \int_{\text{正极}}^{\text{负极}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

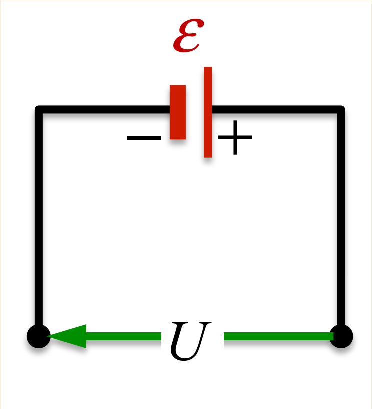
- 该电压与积分路径无关
- 由全欧姆定律有

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{K}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \rho\vec{j} - \vec{K}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = \int_{+(\text{内})}^{-} \rho\vec{j} \cdot d\vec{l} - \int_{+(\text{内})}^{-} \vec{K} \cdot d\vec{l} = \varepsilon + \int_{+(\text{内})}^{-} \rho\vec{j} \cdot d\vec{l} \\ V = \int_{+(\text{外})}^{-} \rho\vec{j} \cdot d\vec{l} \end{cases}$$

开路时的路端电压

$$V=\varepsilon+\int_{+(内)}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=\int_{+(外)}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}$$

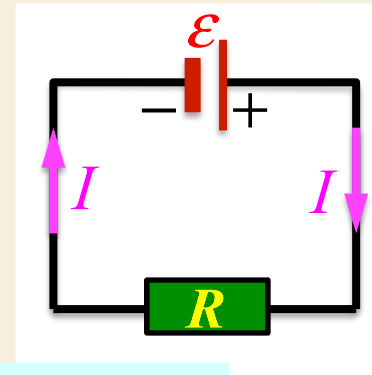


- 开路时，由于 j=0，因而

$$V=\varepsilon$$

电源放电时的路端电压

$$V=\varepsilon+\int_{+(\text{内})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=\int_{+(\text{外})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}$$



- 电源放电时，电源内部电流由负极指向正极

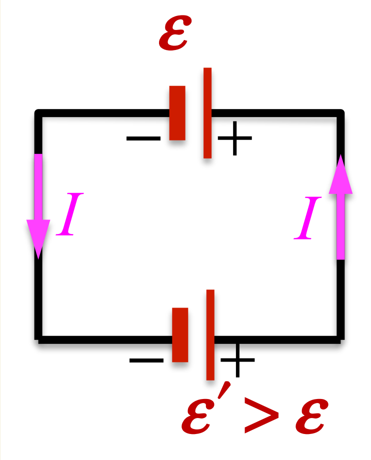
$$\begin{cases} V=\varepsilon-\int_{+(\text{内})}^{-}\rho j\,dl=\varepsilon-\int_{+(\text{内})}^{-}\rho\dfrac{jS}{S}dl=\varepsilon-I\int_{+(\text{内})}^{-}\dfrac{\rho dl}{S}=\varepsilon-Ir \\ V=\int_{+(\text{外})}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=\int_{+(\text{外})}^{-}\rho j\,dl=\int_{+(\text{外})}^{-}\rho\dfrac{jS}{S}dl=I\int_{+(\text{外})}^{-}\dfrac{\rho dl}{S}=IR \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon-Ir=IR$ $\Rightarrow$ $I=\varepsilon/(R+r)$

- 积分路径从电源正极指向负极，电势降为 ***ε-Ir***
- 积分路径与流经电阻的电流方向一致时，电势降为 ***IR***

电源充电时的路端电压

$$V=\varepsilon+\int_{+(内)}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}=\int_{+(外)}^{-}\rho\vec{j}\cdot d\vec{l}$$

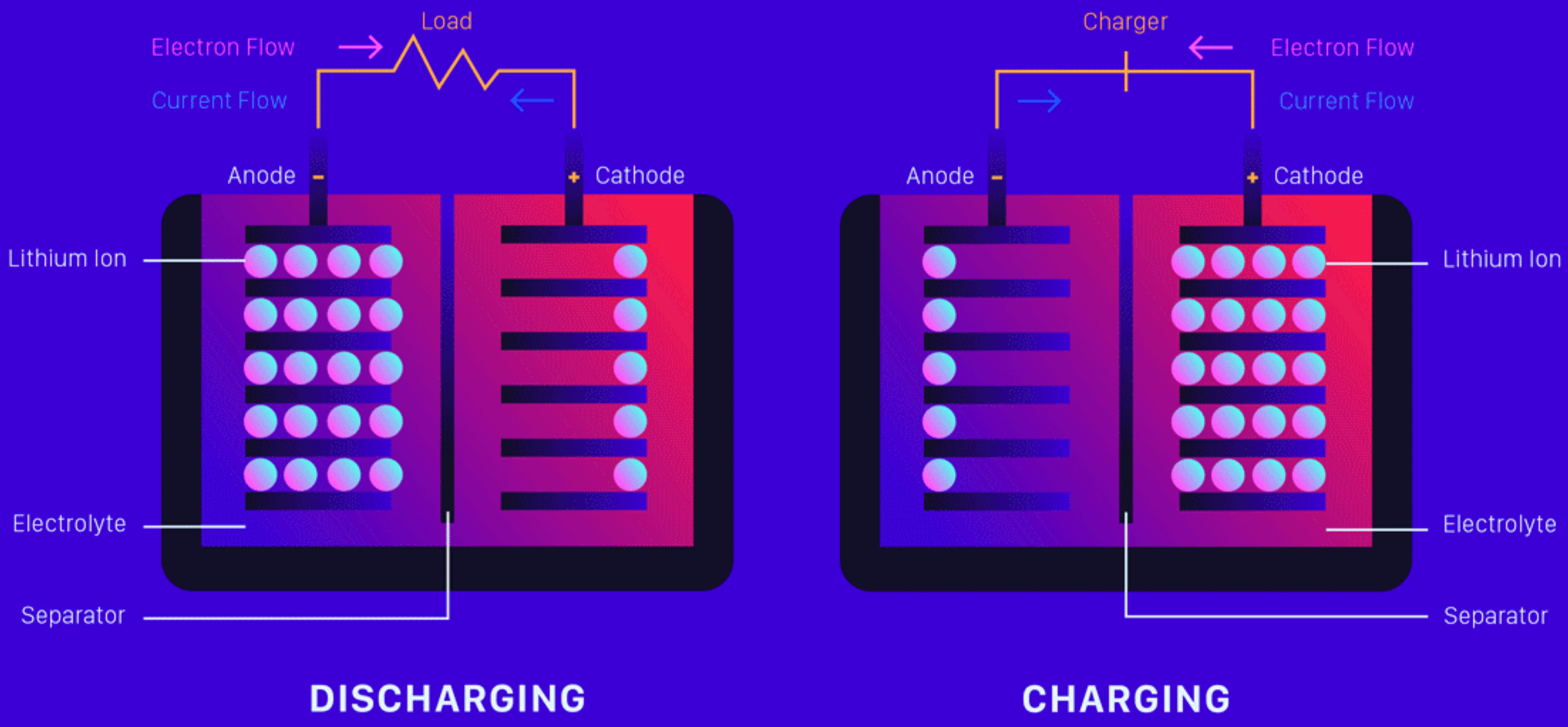


- 电源充电时，电源内部电流由正极流向负极

$$\begin{cases} V=\varepsilon+\int_{+(内)}^{-}\rho j dl=\varepsilon+Ir \\ V=\varepsilon'-Ir'-IR \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon+Ir=\varepsilon'-Ir'-IR \Rightarrow I=\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{R+r+r'}$$

电源的放电与充电



Load
Electron Flow
Current Flow
Anode
Cathode
Lithium Ion
Electrolyte
Separator
DISCHARGING
Charger
Electron Flow
Current Flow
Anode
Cathode
Lithium Ion
Electrolyte
Separator
CHARGING


Thank You!